서문

새 교육과정에 맞춘 기출문제집의 기준이 되려고 합니다 !

2016년 11월 17일에 실시된 대학수학능력평가 수학 영역은 6년만의 불수능으로, 고득점을 노리는 수험생에게 만점과 1등급을 결정하는 최고 난문(30번)에 대한 대비가 그 어느 때보다 중요해졌습니다.

○ 올해 최고 난문의 특징은

가형 : 가형 30번은 최소한 6단계 이상의 사고과정을 거쳐야 풀 수 있는 문제였습니다. 물론 수학적 직관으로 몇 단계는 줄일 수 있겠습니다만, 그렇다고 해도 지난 5년간 출제된 이과 30번에 비하여 사고과정의 단계가 많았습니다. 그런데 어려워 보이는 이 문제는 사실 알고 보면 **지난 23년간 출제된 평가원 기출문제들의 재조합일 뿐이며, 풀이의 각 과정과 과거 평가원 기출문제 사이에 일대일대응이 가능**합니다. 이처럼 평가원이 수험생에게 우선적으로 요구하는 것은 교과서의 개념을 정확하게 숙지하고, 이를 바탕으로 교과서 문제, 평가원 기출문제를 반복 연습하는 것입니다. 이런 원칙을 지켜서 연습을 충분히 한 수험생의 경우 올해 가형 30번은 도전해 볼만 했을 것이지만, 빠르고 멋있는 풀이에 길들여진 수험생의 경우 당혹스러웠을 것입니다. 더 이상 피상적인 학습만으로는 가형에서 만점은 불가능 한 것입니다.

나형 : 나형 30번은 최소한 3단계 이상의 사고과정을 거쳐야 풀 수 있는 문제였습니다. 풀이의 중간 단계에서 역함수의 개념이 사용되는데, 역함수에 대한 정확한 이해를 바탕으로 다양한 상황의 문제를 푼 경험이 없었다면 당혹스러웠을 것입니다. 지난 5년간의 수능과 비교해 볼 때, 이젠 나형에서도 개념에 대한 정확한 이해와 이를 문제풀이에 실제로 적용할 수 있는 능력을 요구하고 있는 것입니다. 특히 난문의 경우 풀다 보면 어떻게든 풀리는 문제가 출제될 가능성은 적어지고 있는 것입니다.

○ 수능 수학을 대비하기 위해서는

(1) 교과서의 정의/정리/공식/성질/법칙을 정확하게 이해하고, 이를 교과서의 예제와 연습문제에 적용하는 연습을 해야 합니다.
(2) (1)의 연습을 바탕으로 평가원 기출문제를 최소 3회 이상 반복해서 풀어야 합니다. 특히 **정답률이 낮은 난문에 대해서는 자신의 손에서 정확한 풀이가 나올 때까지 서술형 풀이를 여러 번 작성**해야 합니다. 이 책의 모든 풀이는 교과서의 정의/정리/성질/공식/법칙과 수학적 표현만으로 작성되었으며, 가능하면 표현의 경제성보다는 수학적 엄밀함에 무게를 두었습니다. 자신의 풀이와 해설집의 풀이를 대조비교 하는 것도 좋은 공부가 될 것입니다.
(3) 평가원 기출문제에서 자주 등장하는 수학적 사고력, 수학적 사실들은 스스로 정리하는 것이 필요합니다. 평가원 기출문제는 확장된 교과서이기 때문입니다. 한 번 풀고 마는 문제들이 아닙니다.

○ 해설에 대하여

이 책에 실린 **해설은 지난 5년간 1만 시간 이상 작업한 결과물**입니다. 다양한 관점을 제시하기 위하여 시중에 출시된 대부분의 개념서와 기출문제집의 해설을 읽었으며, 이를 해설에 적극적으로 반영하였습니다. 아직은 부족한 점이 많겠지만 **시중의 어떤 기출 문제집 보다도 많은 다른 풀이와 참고 사항을 수록**하였다고 생각합니다.

수능 수학의 모든 것을 한 권에 담는 다는 각오로, 매년 개정판을 내면서 해설 보강 작업을 계속해나갈 것입니다.

이동훈

2018학년도 수능의 시작입니다 !

학년도	시험	실시년도/월	학년도	시험	실시년도/월
5차 교육과정			2007	대학수학능력	2006년 11월
1991	실험평가(1차)	1990년 12월	2008	모의평가(6월)	2007년 6월
1992	실험평가(2차)	1991년 5월	2008	모의평가(9월)	2007년 9월
1992	실험평가(3차)	1991년 8월	2008	대학수학능력	2007년 11월
1992	실험평가(4차)	1991년 11월	2009	모의평가(6월)	2008년 6월
1993	실험평가(5차)	1992년 5월	2009	모의평가(9월)	2008년 9월
1993	실험평가(6차)	1992년 8월	2009	대학수학능력	2008년 11월
1993	실험평가(7차)	1992년 11월	2010	모의평가(6월)	2009년 6월
1994	대학수학능력(1차)	1993년 8월	2010	모의평가(9월)	2009년 9월
1994	대학수학능력(2차)	1993년 11월	2010	대학수학능력	2009년 11월
1995	대학수학능력	1994년 11월	2011	모의평가(6월)	2010년 6월
1996	대학수학능력	1995년 11월	2011	모의평가(9월)	2010년 9월
1997	대학수학능력	1996년 11월	2011	대학수학능력	2010년 11월
1998	대학수학능력	1997년 11월	2007개정 교육과정		
6차 교육과정			2012	모의평가(6월)	2011년 6월
1999	대학수학능력	1998년 11월	2012	모의평가(9월)	2011년 9월
2000	대학수학능력	1999년 11월	2012	대학수학능력	2011년 11월
2001	대학수학능력	2000년 11월	2014	예비평가	2012년 5월
2002	대학수학능력	2001년 11월	2013	모의평가(6월)	2012년 6월
2003	대학수학능력	2002년 9월	2013	모의평가(9월)	2012년 9월
2003	대학수학능력	2002년 11월	2013	대학수학능력	2012년 11월
2004	대학수학능력	2003년 6월	2014	모의평가(6월)	2013년 6월
2004	대학수학능력	2003년 9월	2014	모의평가(9월)	2013년 9월
2004	대학수학능력	2003년 11월	2014	대학수학능력	2013년 11월
7차 교육과정			2015	모의평가(6월)	2014년 6월
2005	예비평가	2003년 12월	2015	모의평가(9월)	2014년 9월
2005	모의평가(6월)	2004년 6월	2015	대학수학능력	2014년 11월
2005	모의평가(9월)	2004년 9월	2016	모의평가(6월)	2015년 6월
2005	대학수학능력	2004년 11월	2016	모의평가(9월)	2015년 9월
2006	모의평가(6월)	2005년 6월	2016	대학수학능력	2015년 11월
2006	모의평가(9월)	2005년 9월	2009개정 교육과정		
2006	대학수학능력	2005년 11월	2017	모의평가(6월)	2016년 6월
2007	모의평가(6월)	2006년 6월	2017	모의평가(9월)	2016년 9월
2007	모의평가(9월)	2006년 9월	2017	대학수학능력	2016년 11월

각 과목별 문항 수 및 비율 (총 3108 문항)

수학2	미적분1	미적분2	확률과 통계	**기하와 벡터**	수학1	교육과정 外
467	528	539	478	**244**	134	718
15 %	17 %	17.4 %	15.4 %	**7.8 %**	4.3 %	23.1 %

※ 수학1, 교육과정 外의 문항과 해설은 오르비북스(orbibooks.com)에서 무료PDF파일 다운로드 가능

○ **'이동훈 기출문제집 기하와 벡터'** 에는 평가원이 세상에 선보인 3108개의 문항 중에서
2009개정 교육과정에 맞는 244개의 문항을 엄선하여 수록하였습니다.
(일부 문항은 새 교육과정에 맞게 용어와 기호를 수정)

○ 문항 정렬은 단원별, 출제년도 순을 따랐습니다.
소단원별의 문항 구성은 교과서의 서술 체계를 가장 잘 드러내며,
출제년도 순의 문항 구성은 출제 경향을 뚜렷하게 보여줄 것입니다.

○ 모든 해설은 교과서에 근거합니다.
해설은 교과서의 정의/정리/성질/공식/법칙과 수학적 표현만으로 작성되었으며, 수학적으로 엄밀합니다.
다른 풀이 및 참고 사항을 최대한 수록하여 문제 해결의 다양한 시각을 제시하였습니다.

문제집 목차

단원별 알파벳구성

과목	대단원	알파벳	과목	대단원	알파벳
수학2	집합과 명제	A	확률과 통계	순열과 조합	M
	함수	B		확률	N
	수열	C		통계	P
	지수와 로그	D	기하와 벡터	평면 곡선	Q
미적분1	수열의 극한	E		평면 벡터	R
	함수의 극한과 연속	F		공간 도형	S
	다항함수의 미분법	G		공간 벡터	T
	다항함수의 적분법	H	수학1	다항식	U
미적분2	지수함수와 로그함수	I		방정식과 부등식	V
	삼각함수	J		도형의 방정식	W
	미분법	K	교육과정 外		Z
	적분법	L			

S. 공간도형

- 2009개정 교육과정

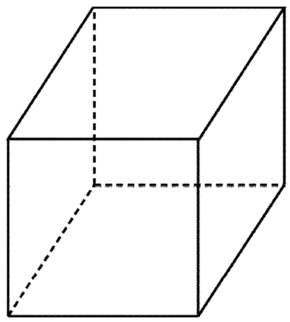
○ 풀이에서 사인법칙, 코사인법칙은 제외하였습니다.

S. 위치 관계

S001

(1994(2차)−공통10)

그림과 같은 정육면체를 평면으로 자른 단면의 모양은 <보기> 중 몇 가지가 될 수 있는가?



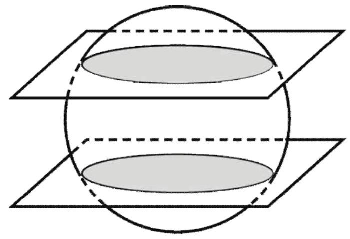
- 삼각형
- 정사각형이 아닌 직사각형
- 정사각형이 아닌 마름모
- 오각형
- 육각형

① 1가지 ② 2가지 ③ 3가지
④ 4가지 ⑤ 5가지

S002

(2001−자연5)

거리가 1인 두 평행한 평면으로 반지름의 길이가 1인 구를 잘라서 얻어진 두 단면의 넓이의 합의 최댓값은? [3점]

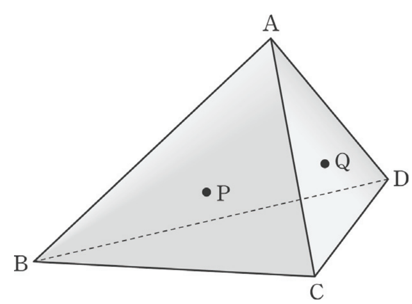


① $\frac{1}{2}\pi$ ② $\frac{3}{4}\pi$ ③ π
④ $\frac{3}{2}\pi$ ⑤ 2π

S003

(2005(9)−가형9)

사면체 ABCD의 면 ABC, ACD의 무게중심을 각각 P, Q라고 하자. <보기>에서 두 직선이 꼬인 위치에 있는 것을 모두 고르면? [3점]



ㄱ. 직선 CD와 직선 BQ
ㄴ. 직선 AD와 직선 BC
ㄷ. 직선 PQ와 직선 BD

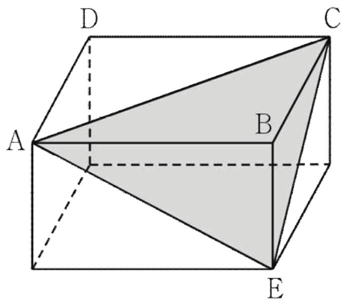
① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

S. 삼수선의 정리

S004

(1999-예체능11)

그림과 같은 직육면체에서 $\overline{AB}=2$, $\overline{BC}=1$, $\overline{BE}=1$이다. 삼각형 AEC의 넓이는? [3점]



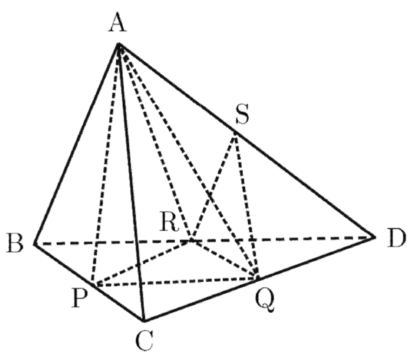
① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ $\frac{3}{2}$

④ $\frac{3}{2}\sqrt{2}$ ⑤ 2

S005

(1999-인문19/예체능19)

사면체 ABCD의 네 모서리 BC, CD, DB, AD의 중점을 각각 P, Q, R, S라고 할 때, 두 사면체 APQR와 SQDR의 부피의 비는? [3점]



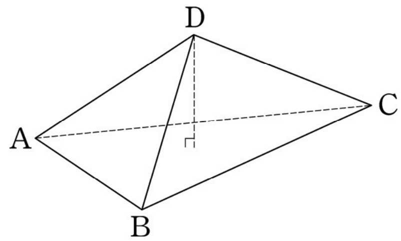
① 1 : 1 ② 2 : 1 ③ 3 : 1

④ 3 : 2 ⑤ 4 : 1

S006

(2004(9)-자연28)

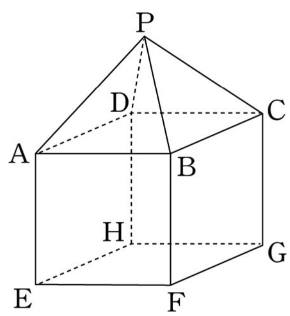
사면체 ABCD에서 변 AB의 길이는 5, 삼각형 ABC의 넓이는 20, 삼각형 ABD의 넓이는 15이다. 삼각형 ABC와 삼각형 ABD가 이루는 각의 크기가 $30°$일 때 사면체 ABCD의 부피를 구하시오. [3점]



S007

(2004-자연7)

오른쪽 그림과 같이 정육면체 위에 정사각뿔을 올려놓은 도형이 있다. 이 도형의 모든 모서리의 길이가 2이고, 면 PAB와 면 AEFB가 이루는 각의 크기가 θ일 때, $\cos\theta$의 값은? (단, $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$) [3점]



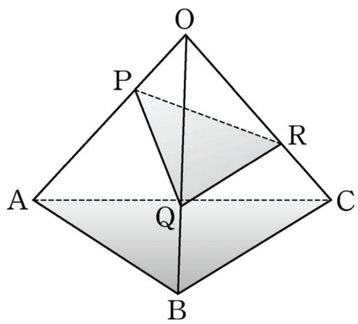
① $-\frac{\sqrt{6}}{3}$ ② $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ ③ $-\frac{1}{3}$

④ $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ ⑤ $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

S008

(2005(예비)-가형11)

그림의 정사면체에서 모서리 OA를 1 : 2로 내분하는 점을 P라 하고, 모서리 OB와 OC를 2 : 1로 내분하는 점을 각각 Q와 R라 하자. $\triangle PQR$와 $\triangle ABC$가 이루는 각의 크기를 θ라 할 때, $\cos\theta$의 값은? [4점]



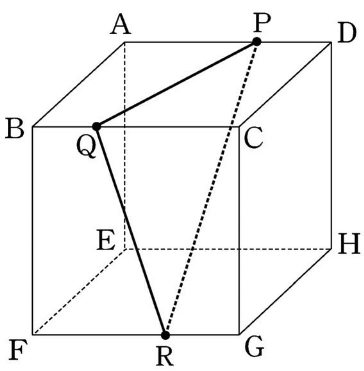
① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{\sqrt{2}}{3}$ ③ $\frac{\sqrt{3}}{3}$

④ $\frac{\sqrt{5}}{3}$ ⑤ $\frac{\sqrt{6}}{3}$

S009

(2005-가형7)

오른쪽 그림과 같이 한 모서리의 길이가 3인 정육면체 ABCD-EFGH의 세 모서리 AD, BC, FG 위에 $\overline{DP}=\overline{BQ}=\overline{GR}=1$인 세 점 P, Q, R가 있다. 평면 PQR와 평면 CGHD가 이루는 각의 크기를 θ라 할 때, $\cos\theta$의 값은? (단, $0<\theta<\frac{\pi}{2}$) [3점]



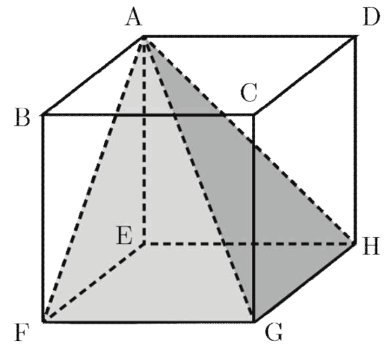
① $\frac{\sqrt{10}}{5}$ ② $\frac{\sqrt{10}}{10}$ ③ $\frac{\sqrt{11}}{11}$

④ $\frac{2\sqrt{11}}{11}$ ⑤ $\frac{3\sqrt{11}}{11}$

S010

(2007-가형6)

정육면체 ABCD-EFGH에서 평면 AFG와 평면 AGH가 이루는 각의 크기를 θ라 할 때, $\cos^2\theta$의 값은? [3점]



① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{5}$ ③ $\frac{1}{4}$

④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

S011

(2009(9)-가형12)

중심이 O이고 반지름의 길이가 1인 구에 내접하는 정사면체 ABCD가 있다. 두 삼각형 BCD, ACD의 무게중심을 각각 F, G라 할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

ㄱ. 직선 AF와 직선 BG는 꼬인 위치에 있다.

ㄴ. 삼각형 ABC의 넓이는 $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ 보다 작다.

ㄷ. $\angle AOG=\theta$일 때, $\cos\theta=\frac{1}{3}$이다.

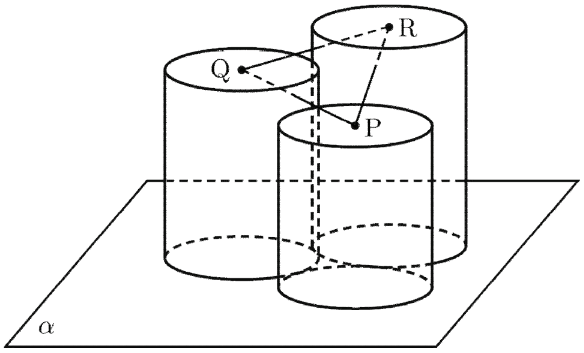
① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ

④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

S012

(2009－가형24)

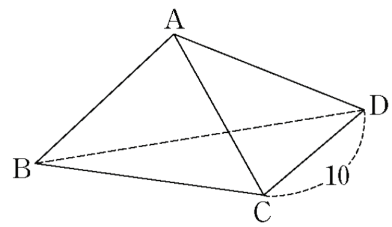
그림과 같이 반지름의 길이가 모두 $\sqrt{3}$이고 높이가 서로 다른 세 원기둥이 서로 외접하며 한 평면 α 위에 놓여 있다. 평면 α와 만나지 않는 세 원기둥의 밑면의 중심을 각각 P, Q, R라 할 때, 삼각형 QPR는 이등변삼각형이고, 평면 QPR와 평면 α가 이루는 각의 크기는 60°이다. 세 원기둥의 높이를 각각 8, a, b라 할 때, $a+b$의 값을 구하시오. (단, $8<a<b$) [4점]



S013

(2010(9)－가형5)

사면체 ABCD에서 모서리 CD의 길이는 10, 면 ACD의 넓이는 40이고, 면 BCD와 면 ACD가 이루는 각의 크기는 30°이다. 점 A에서 평면 BCD에 내린 수선의 발을 H라 할 때, 선분 AH의 길이는? [3점]



① $2\sqrt{3}$　② 4　③ 5
④ $3\sqrt{3}$　⑤ $4\sqrt{3}$

S014

(2010－가형5)

평면 α 위에 $\angle A=90^\circ$이고 $\overline{BC}=6$인 직각이등변삼각형 ABC가 있다. 평면 α 밖의 한 점 P에서 이 평면까지의 거리가 4이고, 점 P에서 평면 α에 내린 수선의 발이 점 A일 때, 점 P에서 직선 BC까지의 거리는? [3점]

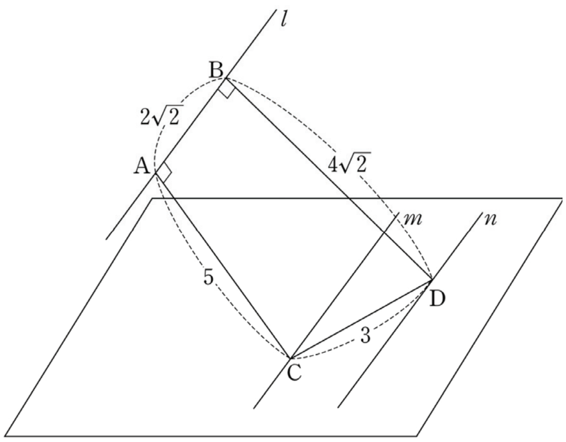
① $3\sqrt{2}$　② 5　③ $3\sqrt{3}$
④ $4\sqrt{2}$　⑤ 6

S015

(2011(9)-가형25)

같은 평면 위에 있지 않고 서로 평행한 세 직선 l, m, n이 있다. 직선 l 위의 두 점 A, B, 직선 m 위의 점 C, 직선 n 위의 점 D가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\overline{AB}=2\sqrt{2}$, $\overline{CD}=3$
(나) $\overline{AC}\perp l$, $\overline{AC}=5$
(다) $\overline{BD}\perp l$, $\overline{BD}=4\sqrt{2}$

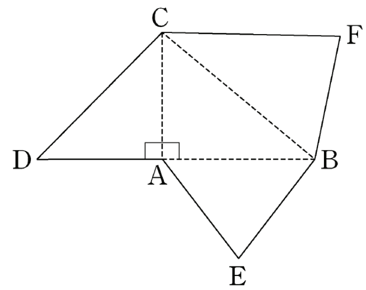


두 직선 m, n을 포함하는 평면과 세 점 A, C, D를 포함하는 평면이 이루는 각의 크기를 θ라 할 때, $15\tan^2\theta$의 값을 구하시오. (단, $0<\theta<\frac{\pi}{2}$) [4점]

S016

(2012(9)-가형15)

그림은 $\overline{AC}=\overline{AE}=\overline{BE}$이고 $\angle DAC=\angle CAB=90^\circ$인 사면체의 전개도이다.



이 전개도로 사면체를 만들 때, 세 점 D, E, F가 합쳐지는 점을 P라 하자. 사면체 PABC에 대하여 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은? [4점]

ㄱ. $\overline{CP}=\sqrt{2}\,\overline{BP}$
ㄴ. 직선 AB와 직선 CP는 꼬인 위치에 있다.
ㄷ. 선분 AB의 중점을 M이라 할 때, 직선 PM과 직선 BC는 서로 수직이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

해설집 목차

단원별 알파벳구성

과목	대단원	알파벳	과목	대단원	알파벳
수학2	집합과 명제	A	확률과 통계	순열과 조합	M
	함수	B		확률	N
	수열	C		통계	P
	지수와 로그	D	기하와 벡터	평면 곡선	Q
미적분1	수열의 극한	E		평면 벡터	R
	함수의 극한과 연속	F		공간 도형	S
	다항함수의 미분법	G		공간 벡터	T
	다항함수의 적분법	H	수학1	다항식	U
미적분2	지수함수와 로그함수	I		방정식과 부등식	V
	삼각함수	J		도형의 방정식	W
	미분법	K	교육과정 外		Z
	적분법	L			

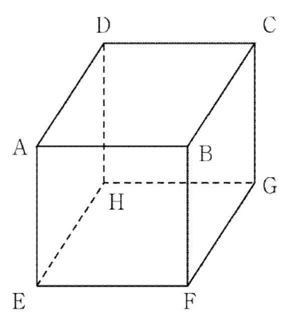
S. 공간도형

1 ⑤	**2** ④	**3** ③	**4** ③	**5** ②
6 20	**7** ①	**8** ⑤	**9** ⑤	**10** ③
11 ④	**12** 25	**13** ②	**14** ②	**15** 30
16 ⑤	**17** 10	**18** ①	**19** 15	**20** 12
21 ①	**22** ③	**23** 34	**24** 15	**25** 27
26 30	**27** ③	**28** ⑤	**29** 45	**30** 32
31 40	**32** 11	**33** 162	**34** ④	**35** ②
36 ④	**37** ②	**38** 11	**39** ①	**40** 13
41 20	**42** ①	**43** 10	**44** ⑤	**45** ③
46 ⑤	**47** ④	**48** ④	**49** ①	**50** ①
51 ④	**52** ③	**53** ②	**54** ②	

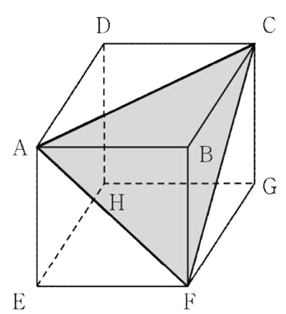
S001 | 답 ⑤

[풀이]

주어진 정육면체의 각 꼭짓점을 아래 그림과 같이 각각 A, B, C, D, E, F, G, H라고 하자.



(1) 삼각형



한 직선 위에 있지 않은 서로 다른 세 점 A, F, C로 한 평면이 결정된다.

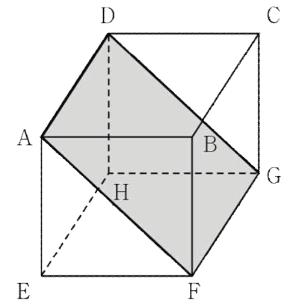
주어진 정육면체의 한 모서리의 길이를 1로 두어도 풀이의 일반성을 잃지 않는다.

피타고라스의 정리에 의하여

$\overline{AF}=\overline{FC}=\overline{CA}=\sqrt{2}$

한 직선 위에 있지 않은 서로 다른 세 점 A, F, C로 결정되는 평면으로 주어진 정육면체를 자른 단면의 모양은 (정)삼각형이다.

(2) 정사각형이 아닌 직사각형



$\overline{AD}/\!/\overline{EH}$이고 $\overline{EH}/\!/\overline{FG}$이므로

$\overline{AD}/\!/\overline{FG}$

네 점 A, F, G, D는 서로 평행한 두 직선 AD, FG로 결정되는 평면 위에 있다.

주어진 정육면체의 한 모서리의 길이를 1로 두어도 풀이의 일반성을 잃지 않는다.

$\overline{AD}\perp$(평면 CDH)이므로

직선과 평면의 수직 관계에 의하여

$\overline{AD}\perp\overline{DG}$

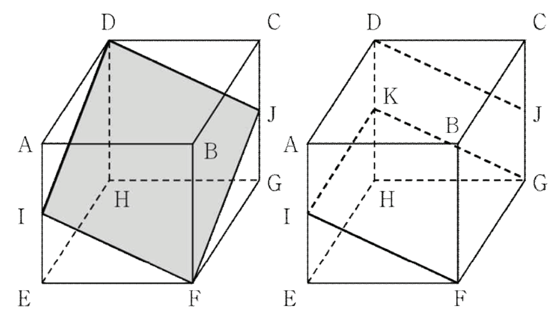
마찬가지의 방법으로

$\overline{AF}\perp\overline{FG}$

그리고 $\overline{AD}=1<\sqrt{2}=\overline{DG}$이므로 서로 평행한 두 직선 AD, FG로 결정되는 평면으로 주어진 정육면체를 자른 단면의 모양은 정사각형이 아닌 직사각형이다.

(3) 정사각형이 아닌 마름모

세 모서리 AE, CG, DH의 중점을 각각 I, J, K라고 하자.



$\overline{DK}=\overline{JG}$이고 $\overline{DK}/\!/\overline{JG}$이므로

$\overline{DJ}/\!/\overline{KG}$ $\cdots$㉠

$\overline{IK}=\overline{EH}=\overline{FG}$이고 $\overline{IK}/\!/\overline{EH}$, $\overline{EH}/\!/\overline{FG}$이므로

$\overline{KG}/\!/\overline{IF}$ $\cdots$㉡

㉠, ㉡에 의하여

$\overline{DJ}/\!/\overline{IF}$

네 점 D, I, F, J는 서로 평행한 두 직선 DJ, IF로 결정되는 평면 위에 있다.

주어진 정육면체의 한 모서리의 길이를 2로 두어도 풀이의 일반성을 잃지 않는다.

피타고라스의 정리에 의하여

$\overline{DI}=\overline{IF}=\overline{FJ}=\overline{JD}=\sqrt{5}$ $\cdots$㉢

$\overline{DF}=2\sqrt{3}$

삼각형 DIF에서

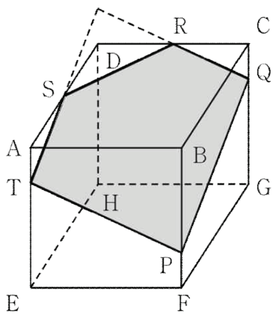
$\overline{DF}^2=12>10=\overline{DI}^2+\overline{IF}^2$이므로

$\angle DIF>90^\circ$ $\cdots$㉣

서로 평행한 두 직선 DJ, IF로 결정되는 평면으로 주어진 정육면체를 자른 단면의 모양은 ㉢, ㉣에 의하여 정사각형이 아닌 마름모이다.

(4) 오각형

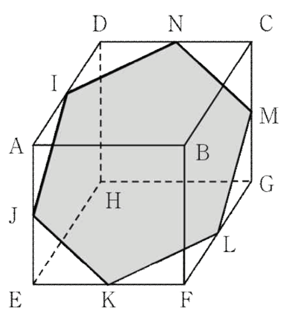
두 모서리 AE, CG의 1:3 내분점을 각각 T, Q, 모서리 BF의 3:1 내분점을 P, 두 모서리 AD, DC의 중점을 각각 S, R이라고 하자.



(3)에서 얻은 마름모를 평면 EFG에 수직인 방향으로 평행이동시키켜서 꼭짓점 F가 점 P에 오게 하자. 이때, (3)의 마름모의 두 꼭짓점 I, J는 각각 점 T, Q에 오며, 모서리 ID는 정육각형의 모서리 AD와 점 S에서 만나고 모서리 DJ는 정육각형의 모서리 DC와 점 R에서 만난다.

다섯 개의 점 P, Q, R, S, T는 한 평면 위에 있으며, 이 순서대로 점들을 모두 연결하면 오각형이 된다.

(5) 육각형



여섯 모서리 DA, AE, EF, FG, GC, CD의 중점을 각각 I, J, K, L, M, N이라고 하자.

$\overline{AI}=\overline{FL}$, $\overline{AI}/\!/\overline{FL}$이므로

$\overline{IL}/\!/\overline{AF}$ $\cdots$㉠

$\overline{EJ}:\overline{EA}=\overline{EK}:\overline{EF}$이므로

$\overline{AF}/\!/\overline{JK}$ $\cdots$㉡

㉠, ㉡에 의하여

$\overline{IL}/\!/\overline{JK}$

네 점 I, J, K, L은 평행한 두 직선 IL, JK에 의하여 결정되는 평면 위에 있다. 이 평면을 α라고 하자.

마찬가지의 방법으로

네 점 J, K, L, M은 평행한 두 직선 JM, KL에 의하여 결정되는 평면 위에 있다. 이 평면을 β라고 하자.

네 점 K, L, M, N은 평행한 두 직선 KN, LM에 의하여 결정되는 평면 위에 있다. 이 평면을 γ라고 하자.

두 평면 α, β는 세 점 J, K, L을 공유하고, 두 평면 β, γ는 세 점 K, L, M을 공유하므로 세 평면 α, β, γ는 같은 평면이다.

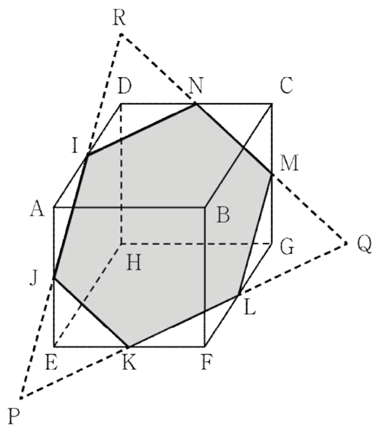
따라서 여섯 개의 점 I, J, K, L, M, N은 한 평면 위에 있다.

주어진 정육면체의 한 모서리의 길이를 2로 두어도 풀이의 일반성을 잃지 않는다.

피타고라스의 정리에 의하여

$\overline{IJ}=\overline{JK}=\overline{KL}=\overline{LM}=\overline{MN}=\overline{NI}=\sqrt{2}$

두 직선 IJ, LK의 교점을 P, 두 직선 KL, NM의 교점을 Q, 두 직선 MN, JI의 교점을 R이라고 하자.



$\overline{IJ}/\!/\overline{DE}$, $\overline{JK}/\!/\overline{AF}/\!/\overline{DG}$이므로

$\angle PJK=\angle EDG=60^\circ$

$\angle IJK=120^\circ$

마찬가지의 방법으로 육각형 IJKLMN의 내각의 크기는 모두 120°이다.

서로 평행한 두 직선 IJ, ML로 결정되는 평면으로 주어진 정육면체를 자른 단면의 모양은 (정)육각형이다.

답 ⑤

S002 | 답 ④

[풀이]

문제에서 주어진 구의 중심을 O, 두 평면을 각각 α, β,

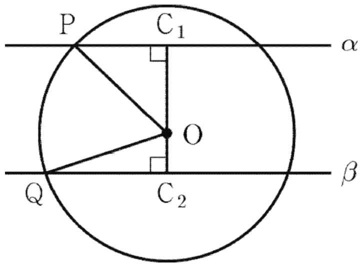
점 O에서 두 평면 α, β에 내린 수선의 발을 각각 C_1, C_2라고 하자.

$\overline{OC_1}\perp\alpha$, $\overline{OC_2}\perp\beta$, $\alpha/\!/\beta$

이므로 세 점 C_1, O, C_2는 한 직선 위에 있다.

구 O와 두 평면 α, β가 만나서 생기는 원 위의 임의의 점을

각각 P, Q라고 하자.



$\overline{OC_1}=x(0<x<1)$로 두면

$\overline{OC_2}=1-x$

직각삼각형 OC_1P에서 피타고라스의 정리에 의하여

$\overline{C_1P}=\sqrt{\overline{OP}^2-\overline{OC_1}^2}=\sqrt{1-x^2}$

마찬가지의 방법으로

$\overline{C_2Q}=\sqrt{2x-x^2}$

두 단면의 넓이의 합을 S라고 하면

$S=\pi\overline{C_1P}^2+\pi\overline{C_2Q}^2$

$=\pi(1-x^2)+\pi(2x-x^2)$

$=-2\pi\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{2}\pi\le\frac{3}{2}\pi$

(단, 등호는 $x=\frac{1}{2}$일 때 성립한다.)

답 ④

S003 | 답 ③

[풀이]

ㄱ. (꼬인 위치)

사면체의 정의에 의하여 두 평면 ACD, BCD는 서로 평행하지 않다. 이때, 두 평면 ACD, BCD의 교선은 CD이다.

삼각형의 무게중심의 정의에 의하여 점 Q는 모서리 CD 위의 점이 아니다.

따라서 점 Q는 평면 BCD 위에 있지 않다.

직선 CD는 평면 BCD에 포함되지만 직선 BQ는 평면 BCD에 포함되지 않는다.

따라서 두 직선 CD, BQ는 서로 꼬인 위치에 있다.

ㄴ. (꼬인 위치)

사면체의 정의에 의하여 두 평면 ABC, DBC는 서로 평행하지 않다. 이때, 두 평면 ABC, DBC의 교선은 BC이다.

삼각형의 정의에 의하여 꼭짓점 A는 모서리 BC 위의 점이 아니다.

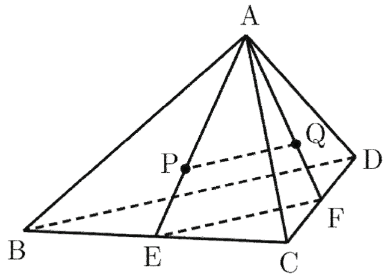
따라서 점 A는 평면 DBC 위에 있지 않다.

직선 BC는 평면 DBC에 포함되지만 직선 AD는 평면 DBC에 포함되지 않는다.

따라서 두 직선 AD, BC는 서로 꼬인 위치에 있다.

ㄷ. (평행)

직선 AP가 선분 BC와 만나는 점을 E, 직선 AQ가 선분 CD와 만나는 점을 F라고 하자.



점 P가 삼각형 ABC의 무게중심이므로 점 E는 선분 BC의 중점이다. 그리고 점 Q가 삼각형 ACD의 무게중심이므로 점 F는 선분 CD의 중점이다.

삼각형 BCD에서

$\overline{CB}:\overline{CE}=\overline{CD}:\overline{CF}$

이므로 두 직선 EF, BD는 서로 평행하다.

삼각형 AEF에서

$\overline{AE}:\overline{AP}=\overline{AF}:\overline{AQ}$

이므로 두 직선 PQ, EF는 서로 평행하다.

따라서 두 직선 PQ, BD는 서로 평행하다.

답 ③

S004 | 답 ③

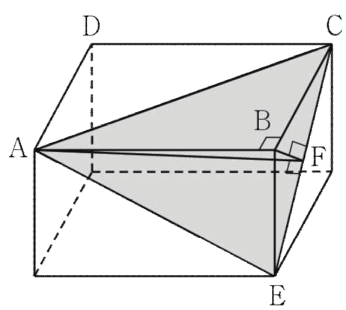
[풀이1]

직육면체의 정의에 의하여

$\overline{AB}\perp\overline{BE}$, $\overline{AB}\perp\overline{BC}$

직선과 평면의 수직에 대한 정의에 의하여

$\overline{AB}\perp$(평면 CBE)



선분 CE의 중점을 F라고 하면

마름모의 성질에 의하여

$\overline{BF}\perp\overline{CE}$

삼수선의 정리에 의하여

$\overline{AF}\perp\overline{CE}$

직각삼각형 ABC에서 피타고라스의 정리에 의하여

$\overline{AC}=\sqrt{\overline{AB}^2+\overline{BC}^2}=\sqrt{5}$

직각삼각형 AEB, CBE에서 피타고라스의 정리에 의하여

$\overline{AE}=\sqrt{5}$, $\overline{CE}=\sqrt{2}$

$\triangle$AEC는 $\overline{AC}=\overline{AE}$인 이등변삼각형이다.

직각삼각형 CAF에서 피타고라스의 정리에 의하여

$\overline{AF}=\sqrt{\overline{AC}^2-\overline{CF}^2}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$

삼각형의 넓이를 구하는 공식에 의하여

$\therefore$ (△AEC의 넓이)$=\frac{1}{2}\times\overline{CE}\times\overline{AF}$

$=\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times\frac{3\sqrt{2}}{2}=\frac{3}{2}$

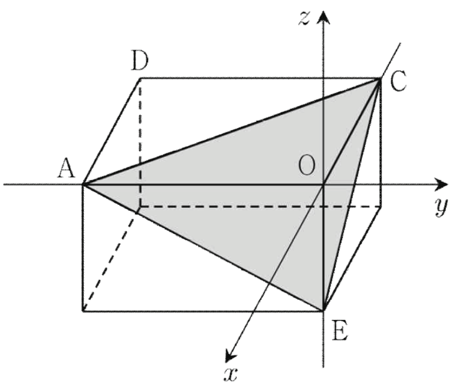
답 ③

[풀이2] +기하와 벡터(평면의 방정식)

네 점 B, A, E, C의 좌표가 각각

B$(0,\ 0,\ 0)$, A$(0,\ -2,\ 0)$, E$(0,\ 0,\ -1)$,

C$(-1,\ 0,\ 0)$이 되도록 좌표공간을 도입하자.



평면 AEC의 방정식을

$ax+by+cz+d=0$ …㉠

이 방정식에 세 점 A, E, C의 좌표를 대입하면

$-2b+d=0,\ -c+d=0,\ -a+d=0$

$a,\ b,\ c$를 d로 나타내면

$b=\frac{d}{2},\ c=d,\ a=d$ …㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$dx+\frac{d}{2}y+dz+d=0$

$d\neq 0$이므로 평면 AEC의 방정식은

$2x+y+2z+2=0$

원점과 평면 AEC 사이의 거리를 h라고 하자.

점과 평면 사이의 거리 공식에 의하여

$h=\frac{|2\times 0+0+2\times 0+2|}{\sqrt{2^1+1^2+2^2}}=\frac{2}{3}$

사면체 OAEC의 부피를 V라고 하자.

$V=\frac{1}{3}\times$(△AEC의 넓이)$\times h$

$=\frac{1}{3}\times$(△OEC의 넓이)$\times\overline{AO}$

풀면

$\therefore$ (△AEC의 넓이)$=\frac{3}{2}$

답 ③

[참고] +기하와 벡터(벡터의 내적)

벡터의 내적을 이용하여 평면 AEC의 법선벡터를 구할 수 도 있다.

평면 AEC는 x축에 평행하지 않으므로 평면 AEC의 법선벡터의 x성분은 0이 아니다.

평면 AEC의 법선벡터를

$\vec{n}=(1,\ a,\ b)$

성분으로 주어진 벡터의 내적을 하면

$\overrightarrow{AC}\cdot\vec{n}$

$=(-1,\ 2,\ 0)\cdot(1,\ a,\ b)=-1+2a=0$

$\overrightarrow{AE}\cdot\vec{n}$

$=(0,\ 2,\ -1)\cdot(1,\ a,\ b)=2a-b=0$

$a,\ b$에 대한 연립방정식을 풀면

$a=\frac{1}{2},\ b=1$

$\vec{n}=\left(1,\ \frac{1}{2},\ 1\right)$

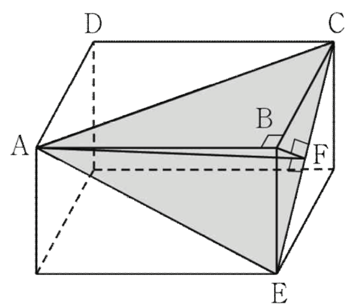
[풀이3] +기하와 벡터(정사영)

직육면체의 정의에 의하여

$\overline{AB}\perp\overline{BE},\ \overline{AB}\perp\overline{BC}$

직선과 평면의 수직에 대한 정의에 의하여

$\overline{AB}\perp$(평면 CBE)



선분 CE의 중점을 F라고 하면

마름모의 성질에 의하여

$\overline{BF}\perp\overline{CE}$

삼수선의 정리에 의하여

$\overline{AF}\perp\overline{CE}$

두 평면 AEC, CBE가 이루는 예각의 크기를 θ라고 하자.

이면각의 정의에 의하여

$\angle AFB=\theta$

직각삼각형 AFB에서 피타고라스의 정리에 의하여

$\overline{AF}=\sqrt{\overline{AB}^2+\overline{BF}^2}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$

직각삼각형 AFB에서 삼각비의 정의에 의하여

$\cos(\angle AFB)=\frac{1}{3}$

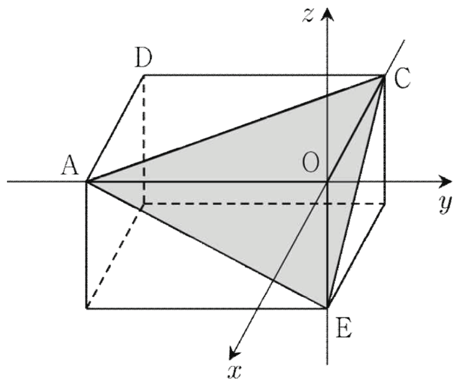
정사영의 넓이에 대한 공식에 의하여

(△CBE의 넓이)=(△AEC의 넓이)×$\cos\theta$
대입하면

(△AEC의 넓이)$=\frac{3}{2}$

답 ③

[풀이4] +기하와 벡터(평면의 방정식)
네 점 B, A, E, C의 좌표가 각각
B(0, 0, 0), A(0, −2, 0), E(0, 0, −1),
C(−1, 0, 0)이 되도록 좌표공간을 도입하자.



평면 AEC의 방정식은
$2x+y+2z+2=0$
평면 AEC의 법선벡터를
$\overrightarrow{n_1}=(2,\ 1,\ 2)$
xy평면의 법선벡터를
$\overrightarrow{n_2}=(0,\ 0,\ 1)$
두 평면 AEC, AOC가 이루는 예각의 크기를 θ라고 하면

$$\cos\theta=\frac{\left|\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}\right|}{\left|\overrightarrow{n_1}\right|\left|\overrightarrow{n_2}\right|}=\frac{2}{3}$$

삼각형 AEC의 xy평면 위로의 정사영은 삼각형 AOC이므로
정사영의 넓이에 대한 공식에 의하여
(△AOC의 넓이)=(△AEC의 넓이)×$\cos\theta$

∴ (△AEC의 넓이)$=\frac{3}{2}$

답 ③

S005 | 답 ②

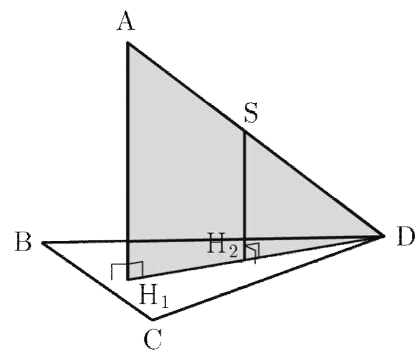
[풀이]
삼각형 BCD의 넓이를 S라고 하자.
서로 닮음인 두 삼각형 BCD, QRP의 닮음비가 2 : 1이므로
(△BCD의 넓이):(△QRP의 넓이)=4 : 1

(△QRP의 넓이)$=\frac{1}{4}S$

마찬가지의 방법으로

(△RQD의 넓이)$=\frac{1}{4}S$

점 A에서 평면 BCD에 내린 수선의 발을 H_1이라고 하자.
네 점 A, S, D, H_1은 한 점에서 만나는 두 직선 AH_1, AD로 결정되는 평면 위에 있다.
$AH_1\perp$(평면 BCD)
이므로
(평면 AH_1D)$\perp$(평면 BCD)
점 S에서 직선 DH_1에 내린 수선의 발을 H_2라고 하면
$SH_2\perp$(평면 BCD)
즉, 점 H_2는 점 S에서 평면 BCD에 내린 수선의 발과 일치한다.



서로 닮은 두 직각삼각형 AH_1D, SH_2D에서
$\overline{AD}:\overline{SD}=2:1=\overline{AH_1}:\overline{SH_2}$
두 사면체 APQR, SQDR의 부피를 각각 V_1, V_2라고 하면

$$V_1=\frac{1}{3}\times(\triangle QRP\text{의 넓이})\times\overline{AH_1}=\frac{Sh}{12}$$

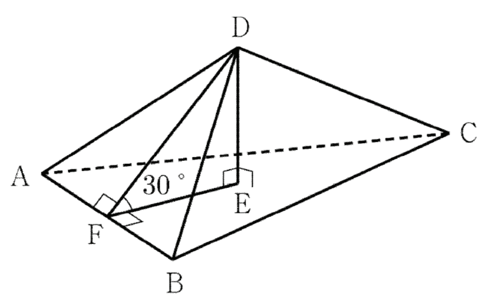
$$V_2=\frac{1}{3}\times(\triangle RQD\text{의 넓이})\times\overline{SH_2}=\frac{Sh}{24}$$

∴ $V_1:V_2=2:1$

답 ②

S006 | 답 20

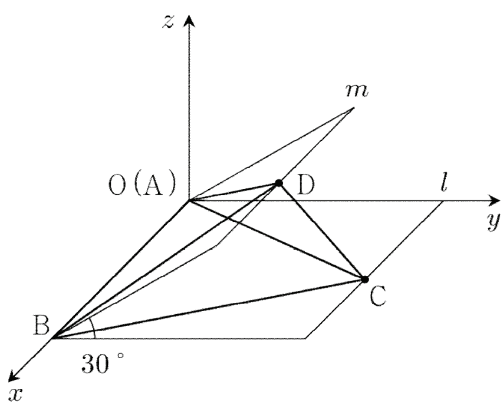
[풀이]
점 D에서 평면 ABC에 내린 수선의 발을 E, 점 E에서 직선 AB에 내린 수선의 발을 F라고 하자.



$\overline{DE}\perp$(평면 ABC), $\overline{EF}\perp\overline{AB}$
삼수선의 정리에 의하여

$\overline{DF} \perp \overline{AB}$
삼각형의 넓이를 구하는 공식에 의하여
$(\triangle ABD$의 넓이$) = \frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{DF} = 15$ 풀면 $\overline{DF} = 6$
직각삼각형 DFE에서 삼각비의 정의에 의하여
$\overline{DE} = \overline{FD}\sin 30^\circ = 3$
각뿔의 부피를 구하는 공식에 의하여
$\therefore$ (사면체 ABCD의 부피)
$= \frac{1}{3} \times (\triangle ABC$의 넓이$) \times \overline{DE}$
$= \frac{1}{3} \times 20 \times 3 = 20$
답 20

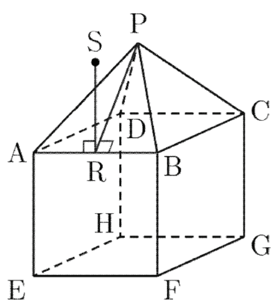
[참고] +기하와 벡터(평면의 방정식)
사면체 ABCD의 각 꼭짓점이
$A(0,\ 0,\ 0)$, $B(5,\ 0,\ 0)$,
$C(c,\ 8,\ 0)$, $D(d,\ 3\sqrt{3},\ 3)$
가 되도록 좌표공간을 도입할 수 있다.



점 C의 자취를 직선 l이라고 하면
l: $y = 8$, $z = 0$
점 D의 자취를 직선 m이라고 하면
m: $y = 3\sqrt{3}$, $z = 3$

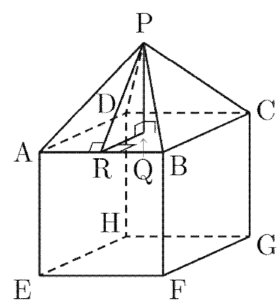
S007 | 답 ①

[풀이1]
점 P에서 직선 AB와 평면 AEFB에 내린 수선의 발을 각각 R, S라고 하자.



$\overline{PS} \perp$(평면 AEFB), $\overline{PR} \perp \overline{AB}$
이므로 삼수선의 정리에 의하여
$\overline{AB} \perp \overline{RS}$
두 평면 PAB, AEFB의 교선이 AB이고,
두 선분 PR, RS가 각각 선분 AB에 수직이므로
이면각의 정의에 의하여
$\angle PRS = \pi - \theta$
정삼각형 PAB의 한 변의 길이가 2이므로
$\overline{PR} = \sqrt{3}$
$\overline{PS} =$(점 P에서 평면 AEFB에 이르는 거리)
$= \frac{1}{2}\overline{BC} = 1$
직각삼각형 PRS에서 삼각비의 정의에 의하여
$\sin(\pi - \theta) = \frac{\overline{PS}}{\overline{RP}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ 즉, $\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{3}$
주어진 조건에서 $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$이므로
$\therefore\ \cos\theta = -\frac{\sqrt{6}}{3}$
답 ①

[풀이2]
점 P에서 평면 ABCD와 직선 AB에 내린 수선의 발을 각각 Q, R이라고 하자.



$\overline{PQ} \perp$(평면ABCD), $\overline{PR} \perp \overline{AB}$
이므로 삼수선의 정리에 의하여
$\overline{AB} \perp \overline{QR}$
두 평면 PAB, AEFB의 교선이 AB이고,
두 선분 PR, RQ가 각각 선분 AB에 수직이므로
이면각의 정의에 의하여
$\angle PRQ = \theta - \frac{\pi}{2}$
정삼각형 PAB의 한 변의 길이가 2이므로
$\overline{PR} = \sqrt{3}$
점 Q는 정사각형 ABCD의 두 대각선의 교점이므로
$\overline{RQ} = \frac{1}{2}\overline{BC} = 1$
직각삼각형 PRQ에서 삼각비의 정의에 의하여

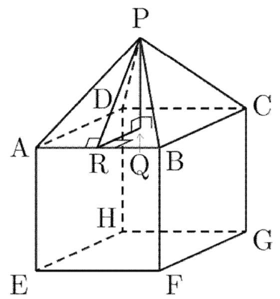
$\cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\overline{RQ}}{\overline{PR}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ 즉, $\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$이므로

$\therefore\ \cos\theta = -\frac{\sqrt{6}}{3}$

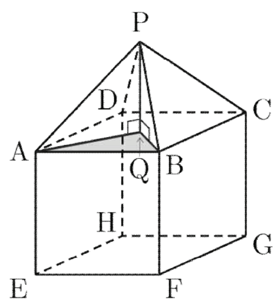
답 ①

[풀이3] +기하와 벡터(정사영)
점 P에서 평면 ABCD와 직선 AB에 내린 수선의 발을 각각 Q, R이라고 하자.



$\overline{PQ} \perp$(평면ABCD), $\overline{PR} \perp \overline{AB}$
이므로 삼수선의 정리에 의하여
$\overline{AB} \perp \overline{QR}$
두 평면 PAB, AEFB의 교선이 AB이고,
두 선분 PR, RQ가 각각 선분 AB에 수직이므로
이면각의 정의에 의하여

$\angle PRQ = \theta - \frac{\pi}{2}$



두 삼각형 PAB, QAB의 넓이를 각각 S, T라고 하자.
정삼각형의 넓이를 구하는 공식에 의하여

$S = \frac{\sqrt{3}}{4} \times 2^2 = \sqrt{3}$

점 Q는 정사각형 ABCD의 두 대각선의 교점이므로
점 Q에서 직선 AB에 이르는 거리는 $1\left(= \frac{1}{2}\overline{BC}\right)$이다.
삼각형의 넓이를 구하는 공식에 의하여

$T = \frac{1}{2} \times 2 \times 1 = 1$

정사영의 넓이에 대한 공식에 의하여

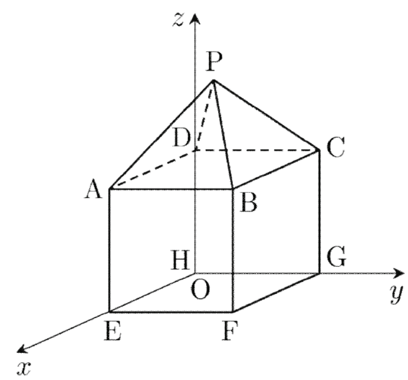
$\cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{T}{S} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ 즉, $\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$이므로

$\therefore\ \cos\theta = -\frac{\sqrt{6}}{3}$

답 ①

[풀이4] +기하와 벡터(평면의 방정식)
네 점 H, E, G, D의 좌표가 각각
H$(0,\ 0,\ 0)$, E$(2,\ 0,\ 0)$,
G$(0,\ 2,\ 0)$, D$(0,\ 0,\ 2)$
가 되도록 좌표공간을 도입하면
두 점 A, P의 좌표는 각각
A$(2,\ 0,\ 2)$, P$(1,\ 1,\ 2+\sqrt{2})$



평면 PAB는 y축에 평행하므로 평면 PAB의 법선벡터의 y성분은 0이다. 그리고 평면 PAB는 x축에 평행하지 않으므로 평면 PAB의 법선벡터의 x성분은 0이 아니다.
평면 PAB의 법선벡터를
$\overrightarrow{n_1} = (1,\ 0,\ c)$
성분으로 주어진 벡터의 내적을 하면
$\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{n_1} = (-1,\ 1,\ \sqrt{2}) \cdot (1,\ 0,\ c)$

$= -1 + \sqrt{2}c = 0$에서 $c = \frac{\sqrt{2}}{2}$

평면 PAB의 법선벡터는

$\overrightarrow{n_1} = \left(1,\ 0,\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

평면 AEFB의 법선벡터를
$\overrightarrow{n_2} = (1,\ 0,\ 0)$
두 평면 PAB, AEFB가 이루는 예각의 크기는 $\pi - \theta$이므로
두 평면이 이루는 각의 크기를 구하는 공식에 의하여

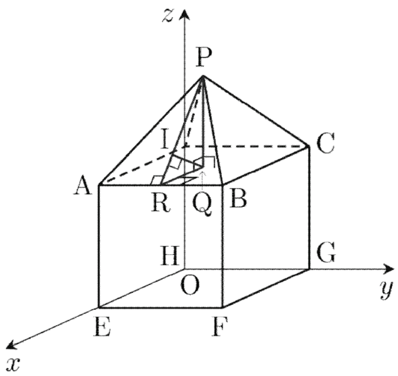
$\cos(\pi - \theta) = \frac{\left|\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2}\right|}{\left|\overrightarrow{n_1}\right|\left|\overrightarrow{n_2}\right|} = \frac{\sqrt{6}}{3}$

$\therefore\ \cos\theta = -\frac{\sqrt{6}}{3}$

답 ①

[참고] +기하와 벡터(평면의 방정식)

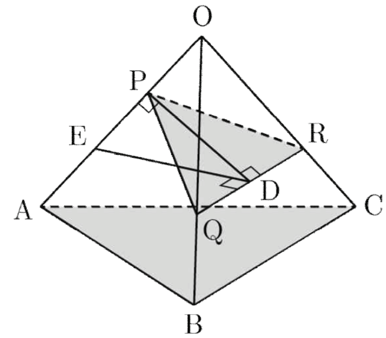
평면 PAB의 법선벡터를 단면관찰을 통하여 구할 수도 있다.
점 P에서 평면 ABCD와 직선 AB에 내린 수선의 발을 각각 Q, R이라고 하자.



$\overline{PQ} \perp$(평면ABCD), $\overline{PR} \perp \overline{AB}$
이므로 삼수선의 정리에 의하여
$\overline{AB} \perp \overline{QR}$
점 Q에서 직선 PR에 내린 수선의 발을 I라고 하자.
$\overline{QR} \perp \overline{AB}$, $\overline{IR} \perp \overline{AB}$, $\overline{QI} \perp \overline{IR}$
이므로 삼수선의 정리에 의하여
$\overline{QI} \perp$(평면 PAB)
$\overrightarrow{QI}$는 평면 PAB의 법선벡터이다.
서로 닮은 두 직각삼각형 RQI, RPQ에 대하여
$\cos(\angle RQI) = \cos(\angle RPQ) = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$
$\angle RQI$는 직선 QI가 xy평면과 이루는 각이므로
두 벡터 $\overrightarrow{QI}$, $(1,\ 0,\ \tan(\angle RQI))$는 서로 평행하다.
$\tan(\angle RQI) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$이므로
$\left(1,\ 0,\ \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$는 평면 PAB의 법선벡터이다.

S008 | 답 ⑤

[풀이1]
정사면체 OABC의 한 모서리의 길이를 3으로 두어도 풀이의 일반성을 잃지 않는다.
주어진 조건에서
$\overline{OP} = 1$, $\overline{OQ} = 2$, $\angle QOP = 60^\circ$
이므로 $\triangle OPQ$는 $\angle OPQ = 90^\circ$인 직각삼각형이다.
마찬가지의 방법으로
$\triangle OPR$은 $\angle OPR = 90^\circ$인 직각삼각형이다.
$\overline{OP} \perp \overline{PQ}$, $\overline{OP} \perp \overline{PR}$
이므로 직선과 평면의 수직에 대한 정의에 의하여
$\overline{OP} \perp$(평면 PQR)
선분 AP의 중점을 E, 이등변삼각형 PQR에서 $\angle P$의 이등분선과 변 QR의 교점을 D라고 하자. 이등변삼각형의 성질에 의하여 선분 PD는 선분 QR을 수직이등분한다. 이때, 점 D는 이등변삼각형 EQR에서 $\angle E$의 이등분선과 변 QR의 교점이기도 하다.

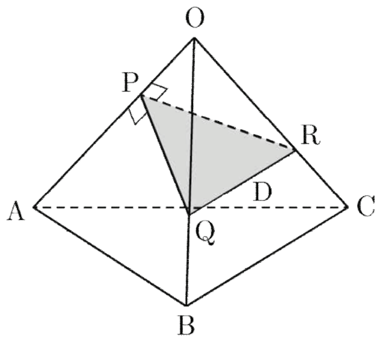


서로 닮은 두 삼각형 OAB, OEQ에 대하여
$\overline{OA} : \overline{OE} = \overline{OB} : \overline{OQ}$이므로 $\overline{EQ} // \overline{AB}$
직선 AB를 포함하고 직선 EQ를 포함하지 않는
평면 ABC에 대하여 $\overline{EQ} // \overline{AB}$이므로
(평면 ABC)$//\overline{EQ}$ …㉠
마찬가지의 방법으로
(평면 ABC)$//\overline{ER}$ …㉡
㉠, ㉡에 의하여
(평면 ABC)//(평면 EQR)
두 평면 PQR과 EQR이 이루는 각의 크기는 θ이다.
$\overline{EP} \perp$(평면 PQR), $\overline{PD} \perp \overline{QR}$이므로
삼수선의 정리에 의하여
$\overline{ED} \perp \overline{QR}$
두 평면 PQR과 EQR의 교선은 QR이고
$\overline{PD} \perp \overline{QR}$, $\overline{ED} \perp \overline{QR}$
이므로 이면각의 정의에 의하여
$\angle EDP = \theta$
직각삼각형 PQD에서 피타고라스의 정리에 의하여
$\overline{PD} = \sqrt{\overline{PQ}^2 - \overline{QD}^2} = \sqrt{(\sqrt{3})^2 - 1^2} = \sqrt{2}$
직각삼각형 EDP에서 피타고라스의 정리에 의하여
$\overline{ED} = \sqrt{\overline{DP}^2 + \overline{PE}^2} = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + 1^2} = \sqrt{3}$
직각삼각형 EDP에서 삼각비의 정의에 의하여
$\cos\theta = \dfrac{\overline{DP}}{\overline{ED}} = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$
답 ⑤

[풀이2]
정사면체 OABC의 한 모서리의 길이를 3으로 두어도 풀이의 일반성을 잃지 않는다.
주어진 조건에서
$\overline{OP} = 1$, $\overline{OQ} = 2$, $\angle QOP = 60^\circ$
이므로 $\triangle OPQ$는 $\angle OPQ = 90^\circ$인 직각삼각형이다.
마찬가지의 방법으로

$\triangle OPR$은 $\angle OPR=90^\circ$인 직각삼각형이다.

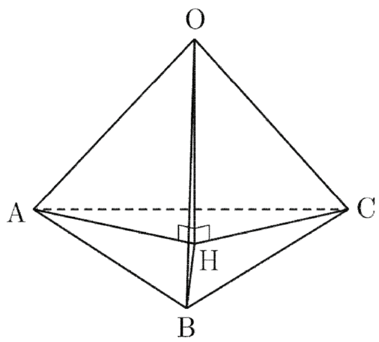
$\overline{OP}\perp\overline{PQ}$, $\overline{OP}\perp\overline{PR}$



직선과 평면의 수직에 대한 정의에 의하여

$\overline{OP}\perp$(평면 PQR)

점 O에서 평면 ABC에 내린 수선의 발을 H라고 하자.



직선과 평면의 수직에 대한 정의에 의하여

$\overline{OH}\perp\overline{HA}$, $\overline{OH}\perp\overline{HB}$, $\overline{OH}\perp\overline{HC}$

세 직각삼각형 OHA, OHB, OHC에서 피타고라스의 정리에 의하여

$\overline{OA}^2=\overline{OH}^2+\overline{HA}^2$

$\overline{OB}^2=\overline{OH}^2+\overline{HB}^2$

$\overline{OC}^2=\overline{OH}^2+\overline{HC}^2$

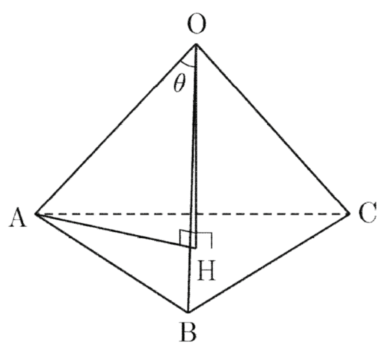
정사면체의 정의에 의하여

$\overline{OA}=\overline{OB}=\overline{OC}$

이므로

$\overline{HA}=\overline{HB}=\overline{HC}$

정삼각형 ABC에서 점 H는 외심이다. 그런데 정삼각형에서는 외심과 무게중심이 일치하므로 점 H는 삼각형 ABC의 무게중심이다.



$\overline{OA}\perp$(평면 PQR), $\overline{OH}\perp$(평면 ABC)

이므로

$\angle AOH=\theta$

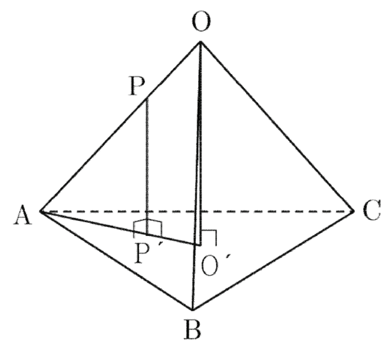
직각삼각형 AOH에서 삼각비의 정의에 의하여

$\cos\theta=\dfrac{\overline{OH}}{\overline{AO}}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

답 ⑤

[풀이3] +기하와 벡터(정사영)

점 O에서 평면 ABC에 내린 수선의 발을 O′이라고 하자. 이때, 점 O′은 삼각형 ABC의 무게중심이다. 그리고 점 P에서 선분 AO′에 내린 수선의 발을 P′이라고 하자.



$\overline{OO'}\perp$(평면 ABC)이므로

직선 OO′을 포함하는 평면 OAO′에 대하여

(평면 OAO')$\perp$(평면 ABC)

두 평면 OAO′과 ABC가 서로 수직이므로

$\overline{PP'}\perp$(평면 ABC)

점 P에서 평면 ABC에 내린 수선의 발은 P′이다.

서로 닮은 두 직각삼각형 OAO′과 PAP′에 대하여

$\overline{AP}:\overline{PO}=\overline{AP'}:\overline{P'O'}$이므로 $\overline{AP'}:\overline{P'O'}=2:1$

두 점 Q, R에서 평면 ABC에 내린 수선의 발을 각각 Q′, R′이라고 하면

마찬가지의 방법으로

$\overline{BQ'}:\overline{Q'O'}=1:2$, $\overline{CR'}:\overline{R'O'}=1:2$

정사면체 OABC의 한 모서리의 길이를 3으로 두어도 풀이의 일반성을 잃지 않는다.

두 삼각형 PQR, P′Q′R′의 넓이를 각각 S, T라고 하자.

우선 삼각형 PQR의 넓이를 구하자.

주어진 조건에서

$\overline{OP}=1$, $\overline{OQ}=2$, $\angle QOP=60^\circ$

이므로 $\triangle OPQ$는 $\angle OPQ=90^\circ$인 직각삼각형이다.

마찬가지의 방법으로

$\triangle OPR$은 $\angle OPR=90^\circ$인 직각삼각형이다.

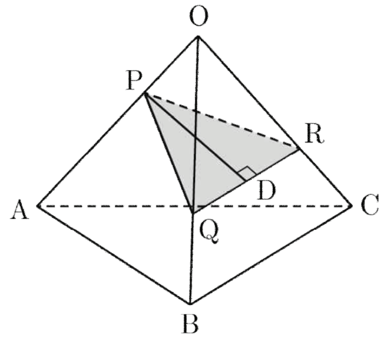
서로 합동인 두 직각삼각형 OPQ, OPR에서

특수각의 삼각비에 의하여

$\overline{PQ}=\sqrt{3}$, $\overline{PR}=\sqrt{3}$

이등변삼각형 PQR에서 $\angle P$의 이등분선과 변 QR의 교점을 D라고 하자.

이등변삼각형의 성질에 의하여 선분 PD는 선분 QR을 수직이등분한다.



서로 닮은 두 삼각형 OBC, OQR에 대하여

$\overline{\mathrm{OB}}:\overline{\mathrm{BC}}=\overline{\mathrm{OQ}}:\overline{\mathrm{QR}}$이므로 $\overline{\mathrm{QR}}=2$

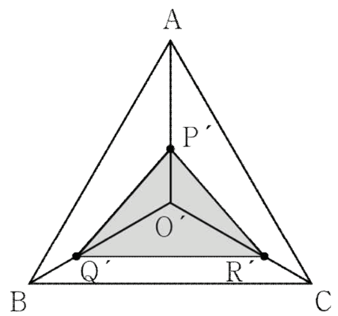
직각삼각형 PQD에서 피타고라스의 정리에 의하여

$\overline{\mathrm{PD}}=\sqrt{\overline{\mathrm{PQ}}^2-\overline{\mathrm{QD}}^2}=\sqrt{(\sqrt{3})^2-1^2}=\sqrt{2}$

삼각형의 넓이를 구하는 공식에 의하여

$S=\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{PD}}\times\overline{\mathrm{QR}}=\sqrt{2}$

이제 삼각형 P′Q′R′의 넓이를 구하자.



서로 닮음인 두 삼각형 O′BC, O′Q′R′에 대하여

$\overline{\mathrm{O'Q'}}:\overline{\mathrm{O'B}}=\overline{\mathrm{Q'R'}}:\overline{\mathrm{BC}}$이므로 $\overline{\mathrm{Q'R'}}=2$

(점 P′과 직선 Q′R′ 사이의 거리)

$=\overline{\mathrm{P'O'}}+$(점 O′과 직선 Q′R′ 사이의 거리)

$=\dfrac{1}{3}\overline{\mathrm{AO'}}+\dfrac{2}{3}\times$(점 O′과 직선 BC 사이의 거리)

$=\dfrac{1}{3}\times\sqrt{3}+\dfrac{2}{3}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

삼각형의 넓이를 구하는 공식에 의하여

$T=\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{Q'R'}}\times$(점 P′과 직선 Q′R′ 사이의 거리)

$=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

정사영의 넓이에 대한 공식에 의하여

$\cos\theta=\dfrac{T}{S}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

혹은 다음과 같이 $\cos\theta$의 값을 구할 수도 있다.

점 P′에서 직선 Q′R′에 내린 수선의 발을 H라고 하면

정사영의 길이에 대한 공식에 의하여

$\cos\theta=\dfrac{\overline{\mathrm{HP'}}}{\overline{\mathrm{PD}}}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

답 ⑤

[풀이4] +기하와 벡터(평면의 방정식)

주어진 정사면체 OABC의 꼭짓점 O를 D라고 하자.

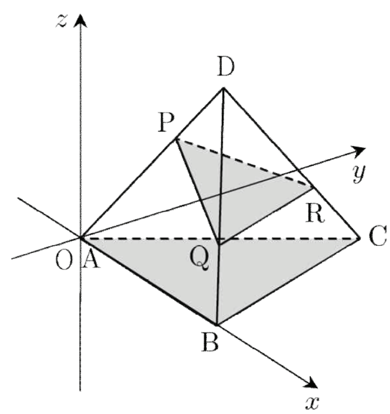
정사면체 DABC의 한 모서리의 길이를 2로 두어도 풀이의 일반성을 잃지 않는다.

네 점 A, B, C, D의 좌표가 각각

A(0, 0, 0), B(2, 0, 0), C$(1,\ \sqrt{3},\ 0)$

D$\left(1,\ \dfrac{\sqrt{3}}{3},\ \dfrac{2\sqrt{6}}{3}\right)$

이 되도록 좌표공간을 도입하자.



점 P는 선분 DA의 1:2 내분점이므로

내분점의 공식에 의하여

P$\left(\dfrac{2}{3},\ \dfrac{2\sqrt{3}}{9},\ \dfrac{4\sqrt{6}}{9}\right)$

점 Q는 선분 DB의 2:1내분점이므로

내분점의 공식에 의하여

Q$\left(\dfrac{5}{3},\ \dfrac{\sqrt{3}}{9},\ \dfrac{2\sqrt{6}}{9}\right)$

점 R은 선분 DC의 2:1내분점이므로

내분점의 공식에 의하여

R$\left(1,\ \dfrac{7\sqrt{3}}{9},\ \dfrac{2\sqrt{6}}{9}\right)$

평면 PQR은 z축에 평행하지 않으므로 평면 PQR의 법선벡터의 z성분은 0이 아니다.

평면 PQR의 법선벡터를

$\overrightarrow{n_1}=(a,\ b,\ 1)$

성분으로 주어진 벡터의 내적을 하면

$\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$

$=(a,\ b,\ 1)\cdot\left(1,\ -\dfrac{\sqrt{3}}{9},\ -\dfrac{2\sqrt{6}}{9}\right)$

$=a-\dfrac{\sqrt{3}}{9}b-\dfrac{2\sqrt{6}}{9}=0$ $\cdots$㉠

$\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PR}}$

$=(a,\ b,\ 1)\cdot\left(\frac{1}{3},\ \frac{5\sqrt{3}}{9},\ -\frac{2\sqrt{6}}{9}\right)$

$=\frac{a}{3}+\frac{5\sqrt{3}}{9}b-\frac{2\sqrt{6}}{9}=0$ $\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하면

$a=\frac{\sqrt{6}}{4},\ b=\frac{\sqrt{2}}{4}$

평면 PQR의 법선벡터는

$\overrightarrow{n_1}=\left(\frac{\sqrt{6}}{4},\ \frac{\sqrt{2}}{4},\ 1\right)$

평면 ABC(xy평면)의 법선벡터를

$\overrightarrow{n_2}=(0,\ 0,\ 1)$

두 평면이 이루는 각의 크기를 구하는 공식에 의하여

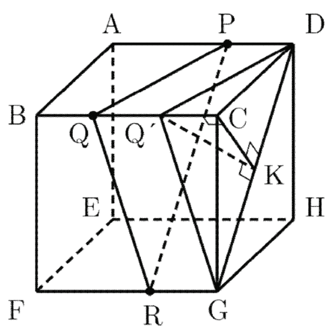
$\cos\theta=\frac{|\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}|}{|\overrightarrow{n_1}||\overrightarrow{n_2}|}=\frac{\sqrt{6}}{3}$

답 ⑤

S009 | 답 ⑤

[풀이1]

두 직선 PQ, DQ′이 서로 평행하도록 모서리 BC 위에 점 Q′을 잡자. 이때, 두 직선 QR, Q′G도 서로 평행하다.



정육면체의 정의에 의하여

직선 BC가 평면 CGHD에 수직이므로

$\overline{\mathrm{Q'C}}\perp\mathrm{CGHD}$

점 C에서 선분 GD에 내린 수선의 발을 K라고 하면

$\overline{\mathrm{CK}}\perp\overline{\mathrm{GD}}$

삼수선의 정리에 의하여

$\overline{\mathrm{Q'K}}\perp\overline{\mathrm{GD}}$

두 평면 PQR, DQ′G는 서로 평행하므로

두 평면 DQ′G, CGHD가 이루는 각의 크기는 θ이다.

두 평면 DQ′G, CGHD의 교선은 GD이고

두 선분 CK, Q′K는 각각 직선 GD에 수직이므로

이면각의 정의에 의하여

$\angle\mathrm{Q'KC}=\theta$

정사각형 CGHD의 두 대각선의 교점이 K이므로

$\overline{\mathrm{CK}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$

평행사변형 PQQ′D에서

$\overline{\mathrm{QQ'}}=\overline{\mathrm{PD}}=1$이므로

$\overline{\mathrm{Q'C}}=\overline{\mathrm{BC}}-\overline{\mathrm{BQ}}-\overline{\mathrm{QQ'}}=1$

직각삼각형 Q′KC에서 피타고라스의 정리에 의하여

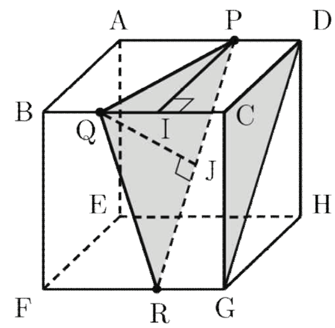
$\overline{\mathrm{Q'K}}=\sqrt{\overline{\mathrm{Q'C}}^2+\overline{\mathrm{CK}}^2}=\frac{\sqrt{22}}{2}$

$\therefore\ \cos\theta=\frac{\overline{\mathrm{KC}}}{\overline{\mathrm{Q'K}}}=\frac{3\sqrt{11}}{11}$

답 ⑤

[풀이2] +기하와 벡터(정사영)

점 P에서 모서리 BC에 내린 수선의 발을 I, 점 Q에서 선분 PR에 내린 수선의 발을 J라고 하자.



정육면체의 정의에 의하여

직선 AD가 평면 CGHD에 수직이므로

점 P에서 평면 CGHD에 내린 수선의 발은 D이다.

마찬가지의 이유로 두 점 Q, R에서 평면 CGHD에 내린 수선의 발은 각각 C, G이다.

그러므로 삼각형 PQR의 평면 CGHD 위로의 정사영은 삼각형 DCG이다.

두 삼각형 PQR, DCG의 넓이를 각각 S, T라고 하자.

직각삼각형 PQI에서 피타고라스의 정리에 의하여

$\overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{\overline{\mathrm{QI}}^2+\overline{\mathrm{IP}}^2}=\sqrt{10}$

마찬가지의 방법으로

$\overline{\mathrm{QR}}=\sqrt{10}$

삼각형 PQR은 $\overline{\mathrm{PQ}}=\overline{\mathrm{QR}}$인 이등변삼각형이다.

직각삼각형 PRGD에서

$\overline{\mathrm{PR}}=\overline{\mathrm{DG}}=3\sqrt{2}$

직각삼각형 PQJ에서 피타고라스의 정리에 의하여

$\overline{\mathrm{QJ}}=\sqrt{\overline{\mathrm{PQ}}^2-\overline{\mathrm{PJ}}^2}=\frac{\sqrt{22}}{2}$

삼각형의 넓이를 구하는 공식에 의하여

$S=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{PR}}\times\overline{\mathrm{QJ}}=\frac{3\sqrt{11}}{2}$

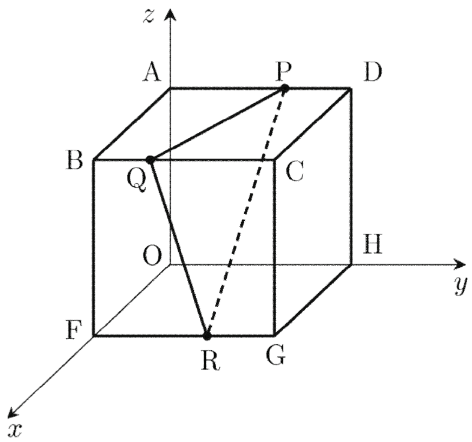
$T=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{DC}}\times\overline{\mathrm{CG}}=\frac{9}{2}$

정사영의 넓이에 대한 공식에 의하여

$\therefore\ \cos\theta=\dfrac{T}{S}=\dfrac{3\sqrt{11}}{11}$

답 ⑤

[풀이3] +기하와 벡터(평면의 방정식)
네 점 E, F, H, A의 좌표가 각각
E$(0,\ 0,\ 0)$, F$(3,\ 0,\ 0)$,
H$(0,\ 3,\ 0)$, A$(0,\ 0,\ 3)$
이 되도록 좌표공간을 도입하자.



세 점 P, Q, R의 좌표는 각각
P$(0,\ 2,\ 3)$, Q$(3,\ 1,\ 3)$, R$(3,\ 2,\ 0)$
평면 PQR은 x축에 평행하지 않으므로 평면 PQR의 법선벡터의 x성분은 0이 아니다.
평면 PQR의 법선벡터를
$\overrightarrow{n_1}=(1,\ a,\ b)$
성분으로 주어진 벡터의 내적을 하면
$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{n_1}=(3,\ -1,\ 0)\cdot(1,\ a,\ b)=3-a=0$
풀면 $a=3$
$\overrightarrow{\mathrm{PR}}\cdot\overrightarrow{n_1}=(3,\ 0,\ -3)\cdot(1,\ a,\ b)=3-3b=0$
풀면 $b=1$
평면 PQR의 법선벡터는
$\overrightarrow{n_1}=(1,\ 3,\ 1)$
평면 CGHD의 법선벡터를
$\overrightarrow{n_2}=(0,\ 1,\ 0)$
두 평면이 이루는 각의 크기를 구하는 공식에 의하여

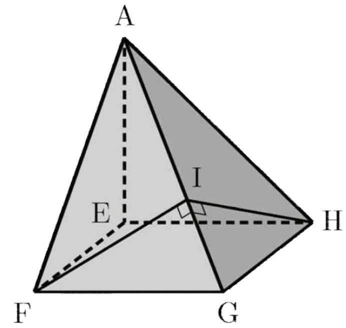
$\therefore\ \cos\theta=\dfrac{|\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}|}{|\overrightarrow{n_1}||\overrightarrow{n_2}|}=\dfrac{3\sqrt{11}}{11}$

답 ⑤

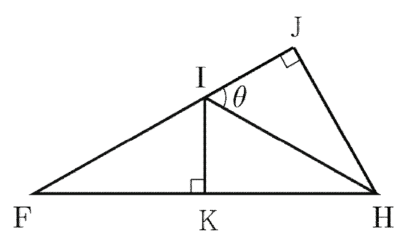
S010 | 답 ③

[풀이1]
주어진 정육면체의 한 모서리의 길이를 1로 두어도 풀이의 일반성을 잃지 않는다.

점 F에서 선분 AG에 내린 수선의 발을 I라고 하자.



두 삼각형 AFG, AHG는 서로 합동이므로
점 H에서 선분 AG에 내린 수선의 발은 I이다.
두 평면 AFG, AHG의 교선은 AG이고
두 선분 FI, HI는 각각 선분 AG에 수직이므로
이면각의 정의에 의하여
$\angle\mathrm{FIH}=\pi-\theta$($\because$ $\angle\mathrm{FIH}$는 둔각)
정육면체의 정의에 의하여
$\overline{\mathrm{FG}}\perp\mathrm{ABFE}$
직선과 평면의 수직에 대한 정의에 의하여
$\overline{\mathrm{AF}}\perp\overline{\mathrm{FG}}$
삼각형의 넓이를 구하는 공식에 의하여
($\triangle$AFG의 넓이)
$=\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AF}}\times\overline{\mathrm{FG}}=\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AG}}\times\overline{\mathrm{FI}}$
대입하여 정리하면
$\overline{\mathrm{FI}}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$
마찬가지의 방법으로 직각삼각형 AHG에서
$\overline{\mathrm{HI}}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$
점 H에서 직선 FI에 내린 수선의 발을 J, 점 I에서 선분 FH에 내린 수선의 발을 K라고 하자. 이때, 이등변삼각형의 성질에 의하여 K는 선분 FH의 중점이다.



서로 닮은 두 직각삼각형 IFK, HFJ에 대하여
$\overline{\mathrm{IF}}:\overline{\mathrm{FK}}=\overline{\mathrm{HF}}:\overline{\mathrm{FJ}}$ 즉, $\dfrac{\sqrt{6}}{3}:\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}:\overline{\mathrm{FJ}}$
정리하면
$\overline{\mathrm{FJ}}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$
이므로
$\overline{\mathrm{IJ}}=\overline{\mathrm{FJ}}-\overline{\mathrm{FI}}=\dfrac{\sqrt{6}}{6}$

직각삼각형 HIJ에서 삼각비의 정의에 의하여

$\cos\theta = \dfrac{\overline{\mathrm{IJ}}}{\overline{\mathrm{HI}}} = \dfrac{1}{2}$

$\therefore\ \cos^2\theta = \dfrac{1}{4}$

답 ③

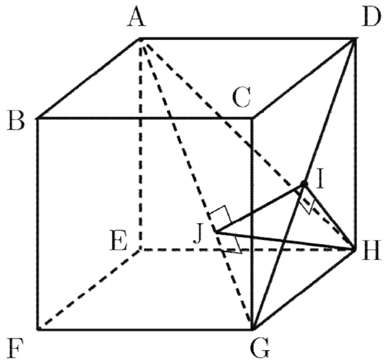
[풀이2]

정육면체의 정의에 의하여

$\overline{\mathrm{AD}} /\!/ \overline{\mathrm{FG}}$

평면의 결정 조건에 의하여 점 D는 평면 AFG 위에 있다.

즉, 네 점 A, F, G, D는 한 평면 위에 있다.



정육면체의 정의에 의하여

$\overline{\mathrm{AD}} \perp \mathrm{CGHD}$

평면 CGHD에 수직인 직선 AD를 포함하는 평면 AFGD에 대하여

$\mathrm{AFGD} \perp \mathrm{CGHD}$

점 H에서 두 평면 AFGD, CGHD의 교선 GD에 내린 수선의 발을 I라고 하면

$\overline{\mathrm{HI}} \perp \mathrm{AFGD}$

점 I에서 선분 AG에 내린 수선의 발을 J라고 하면

삼수선의 정리에 의하여

$\overline{\mathrm{HJ}} \perp \overline{\mathrm{AG}}$

이면각의 정의에 의하여

$\angle \mathrm{HJI} = \theta$

정육면체의 정의에 의하여

$\overline{\mathrm{GH}} \perp \mathrm{AEHD}$

직선과 평면의 수직에 대한 정의에 의하여

$\overline{\mathrm{GH}} \perp \overline{\mathrm{AH}}$

삼각형의 넓이를 구하는 공식에 의하여

(△AGH의 넓이)

$= \dfrac{1}{2} \times \overline{\mathrm{AH}} \times \overline{\mathrm{HG}} = \dfrac{1}{2} \times \overline{\mathrm{AG}} \times \overline{\mathrm{HJ}}$

대입하여 정리하면

$\overline{\mathrm{HJ}} = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$

점 I는 정사각형 CGHD의 두 대각선의 교점이므로

$\overline{\mathrm{HI}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

직각삼각형 HJI에서 피타고라스의 정리에 의하여

$\overline{\mathrm{JI}} = \sqrt{\overline{\mathrm{HJ}}^2 - \overline{\mathrm{HI}}^2} = \dfrac{\sqrt{6}}{6}$

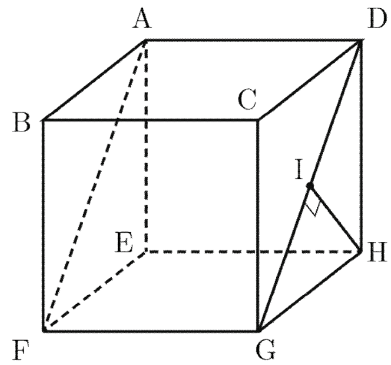
직각삼각형 HJI에서 삼각비의 정의에 의하여

$\cos\theta = \dfrac{\overline{\mathrm{JI}}}{\overline{\mathrm{HJ}}} = \dfrac{1}{2}$

$\therefore\ \cos^2\theta = \dfrac{1}{4}$

답 ③

[풀이3] +기하와 벡터(정사영)



정육면체의 정의에 의하여

$\overline{\mathrm{AD}} \perp \mathrm{CGHD}$

평면 CGHD에 수직인 직선 AD를 포함하는 평면 AFGD에 대하여

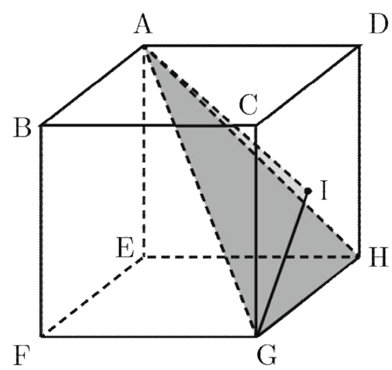
$\mathrm{AFGD} \perp \mathrm{CGHD}$

점 H에서 두 평면 AFGD, CGHD의 교선 GD에 내린 수선의 발을 I라고 하면

$\overline{\mathrm{HI}} \perp \mathrm{AFGD}$

점 H에서 평면 AFGD에 내린 수선의 발은 I이므로 삼각형 AGH의 평면 AFGD 위로의 정사영은 삼각형 AGI이다.

두 삼각형 AGH, AGI의 넓이를 각각 S, T라고 하자.



정육면체의 정의에 의하여

$\overline{\mathrm{GH}} \perp \mathrm{AEHD}$

직선과 평면의 수직에 대한 정의에 의하여

$\overline{\mathrm{GH}} \perp \overline{\mathrm{HA}}$

삼각형 AGH는 $\angle GHA = 90^\circ$ 인 직각삼각형이다.
삼각형의 넓이를 구하는 공식에 의하여

$S = \frac{1}{2} \times \overline{GH} \times \overline{HA} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

점 I는 정사각형 CGHD의 대각선 GD의 중점이므로

$T = \frac{1}{2} \times (\triangle AGD \text{의 넓이}) = \frac{\sqrt{2}}{4}$

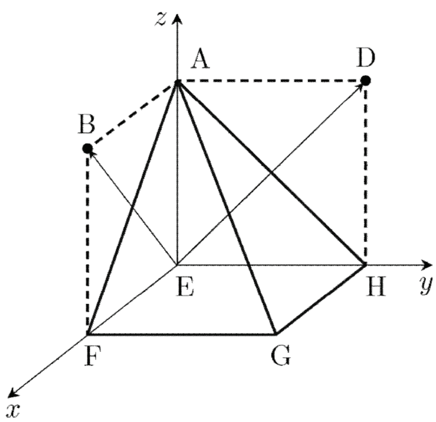
정사영의 넓이에 대한 공식에 의하여

$\cos\theta = \frac{T}{S} = \frac{1}{2}$

$\therefore \ \cos^2\theta = \frac{1}{4}$

답 ③

[풀이4] +기하와 벡터(평면의 방정식)
주어진 정육면체의 한 모서리의 길이를 1로 두어도 풀이의 일반성을 잃지 않는다.
네 점 E, F, H, A의 좌표가 각각
E$(0, 0, 0)$, F$(1, 0, 0)$,
H$(0, 1, 0)$, A$(0, 0, 1)$
이 되도록 좌표공간을 도입하자.



정사각형 ABFE의 두 대각선은 서로 직교하므로

$\overline{AF} \perp \overline{BE}$ …㉠

정육면체의 정의에 의하여

$\overline{FG} \perp (zx\text{평면})$

직선과 평면의 수직에 대한 정의에 의하여

$\overline{FG} \perp \overline{BE}$ …㉡

㉠, ㉡에 의하여

$\overline{BE} \perp AFG$

($\because$ 직선과 평면의 수직에 대한 정의)

$\overrightarrow{EB} = (1, 0, 1)$은 평면 AFG의 법선벡터이다.
마찬가지의 방법으로

$\overrightarrow{ED} = (0, 1, 1)$은 평면 AGH의 법선벡터이다.

두 벡터 $\overrightarrow{EB}$, $\overrightarrow{ED}$가 이루는 각의 크기는 θ이다.
두 평면이 이루는 각의 크기를 구하는 공식에 의하여

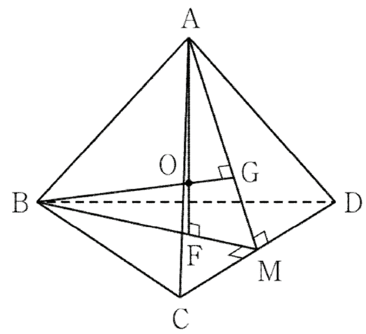
$\cos\theta = \frac{|\overrightarrow{EB} \cdot \overrightarrow{ED}|}{|\overrightarrow{EB}||\overrightarrow{ED}|} = \frac{1}{2}$

$\therefore \ \cos^2\theta = \frac{1}{4}$

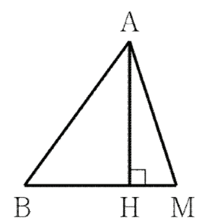
답 ③

S011 | 답 ④

[풀이]
모서리 CD의 중점을 M이라고 하자.



ㄱ. (거짓)
삼각형의 무게중심의 정의에 의하여
점 G는 선분 AM 위에 있고 점 F는 선분 BM 위에 있다.
한 점 M에서 만나는 두 직선 AM과 BM은 한 평면을 결정한다.
평면 ABM은 두 직선 AF, BG를 포함하므로
두 직선 AF, BG는 꼬인 위치에 있지 않다.
이제 두 직선 AF, BG의 교점이 O임을 증명하자.
점 A에서 선분 BM에 내린 수선의 발을 H라고 하자.



정사면체 ABCD의 한 모서리의 길이를 a라고 하면

$\overline{AB} = a, \ \overline{AM} = \overline{BM} = \frac{\sqrt{3}}{2}a$

$\overline{HM} = x$로 두자.
직각삼각형 AHM에서 피타고라스의 정리에 의하여

$\overline{AH} = \sqrt{\overline{AM}^2 - \overline{MH}^2} = \sqrt{\frac{3}{4}a^2 - x^2}$

직각삼각형 ABH에서 피타고라스의 정리에 의하여

$\overline{AB}^2 = \overline{BH}^2 + \overline{HA}^2$

대입하면

$a^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}a - x\right)^2 + \frac{3}{4}a^2 - x^2$

풀면

$x=\dfrac{\sqrt{3}}{6}a$ 즉, $\overline{\mathrm{HM}}=\dfrac{\sqrt{3}}{6}a$

$\overline{\mathrm{BH}}=\overline{\mathrm{BM}}-\overline{\mathrm{HM}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}a$

$\overline{\mathrm{BH}}:\overline{\mathrm{HM}}=2:1$이므로 삼각형의 무게중심의 정의에 의하여 점 H는 점 F이다.

이등변삼각형의 성질에 의하여

$\overline{\mathrm{AM}}\perp\overline{\mathrm{CD}}$, $\overline{\mathrm{BM}}\perp\overline{\mathrm{CD}}$

그리고 $\overline{\mathrm{AF}}\perp\overline{\mathrm{BM}}$이므로

삼수선의 정리에 의하여

$\overline{\mathrm{AF}}\perp\mathrm{BCD}$

정사면체 ABCD의 외접구의 중심 O는 선분 AF 위에 있다.

마찬가지의 방법으로 점 O는 선분 BG 위에 있다.

두 직선 AF, BG는 점 O에서 만난다.

ㄴ. (참)

점 O를 지나는 평면으로 주어진 구를 잘라서 생기는 원에 내접하는 정삼각형의 넓이를 S라고 하자.

반지름의 길이가 1인 원에 내접하는 정삼각형의 한 변의 길이는 $\sqrt{3}$이므로

정삼각형의 넓이를 구하는 공식에 의하여

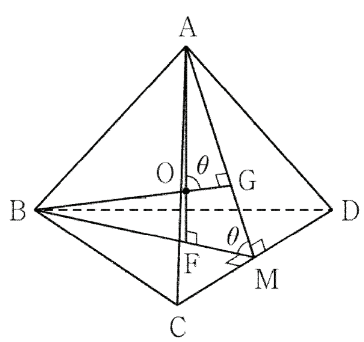
$S=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times(\sqrt{3})^2=\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$

삼각형 ABC는 주어진 구의 중심 O를 지나지 않으므로

($\triangle$ABC의 넓이)$<S$

ㄷ. (참)

정사면체 ABCD를 평면 ABM으로 잘라서 생긴 평면도형에서 문제를 해결하자. 이때, 세 점 O, F, G는 평면 ABM 위의 점이다.



$\angle\mathrm{AOG}+\angle\mathrm{GOF}=\pi$

$\angle\mathrm{GOF}+\angle\mathrm{FMG}=\pi$

이므로

$\angle\mathrm{FMG}=\theta$

$\overline{\mathrm{AM}}\perp\overline{\mathrm{CD}}$, $\overline{\mathrm{BM}}\perp\overline{\mathrm{CD}}$

이므로 이면각의 정의에 의하여

두 평면 ACD, BCD가 이루는 각의 크기는 θ이다.

두 정삼각형 ACD, BCD는 서로 합동이므로

$\overline{\mathrm{AM}}=\overline{\mathrm{BM}}$

그런데 점 F는 삼각형 BCD의 무게중심이므로

$\overline{\mathrm{FM}}=\dfrac{1}{3}\overline{\mathrm{BM}}$

직각삼각형 AMF에서 삼각비의 정의에 의하여

$\cos\theta=\dfrac{\overline{\mathrm{FM}}}{\overline{\mathrm{AM}}}=\dfrac{\frac{1}{3}\overline{\mathrm{BM}}}{\overline{\mathrm{AM}}}=\dfrac{1}{3}$

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ④

[참고1]

삼각형 ACD의 넓이를 구하자.

직각삼각형 AOG에서 삼각비의 정의에 의하여

$\overline{\mathrm{OG}}=\overline{\mathrm{AO}}\times\cos\theta=\dfrac{1}{3}$

직각삼각형 AOG에서 피타고라스의 정리에 의하여

$\overline{\mathrm{AG}}=\sqrt{\overline{\mathrm{AO}}^2-\overline{\mathrm{OG}}^2}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

점 G는 선분 AM의 $2:1$내분점이므로

$\overline{\mathrm{AM}}=\sqrt{2}$

직각삼각형 ACM에서 특수각의 삼각비에 의하여

$\overline{\mathrm{AC}}=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$

정삼각형의 넓이를 구하는 공식에 의하여

($\triangle$ACD의 넓이)$=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\left(\dfrac{2\sqrt{6}}{3}\right)^2=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

[참고2] +기하와 벡터(정사영)

점 A에서 평면 BCD에 내린 수선의 발이 F이므로

삼각형 ACD의 평면 BCD 위로의 정사영은 삼각형 FCD이다.

두 삼각형 ACD, FCD의 넓이를 각각 S, T라고 하자.

삼각형의 무게중심의 정의에 의하여

점 F는 선분 BM의 $2:1$내분점이므로

$T=\dfrac{1}{3}$($\triangle$BCD의 넓이)$=\dfrac{1}{3}$($\triangle$ACD의 넓이)$=\dfrac{S}{3}$

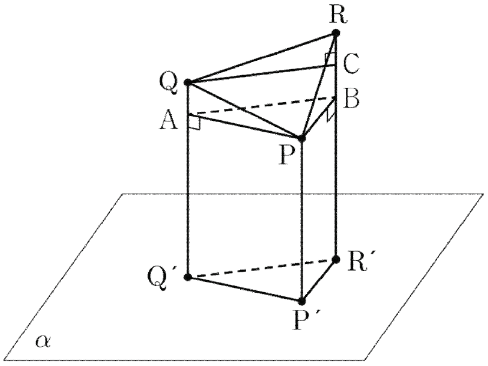
정사영의 넓이에 대한 공식에 의하여

$\cos\theta=\dfrac{T}{S}=\dfrac{1}{3}$

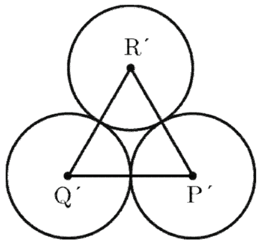
S012 | 답 25

[풀이1]

세 점 P, Q, R에서 평면 α에 내린 수선의 발을 각각 P′, Q′, R′, 점 P에서 두 선분 QQ′, RR′에 내린 수선의 발을 각각 A, B, 점 Q에서 선분 RR′에 내린 수선의 발을 C라고 하자.



세 점 P′, Q′, R′은 각각 세 원기둥의 밑면의 중심이므로 P′Q′R′은 정삼각형이다.



정삼각형의 정의에 의하여

$\overline{\mathrm{P'Q'}}=\overline{\mathrm{Q'R'}}=\overline{\mathrm{R'P'}}$

피타고라스의 정리에 의하여

$\overline{\mathrm{PQ}}^2=\overline{\mathrm{AP}}^2+\overline{\mathrm{AQ}}^2=\overline{\mathrm{AP}}^2+(a-8)^2$

$\overline{\mathrm{QR}}^2=\overline{\mathrm{QC}}^2+\overline{\mathrm{CR}}^2=\overline{\mathrm{QC}}^2+(b-a)^2$

$\overline{\mathrm{PR}}^2=\overline{\mathrm{PB}}^2+\overline{\mathrm{BR}}^2=\overline{\mathrm{PB}}^2+(b-8)^2$

$\overline{\mathrm{QR}}=\overline{\mathrm{RP}}$라고 가정하면

$(b-a)^2=(b-8)^2$

정리하면

$(8-a)(2b-a-8)=0$

풀면

$a=8$ 또는 $2b=a+8$

$a=8$은 주어진 조건 $a>8$에 모순이다.

$2b=a+8$이면 $a+8=2b>2a$에서 $a<8$이므로 주어진 조건 $a>8$에 모순이다.

따라서 $\overline{\mathrm{QR}}\neq\overline{\mathrm{RP}}$

$\overline{\mathrm{PQ}}=\overline{\mathrm{RP}}$라고 가정해도 마찬가지 방법으로 주어진 조건에 모순임을 보일 수 있다.

따라서 $\overline{\mathrm{PQ}}\neq\overline{\mathrm{RP}}$

그러므로

$\overline{\mathrm{PQ}}=\overline{\mathrm{QR}}$

$(a-8)^2=(b-a)^2$

정리하면

$(2a-8-b)(b-8)=0$

주어진 조건에서 $8>b$이므로

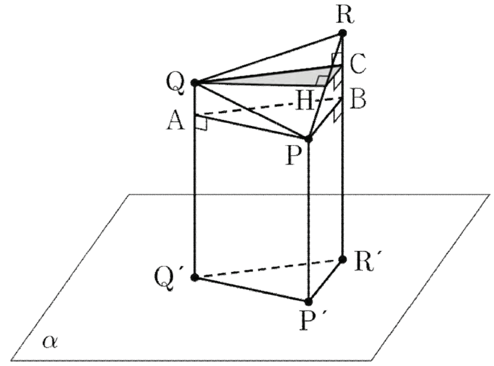
$a=\dfrac{b+8}{2}$ $\cdots$㉠

두 직각삼각형 PAQ, QCR은 서로 RHS합동이므로

$\overline{\mathrm{QA}}=\overline{\mathrm{RC}}$

직사각형 QABC에서 $\overline{\mathrm{QA}}=\overline{\mathrm{CB}}$이므로 $\overline{\mathrm{RC}}=\overline{\mathrm{CB}}$

선분 RP의 중점을 H라고 하면 점 H는 이등변삼각형 PQR의 꼭짓점 Q에서 변 RP에 내린 수선의 발이다.



직각삼각형 RPB에서

$\overline{\mathrm{RH}}:\overline{\mathrm{HP}}=\overline{\mathrm{RC}}:\overline{\mathrm{CB}}$이므로

$\overline{\mathrm{HC}}/\!/\overline{\mathrm{PB}}\,(/\!/\overline{\mathrm{P'R'}})$

그리고 $\overline{\mathrm{QC}}/\!/\overline{\mathrm{Q'R'}}$이므로

평면 QHC는 평면 α와 평행하다.

$\overline{\mathrm{RC}}\perp\mathrm{QHC}$, $\overline{\mathrm{RH}}\perp\overline{\mathrm{HQ}}$

이므로 삼수선의 정리에 의하여

$\overline{\mathrm{CH}}\perp\overline{\mathrm{HQ}}$

이면각의 정의에 의하여

두 평면 QRP와 QHC$(/\!/\alpha)$가 이루는

이면각의 크기는 $\angle\mathrm{RHC}$이다.

주어진 조건에 의하여

$\angle\mathrm{RHC}=60^\circ$

평행선의 성질에 의하여

$\angle\mathrm{RPB}=60^\circ$ (동위각)

직각삼각형 RPB에서 삼각비의 정의에 의하여

$\dfrac{\overline{\mathrm{BR}}}{\overline{\mathrm{PB}}}=\tan 60^\circ$

대입하면

$\dfrac{b-8}{2\sqrt{3}}=\tan 60^\circ$ 즉, $b=14$ $\cdots$㉡

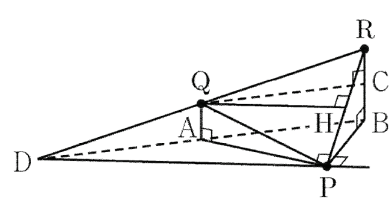
㉡을 ㉠에 대입하면 $a=11$ $\therefore$ $a+b=25$

답 25

[참고]

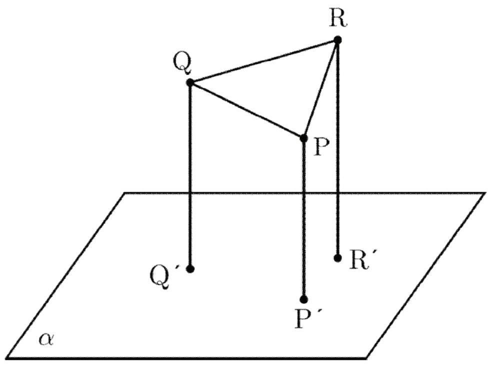
이면각을 다음과 같이 찾을 수 있다.

직선 RQ가 평면 PAB와 만나는 점을 D라고 하자.

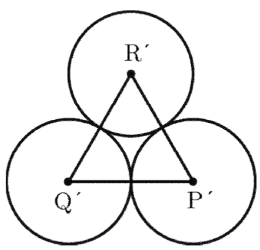


$\overline{PA} /\!/ \alpha$, $\overline{PB} /\!/ \alpha$이므로 $PAB /\!/ \alpha$
두 평면 PQR, PAB가 이루는 각의 크기는 60°이다.
서로 닮은 두 직각삼각형 RDB, RQC에 대하여
$\overline{RQ} : \overline{QD} = \overline{RC} : \overline{CB}$이므로 $\overline{RQ} = \overline{QD}$
삼각형 RDP에서
$\overline{RQ} : \overline{QD} = \overline{RH} : \overline{HP}$이므로 $\overline{QH} /\!/ \overline{DP}$
평행선의 성질에 의하여
$\angle DPR = \angle QHR = 90^\circ$ (동위각)
$\overline{RB} \perp PAB$, $\overline{DP} \perp \overline{PR}$이므로
삼수선의 정리에 의하여
$\overline{DP} \perp \overline{PB}$
이면각의 정의에 의하여 두 평면 PQR, PAB가 이루는 각의 크기는 $\angle RPB$이다.
$\therefore\ \angle RPB = 60^\circ$

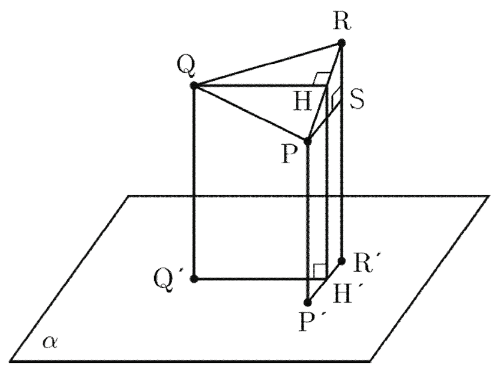
[풀이2]
세 점 P, Q, R에서 평면 α에 내린 수선의 발을 각각 P′, Q′, R′이라고 하자.



세 점 P′, Q′, R′은 각각 세 원기둥의 밑면의 중심이므로 P′Q′R′은 정삼각형이다.



정삼각형의 정의에 의하여
$\overline{P'Q'} = \overline{Q'R'} = \overline{R'P'}$
피타고라스의 정리에 의하여
$\overline{PQ}^2 = \overline{P'Q'}^2 + (a-8)^2$
$\overline{QR}^2 = \overline{Q'R'}^2 + (b-a)^2$
$\overline{RP}^2 = \overline{R'P'}^2 + (b-8)^2$
$\overline{QR} = \overline{RP}$라고 가정하면
$(b-a)^2 = (b-8)^2$
정리하면
$(8-a)(2b-a-8) = 0$
풀면
$a = 8$ 또는 $2b = a + 8$
$a = 8$은 주어진 조건 $a > 8$에 모순이다.
$2b = a + 8$이면 $a + 8 = 2b > 2a$에서 $a < 8$이므로 주어진 조건 $a > 8$에 모순이다.
따라서 $\overline{QR} \neq \overline{RP}$
$\overline{PQ} = \overline{RP}$라고 가정해도 마찬가지 방법으로 주어진 조건에 모순임을 보일 수 있다.
따라서 $\overline{PQ} \neq \overline{RP}$
그러므로
$\overline{PQ} = \overline{QR}$
$(a-8)^2 = (b-a)^2$
정리하면
$(2a-8-b)(b-8) = 0$
주어진 조건에서 $8 > b$이므로
$a = \dfrac{b+8}{2}$ …㉠
이제 선분 RP의 중점을 H, 점 H에서 평면 α에 내린 수선의 발을 H′라고 하자. 이때, H는 이등변삼각형 PQR의 꼭짓점 Q에서 변 RP에 내린 수선의 발이다.



㉠에 의하여
$\overline{QQ'} = \overline{HH'}$
□QQ′H′H는 직사각형이므로
$\overline{QH} /\!/ \overline{Q'H'}$
평면 α에 직선 HH′이 수직이므로
$\alpha \perp$ (평면 PHH′)
평면 PHH′에 직선 QH가 수직이므로
(평면 PQR) $\perp$ (평면 PHH′)
이면각의 정의에 의하여 두 평면 PQR, α가 이루는 각의 크기는 두 직선 PR, P′R′이 이루는 각의 크기와 같다.
점 P에서 선분 RR′에 내린 수선의 발을 S라고 하자.
직각삼각형 PSR에서
$\dfrac{\overline{SR}}{\overline{PS}} = \tan\dfrac{\pi}{3}$
대입하면
$\dfrac{b-8}{2\sqrt{3}} = \tan\dfrac{\pi}{3}$ 즉, $b = 14$ …㉡

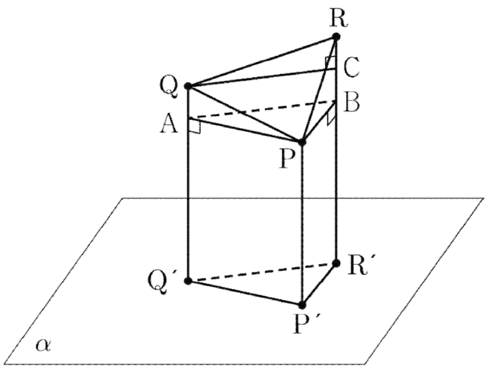
㉡을 ㉠에 대입하면 $a=11$

$\therefore\ a+b=25$

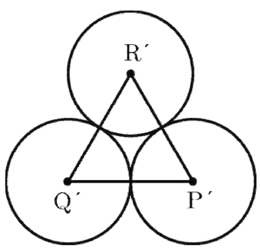
답 25

[풀이3] +기하와 벡터(정사영)

세 점 P, Q, R에서 평면 α에 내린 수선의 발을 각각 P′, Q′, R′, 점 P에서 두 선분 QQ′, RR′에 내린 수선의 발을 각각 A, B, 점 Q에서 선분 RR′에 내린 수선의 발을 C라고 하자.



세 점 P′, Q′, R′은 각각 세 원기둥의 밑면의 중심이므로 P′Q′R′은 정삼각형이다.



정삼각형의 정의에 의하여

$\overline{\mathrm{P'Q'}}=\overline{\mathrm{Q'R'}}=\overline{\mathrm{R'P'}}$

피타고라스의 정리에 의하여

$\overline{\mathrm{PQ}}^2=\overline{\mathrm{AP}}^2+\overline{\mathrm{AQ}}^2=\overline{\mathrm{AP}}^2+(a-8)^2$

$\overline{\mathrm{QR}}^2=\overline{\mathrm{QC}}^2+\overline{\mathrm{CR}}^2=\overline{\mathrm{QC}}^2+(b-a)^2$

$\overline{\mathrm{PR}}^2=\overline{\mathrm{PB}}^2+\overline{\mathrm{BR}}^2=\overline{\mathrm{PB}}^2+(b-8)^2$

$\overline{\mathrm{QR}}=\overline{\mathrm{RP}}$라고 가정하면

$(b-a)^2=(b-8)^2$

정리하면

$(8-a)(2b-a-8)=0$

풀면

$a=8$ 또는 $2b=a+8$

$a=8$은 주어진 조건 $a>8$에 모순이다.

$2b=a+8$이면 $a+8=2b>2a$에서 $a<8$이므로 주어진 조건 $a>8$에 모순이다.

따라서 $\overline{\mathrm{QR}}\neq\overline{\mathrm{RP}}$

$\overline{\mathrm{PQ}}=\overline{\mathrm{RP}}$라고 가정해도 마찬가지 방법으로 주어진 조건에 모순임을 보일 수 있다.

따라서 $\overline{\mathrm{PQ}}\neq\overline{\mathrm{RP}}$

그러므로

$\overline{\mathrm{PQ}}=\overline{\mathrm{QR}}$

$(a-8)^2=(b-a)^2$

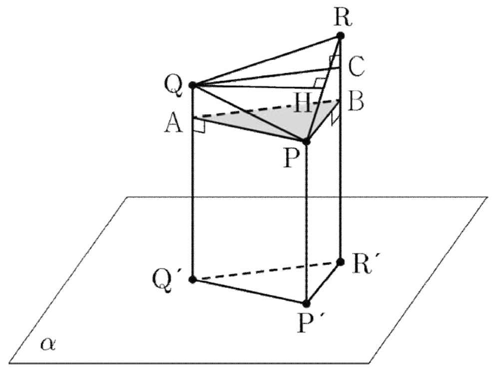
정리하면

$(2a-8-b)(b-8)=0$

주어진 조건에서 $8>b$이므로

$a=\dfrac{b+8}{2}$ $\cdots$㉠

선분 RP의 중점을 H라고 하면 점 H는 이등변삼각형 PQR의 꼭짓점 Q에서 변 RP에 내린 수선의 발이다.



두 직각삼각형 PAQ, PBR, QPH에서

피타고라스의 정리에 의하여

$\overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{\overline{\mathrm{PA}}^2+\overline{\mathrm{AQ}}^2}=\sqrt{12+(a-8)^2}$

$\overline{\mathrm{PR}}=\sqrt{\overline{\mathrm{PB}}^2+\overline{\mathrm{BR}}^2}=\sqrt{12+(b-8)^2}$

$=2\sqrt{3+(a-8)^2}$ ($\because$ ㉠)

$\overline{\mathrm{QH}}=\sqrt{\overline{\mathrm{PQ}}^2-\overline{\mathrm{PH}}^2}=3$

두 삼각형 PQR, PAB의 넓이를 각각 S, S'라고 하자.

삼각형의 넓이를 구하는 공식에 의하여

$S=\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{PR}}\times\overline{\mathrm{QH}}=3\sqrt{3+(a-8)^2}$

$S'=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times\overline{\mathrm{PA}}^2=3\sqrt{3}$

넓이의 정사영에 대한 공식에 의하여

$\dfrac{S'}{S}=\cos 60^\circ$

대입하면

$\dfrac{3\sqrt{3}}{3\sqrt{3+(a-8)^2}}=\dfrac{1}{2}$

양변을 제곱하여 풀면

$a=11$ ($\because a>8$)

이를 ㉠에 대입하면

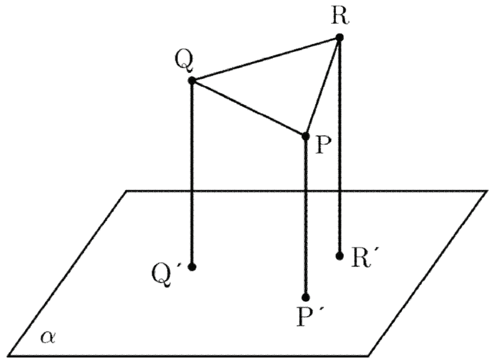
$b=14$

$\therefore\ a+b=25$

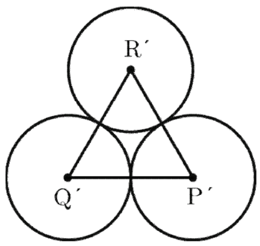
답 25

[풀이4] +기하와 벡터(평면의 방정식)

세 점 P, Q, R에서 평면 α에 내린 수선의 발을 각각 P′, Q$'$, R$'$이라고 하자.



세 점 P$'$, Q$'$, R$'$은 각각 세 원기둥의 밑면의 중심이므로 P$'$Q$'$R$'$은 정삼각형이다.



정삼각형의 정의에 의하여

$\overline{\mathrm{P'Q'}} = \overline{\mathrm{Q'R'}} = \overline{\mathrm{R'P'}}$

피타고라스의 정리에 의하여

$\overline{\mathrm{PQ}}^2 = \overline{\mathrm{P'Q'}}^2 + (a-8)^2$

$\overline{\mathrm{QR}}^2 = \overline{\mathrm{Q'R'}}^2 + (b-a)^2$

$\overline{\mathrm{RP}}^2 = \overline{\mathrm{R'P'}}^2 + (b-8)^2$

$\overline{\mathrm{QR}} = \overline{\mathrm{RP}}$ 라고 가정하면

$(b-a)^2 = (b-8)^2$

정리하면

$(8-a)(2b-a-8) = 0$

풀면

$a = 8$ 또는 $2b = a+8$

$a = 8$은 주어진 조건 $a > 8$에 모순이다.

$2b = a+8$이면 $a+8 = 2b > 2a$에서 $a < 8$이므로 주어진 조건 $a > 8$에 모순이다.

따라서 $\overline{\mathrm{QR}} \neq \overline{\mathrm{RP}}$

$\overline{\mathrm{PQ}} = \overline{\mathrm{RP}}$ 라고 가정해도 마찬가지 방법으로 주어진 조건에 모순임을 보일 수 있다.

따라서 $\overline{\mathrm{PQ}} \neq \overline{\mathrm{RP}}$

그러므로

$\overline{\mathrm{PQ}} = \overline{\mathrm{QR}}$

$(a-8)^2 = (b-a)^2$

정리하면

$(2a-8-b)(b-8) = 0$

주어진 조건에서 $8 > b$이므로

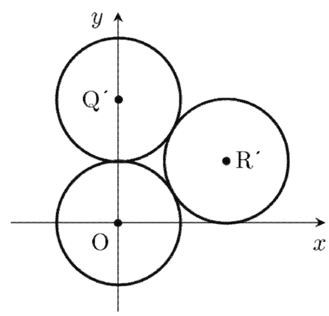
$a = \dfrac{b+8}{2}$ $\cdots$㉠

세 점 P$'$, Q$'$, R$'$의 좌표가 각각

P$'(0,\ 0,\ 0)$, Q$'(0,\ 2\sqrt{3},\ 0)$, R$'(3,\ \sqrt{3},\ 0)$

이 되도록 좌표공간을 도입하자.

이때, 평면 α는 xy평면과 일치한다.



세 점 P, Q, R의 좌표는 각각

P$(0,\ 0,\ 8)$, Q$(0,\ 2\sqrt{3},\ a)$, R$(3,\ \sqrt{3},\ b)$

공간벡터의 성분에 의한 연산에 의하여

$\overrightarrow{\mathrm{PQ}} = (0,\ 2\sqrt{3},\ a-8)$, $\overrightarrow{\mathrm{PR}} = (3,\ \sqrt{3},\ b-8)$

x축에 평행하지 않은 평면 PQR의 법선벡터를

$\overrightarrow{n_1} = (1,\ p,\ q)$

공간벡터의 성분에 의한 내적을 하면

$\overrightarrow{\mathrm{PQ}} \cdot \overrightarrow{n_1} = 2\sqrt{3}p + (a-8)q = 0$

정리하면

$q = \dfrac{2\sqrt{3}}{8-a}p$ $\cdots$㉡

공간벡터의 성분에 의한 내적을 하면

$\overrightarrow{\mathrm{PR}} \cdot \overrightarrow{n_1} = 3 + \sqrt{3}p + (b-8)q = 0$

정리하면

$3 + \sqrt{3}p + 2(a-8)q = 0\ (\because$ ㉠$)$ $\cdots$㉢

㉡, ㉢을 연립하면

$p = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

평면 PQR의 법선벡터는

$\overrightarrow{n_1} = \left(1,\ \dfrac{\sqrt{3}}{3},\ \dfrac{2}{8-a}\right)$

평면 α의 법선벡터를

$\overrightarrow{n_2} = (0,\ 0,\ 1)$

두 평면 PQR, α가 이루는 각의 크기가 60°이므로 두 평면이 이루는 각의 크기를 구하는 공식에 의하여

$$\cos\frac{\pi}{3} = \frac{\left|\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2}\right|}{\left|\overrightarrow{n_1}\right|\left|\overrightarrow{n_2}\right|} = \frac{\dfrac{2}{a-8}}{\sqrt{\dfrac{4}{3} + \dfrac{4}{(8-a)^2}}}$$

$\dfrac{1}{a-8} = t\,(>0)$로 두고 이 식을 정리하면

$2t = \sqrt{\dfrac{1}{3} + t^2}$

양변을 제곱하여 풀면

$t=\frac{1}{3}$, $a=11$

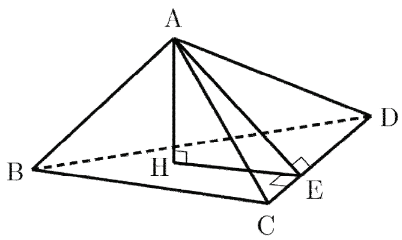
이를 ㉠에 대입하면 $b=14$

$\therefore\ a+b=25$

답 25

S013 ㅣ답 ②

[풀이]



점 A에서 평면 BCD에 내린 수선의 발은 H이다.

$\overline{\mathrm{AH}}\perp\mathrm{BCD}$

점 A에서 직선 CD에 내린 수선의 발을 E라고 하자.

$\overline{\mathrm{AE}}\perp\overline{\mathrm{CD}}$

삼수선의 정리에 의하여

$\overline{\mathrm{HE}}\perp\overline{\mathrm{CD}}$

이면각의 정의에 의하여 두 평면 ACD, BCD가 이루는 각의 크기는 $\angle\mathrm{AEH}$이다.

문제에서 주어진 조건에 의하여

$\angle\mathrm{AEH}=\frac{\pi}{6}$

삼각형의 넓이를 구하는 공식에 의하여

$(\triangle\mathrm{ACD}$의 넓이$)=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AE}}\times\overline{\mathrm{CD}}=40$

$\overline{\mathrm{CD}}=10$이므로 $\overline{\mathrm{AE}}=8$

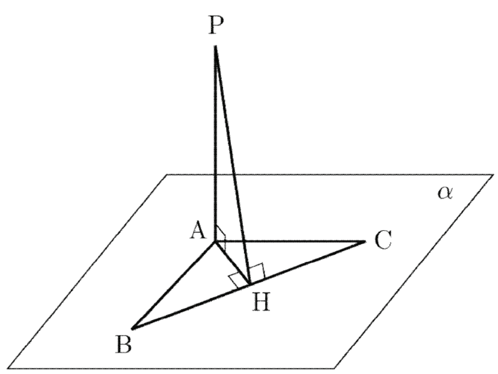
직각삼각형 AEH에서 특수각의 삼각비에 의하여

$\therefore\ \overline{\mathrm{AH}}=\overline{\mathrm{EA}}\times\sin\frac{\pi}{6}=4$

답 ②

S014 ㅣ답 ②

[풀이1]



점 P에서 평면 α에 내린 수선의 발이 A이므로

$\overline{\mathrm{PA}}\perp\alpha$

점 A에서 직선 BC에 내린 수선의 발을 H라고 하면

$\overline{\mathrm{AH}}\perp\overline{\mathrm{BC}}$

삼수선의 정리에 의하여

$\overline{\mathrm{PH}}\perp\overline{\mathrm{BC}}$

점 P와 직선 BC 사이의 거리는 선분 PH의 길이이다.

직각이등변삼각형 ABC에서

$\angle\mathrm{CAH}+\angle\mathrm{HAB}=\frac{\pi}{2}$, $\angle\mathrm{CAH}=\angle\mathrm{HAB}$

이므로 $\angle\mathrm{HAB}=\frac{\pi}{4}$

점 H는 선분 BC의 중점이므로

$\overline{\mathrm{BH}}=3$

직각삼각형 ABH에서 특수각의 삼각비에 의하여

$\frac{\overline{\mathrm{HB}}}{\overline{\mathrm{AH}}}=\tan\frac{\pi}{4}$ 즉, $\overline{\mathrm{AH}}=3$

직각삼각형 PAH에서 피타고라스의 정리에 의하여

$\overline{\mathrm{PH}}=\sqrt{\overline{\mathrm{PA}}^2+\overline{\mathrm{AH}}^2}=\sqrt{4^2+3^2}=5$

따라서 P와 직선 BC 사이의 거리는 5이다.

답 ②

[풀이2] +기하와 벡터(직선의 방정식)

직각이등변삼각형 ABC의 빗변의 길이가 6이므로

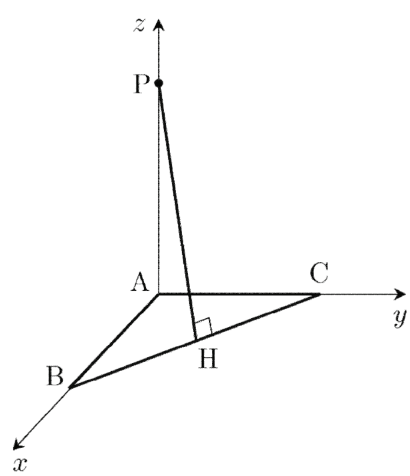
$\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{AC}}=3\sqrt{2}$

네 점 A, B, C, P의 좌표가 각각

$\mathrm{A}(0,\ 0,\ 0)$, $\mathrm{B}(3\sqrt{2},\ 0,\ 0)$,

$\mathrm{C}(0,\ 3\sqrt{2},\ 0)$, $\mathrm{P}(0,\ 0,\ 4)$

가 되도록 좌표공간을 도입하자.



점 P에서 직선 BC에 내린 수선의 발을 H라고 하자.

직선 BC의 방정식은

$x+y=3\sqrt{2}$, $z=0$

직선 BC 위의 점 H의 x좌표를 t라고 하면

$\mathrm{H}(t,\ 3\sqrt{2}-t,\ 0)$

두 직선 PH, BC가 서로 수직이므로

$\overrightarrow{PH}\cdot\overrightarrow{BC}$

$=(t,\ 3\sqrt{2}-t,\ -4)\cdot(-3\sqrt{2},\ 3\sqrt{2},\ 0)$

$=-6\sqrt{2}t+18=0$에서 $t=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

$H\left(\dfrac{3\sqrt{2}}{2},\ \dfrac{3\sqrt{2}}{2},\ 0\right)$

두 점 사이의 거리 공식에 의하여

$\overline{PH}=\sqrt{\left(\dfrac{3\sqrt{2}}{2}-0\right)^2+\left(\dfrac{3\sqrt{2}}{2}-0\right)^2+(0-4)^2}=5$

따라서 P와 직선 BC 사이의 거리는 5이다.

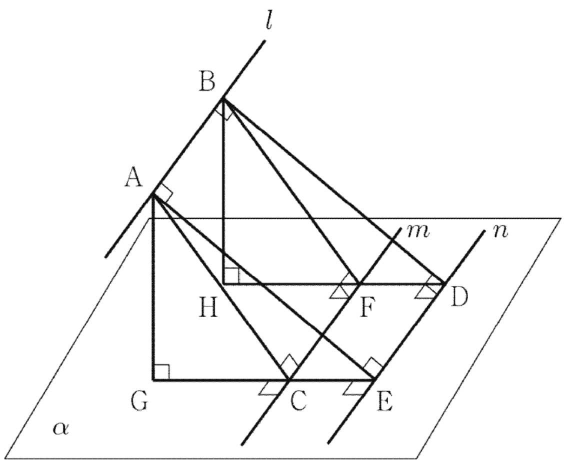
답 ②

S015 | 답 30

[풀이1]

서로 평행한 두 직선 m, n으로 결정되는 평면을 α라고 하자.

점 A에서 직선 n과 평면 α에 내린 수선의 발을 각각 E, G, 점 B에서 직선 m과 평면 α에 내린 수선의 발을 각각 F, H라고 하자.



네 점 A, E, D, B는 서로 평행한 두 직선 l, n으로 결정되는 평면 위에 있다.

$\angle DBA=\angle AED=90^\circ$

$\overline{AB}/\!/\overline{ED}$이므로 평행선의 성질에 의하여

$\angle EDB=\angle BAE=90^\circ$

직사각형의 정의에 의하여 □AEDB는 직사각형이다.

마찬가지의 방법으로 □ACFB는 직사각형이다.

$\overline{AG}\perp\alpha$, $\overline{AE}\perp n$

이므로 삼수선의 정리에 의하여

$\overline{EG}\perp n$ …㉠

마찬가지의 방법으로

$\overline{CG}\perp m$ …㉡

㉠, ㉡에 의하여 세 점 G, C, E는 한 직선 위에 있다.

마찬가지의 방법으로

세 점 H, F, D는 한 직선 위에 있다.

□CEDF의 네 내각의 크기가 모두 같으므로

직사각형의 정의에 의하여 □CEDF는 직사각형이다.

직사각형 AEDB에서 $\overline{DE}=\overline{BA}=2\sqrt{2}$이므로

직각삼각형 DCE에서 피타고라스의 정리에 의하여

$\overline{CE}=\sqrt{\overline{DC}^2-\overline{DE}^2}=1$

직사각형 AEDB에서

$\overline{AE}=\overline{BD}=4\sqrt{2}$

$\overline{AG}=a$, $\overline{GC}=b$로 두자.

직각삼각형 AGC에서 피타고라스의 정리에 의하여

$5^2=a^2+b^2$

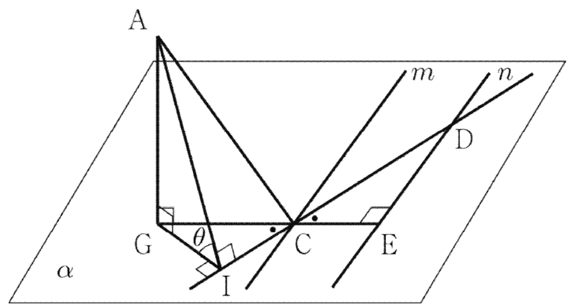
직각삼각형 AGE에서 피타고라스의 정리에 의하여

$(4\sqrt{2})^2=a^2+(b+1)^2$

a, b에 대한 연립방정식을 풀면

$a=4$, $b=3$

점 A에서 직선 CD에 내린 수선의 발을 I라고 하자.



$\overline{CG}=\overline{CD}$, $\angle GCI=\angle DCE$(맞꼭지각)

이므로 RHA합동 조건에 의하여

두 직각삼각형 GCI, DCE는 서로 합동이다.

$\overline{IG}=\overline{ED}=2\sqrt{2}$

$\overline{AI}\perp\overline{CD}$, $\overline{AG}\perp\alpha$

이므로 삼수선의 정리에 의하여

$\overline{IG}\perp\overline{CD}$

두 평면 α, ACD가 이루는 각의 크기는 θ이므로

이면각의 정의에 의하여

$\angle AIG=\theta$

직각삼각형 AIG에서 삼각비의 정의에 의하여

$\tan\theta=\dfrac{\overline{GA}}{\overline{IG}}=\sqrt{2}$

$\therefore\ 15\tan^2\theta=30$

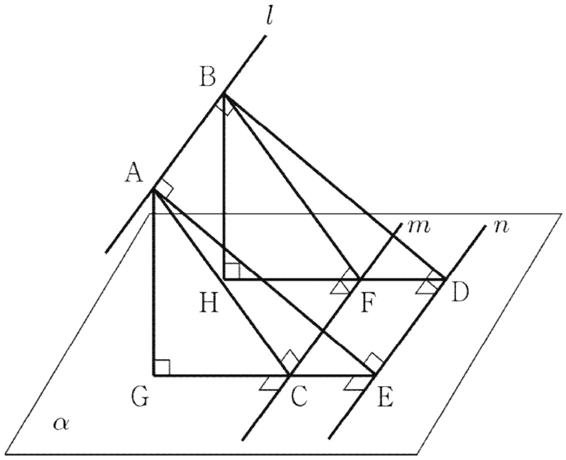
답 30

[풀이2] +기하와 벡터(정사영)

서로 평행한 두 직선 m, n으로 결정되는 평면을 α라고 하자.

점 A에서 직선 n과 평면 α에 내린 수선의 발을 각각 E, G, 점 B에서 직선 m과 평면 α에 내린 수선의 발을 각각

F, H라고 하자.



네 점 A, E, D, B는 서로 평행한 두 직선 l, n으로 결정되는 평면 위에 있다.

$\angle \mathrm{DBA} = \angle \mathrm{AED} = 90^\circ$

$\overline{\mathrm{AB}} // \overline{\mathrm{ED}}$ 이므로 평행선의 성질에 의하여

$\angle \mathrm{EDB} = \angle \mathrm{BAE} = 90^\circ$

직사각형의 정의에 의하여

□AEDB는 직사각형이다.

마찬가지의 방법으로

□ACFB는 직사각형이다.

$\overline{\mathrm{AG}} \perp \alpha$, $\overline{\mathrm{AE}} \perp n$

이므로 삼수선의 정리에 의하여

$\overline{\mathrm{EG}} \perp n$ …㉠

마찬가지의 방법으로

$\overline{\mathrm{CG}} \perp m$ …㉡

㉠, ㉡에 의하여 세 점 G, C, E는 한 직선 위에 있다.

마찬가지의 방법으로

세 점 H, F, D는 한 직선 위에 있다.

□CEDF의 네 내각의 크기가 모두 같으므로

직사각형의 정의에 의하여 □CEDF는 직사각형이다.

직사각형 AEDB에서 $\overline{\mathrm{DE}} = \overline{\mathrm{BA}} = 2\sqrt{2}$ 이므로

직각삼각형 DCE에서 피타고라스의 정리에 의하여

$\overline{\mathrm{CE}} = \sqrt{\overline{\mathrm{DC}}^2 - \overline{\mathrm{DE}}^2} = 1$

직사각형 AEDB에서

$\overline{\mathrm{AE}} = \overline{\mathrm{BD}} = 4\sqrt{2}$

$\overline{\mathrm{AG}} = a$, $\overline{\mathrm{GC}} = b$로 두자.

직각삼각형 AGC에서 피타고라스의 정리에 의하여

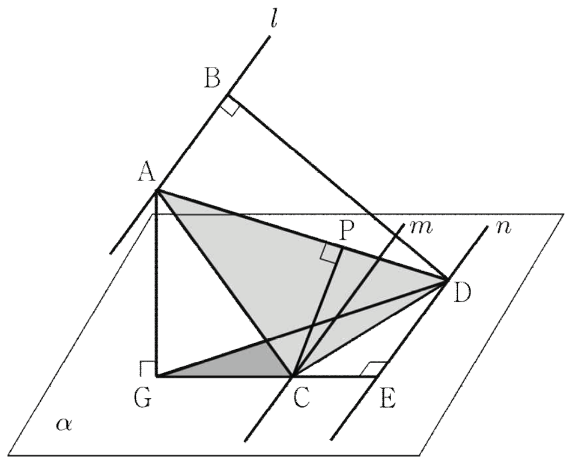
$5^2 = a^2 + b^2$

직각삼각형 AGE에서 피타고라스의 정리에 의하여

$(4\sqrt{2})^2 = a^2 + (b+1)^2$

a, b에 대한 연립방정식을 풀면

$a = 4$, $b = 3$



삼각형 ACD의 평면 α 위로의 정사영은 삼각형GCD이다.

두 삼각형 ACD, GCD의 넓이를 각각 S, T라고 하자.

직각삼각형 ADB에서 피타고라스의 정리에 의하여

$\overline{\mathrm{AD}} = \sqrt{\overline{\mathrm{AB}}^2 + \overline{\mathrm{BD}}^2} = 2\sqrt{10}$

점 C에서 선분 AD에 내린 수선의 발을 P,

$\overline{\mathrm{CP}} = c$, $\overline{\mathrm{AP}} = d$라고 하자.

직각삼각형 ACP에서 피타고라스의 정리에 의하여

$5^2 = c^2 + d^2$

직각삼각형 CDP에서 피타고라스의 정리에 의하여

$3^2 = c^2 + (2\sqrt{10} - d)^2$

c, d에 대한 연립방정식을 풀면

$c = \dfrac{3\sqrt{15}}{5}$, $d = \dfrac{7\sqrt{10}}{5}$

삼각형의 넓이를 구하는 공식에 의하여

$S = \dfrac{1}{2} \times \overline{\mathrm{AD}} \times \overline{\mathrm{CP}} = 3\sqrt{6}$

$T = \dfrac{1}{2} \times \overline{\mathrm{GC}} \times \overline{\mathrm{ED}} = 3\sqrt{2}$

두 평면 ACD, α가 이루는 각의 크기가 θ이므로

정사영의 넓이에 대한 공식에 의하여

$\cos\theta = \dfrac{T}{S} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

θ는 예각이므로

$\tan\theta = \sqrt{2}$

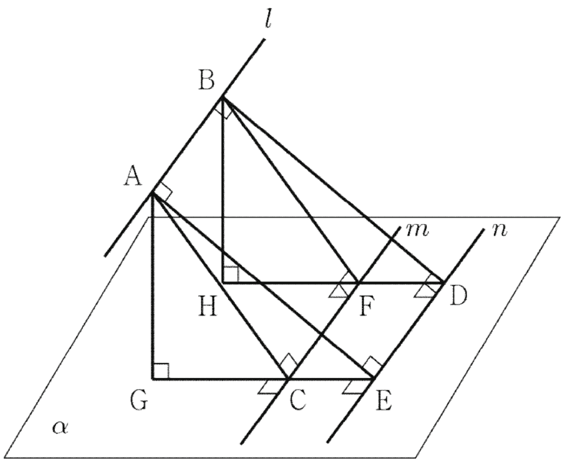
$\therefore\ 15\tan^2\theta = 30$

답 30

[풀이3] +기하와 벡터(평면의 방정식)

서로 평행한 두 직선 m, n으로 결정되는 평면을 α라고 하자.

점 A에서 직선 n과 평면 α에 내린 수선의 발을 각각 E, G, 점 B에서 직선 m과 평면 α에 내린 수선의 발을 각각 F, H라고 하자.



네 점 A, E, D, B는 서로 평행한 두 직선 l, n으로 결정되는 평면 위에 있다.

$\angle \mathrm{DBA} = \angle \mathrm{AED} = 90^\circ$

$\overline{\mathrm{AB}} /\!/ \overline{\mathrm{ED}}$이므로 평행선의 성질에 의하여

$\angle \mathrm{EDB} = \angle \mathrm{BAE} = 90^\circ$

직사각형의 정의에 의하여

□AEDB는 직사각형이다.

마찬가지의 방법으로

□ACFB는 직사각형이다.

$\overline{\mathrm{AG}} \perp \alpha$, $\overline{\mathrm{AE}} \perp n$

이므로 삼수선의 정리에 의하여

$\overline{\mathrm{EG}} \perp n$ … ㉠

마찬가지의 방법으로

$\overline{\mathrm{CG}} \perp m$ … ㉡

㉠, ㉡에 의하여 세 점 G, C, E는 한 직선 위에 있다.

마찬가지의 방법으로

세 점 H, F, D는 한 직선 위에 있다.

□CEDF의 네 내각의 크기가 모두 같으므로

직사각형의 정의에 의하여 □CEDF는 직사각형이다.

직사각형 AEDB에서 $\overline{\mathrm{DE}} = \overline{\mathrm{BA}} = 2\sqrt{2}$이므로

직각삼각형 DCE에서 피타고라스의 정리에 의하여

$\overline{\mathrm{CE}} = \sqrt{\overline{\mathrm{DC}}^2 - \overline{\mathrm{DE}}^2} = 1$

직사각형 AEDB에서

$\overline{\mathrm{AE}} = \overline{\mathrm{BD}} = 4\sqrt{2}$

$\overline{\mathrm{AG}} = a$, $\overline{\mathrm{GC}} = b$로 두자.

직각삼각형 AGC에서 피타고라스의 정리에 의하여

$5^2 = a^2 + b^2$

직각삼각형 AGE에서 피타고라스의 정리에 의하여

$(4\sqrt{2})^2 = a^2 + (b+1)^2$

a, b에 대한 연립방정식을 풀면

$a = 4$, $b = 3$

$\overline{\mathrm{AC}} \perp m$, $\overline{\mathrm{CE}} \perp m$이므로 $\mathrm{ACE} \perp m$

평면 α는 직선 m을 포함하므로

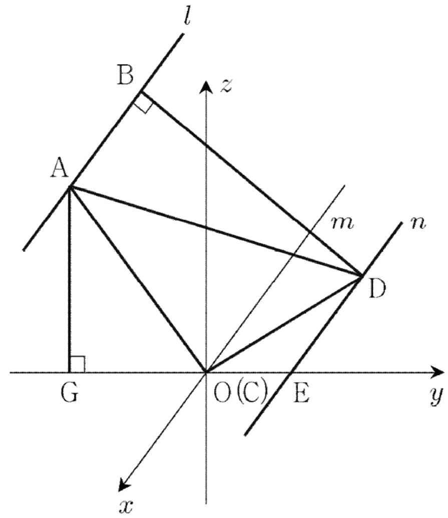
$\alpha \perp \mathrm{ACE}$

이제 세 점 A, C, D의 좌표가 각각

$\mathrm{A}(0,\ -3,\ 4)$, $\mathrm{C}(0,\ 0,\ 0)$, $\mathrm{D}(-2\sqrt{2},\ 1,\ 0)$

이 되도록 좌표공간을 도입하자.

이때, 두 평면 α, ACE는 각각 xy평면, yz평면에 일치한다.



평면 ACD가 x축에 평행하지 않으므로 평면 ACD의 법선벡터의 x성분은 0이 아니다.

평면 ACD의 법선벡터를

$\overrightarrow{n_1} = (1,\ a,\ b)$

성분에 의한 벡터의 내적을 하면

$\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{\mathrm{CA}} = (1,\ a,\ b) \cdot (0,\ -3,\ 4)$

$= -3a + 4b = 0$

$\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{\mathrm{CD}} = (1,\ a,\ b) \cdot (-2\sqrt{2},\ 1,\ 0)$

$= -2\sqrt{2} + a = 0$

a, b에 대한 연립방정식을 풀면

$a = 2\sqrt{2}$, $b = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

평면 ACD의 법선벡터는

$\overrightarrow{n_1} = \left(1,\ 2\sqrt{2},\ \dfrac{3\sqrt{2}}{2}\right)$

xy평면의 법선벡터를

$\overrightarrow{n_2} = (0,\ 0,\ 1)$

두 평면이 이루는 각의 크기를 구하는 공식에 의하여

$\cos\theta = \dfrac{\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2}}{\left|\overrightarrow{n_1}\right|\left|\overrightarrow{n_2}\right|} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

θ는 예각이므로

$\tan\theta = \sqrt{2}$

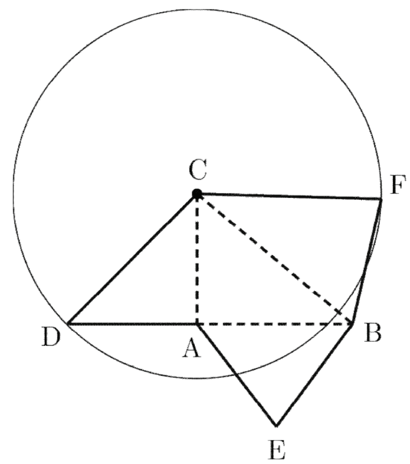
$\therefore\ 15\tan^2\theta = 30$

답 30

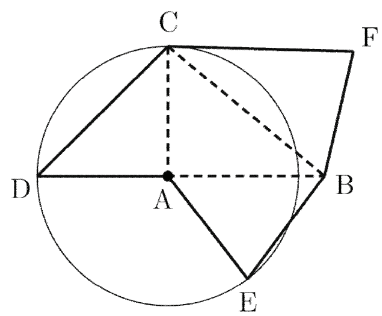
S016 ㅣ답 ⑤

[풀이1]

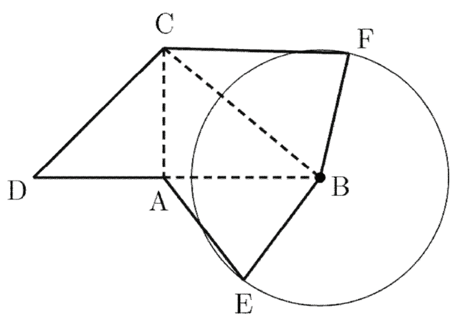
주어진 전개도를 접어서 사면체를 만들 수 있으므로 다음이 성립한다.



위의 그림에서 $\overline{\mathrm{CD}}=\overline{\mathrm{CF}}$이다.

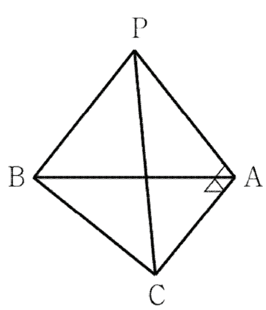


위의 그림에서 $\overline{\mathrm{AE}}=\overline{\mathrm{AD}}=\overline{\mathrm{AC}}$이다.



위의 그림에서 $\overline{\mathrm{BE}}=\overline{\mathrm{BF}}$이다.

사면체 PABC는 다음과 같다.



ㄱ. (참)

주어진 조건에 의하여

$\overline{\mathrm{AC}}=\overline{\mathrm{AP}}(=\overline{\mathrm{AD}})$

이므로 △PCA는 $\angle \mathrm{A}=90^{\circ}$인 직각이등변삼각형이다.

직각삼각형 PCA에서 피타고라스의 정리에 의하여

$\overline{\mathrm{CP}}=\sqrt{\overline{\mathrm{CA}}^{2}+\overline{\mathrm{AP}}^{2}}=\sqrt{2}\,\overline{\mathrm{AC}}$

그런데 주어진 조건에서

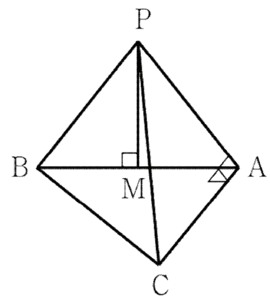
$\overline{\mathrm{AC}}=\overline{\mathrm{BE}}(=\overline{\mathrm{BP}})$이므로 $\overline{\mathrm{CP}}=\sqrt{2}\,\overline{\mathrm{BP}}$

ㄴ. (참)

점 P가 평면 ABC 위에 있으면 사면체 PABC가 만들어지지 않으므로 점 P는 평면 ABC 위에 있지 않다.

두 직선 AB, CP는 한 평면 위에 있지 않으므로 두 직선 AB, CP는 꼬인 위치에 있다.

ㄷ. (참)



이등변삼각형의 성질에 의하여

$\overline{\mathrm{PM}}\perp\overline{\mathrm{AB}}$ …㉠

주어진 조건에 의하여

$\overline{\mathrm{AB}}\perp\overline{\mathrm{AC}}$, $\overline{\mathrm{AP}}\perp\overline{\mathrm{AC}}$

삼수선의 정리에 의하여

$\overline{\mathrm{PM}}\perp\mathrm{ABC}$

직선과 평면의 수직에 대한 정의에 의하여

$\overline{\mathrm{PM}}\perp\overline{\mathrm{AC}}$ …㉡

직선과 평면의 수직에 대한 정리에 의하여

$\overline{\mathrm{PM}}\perp\mathrm{ABC}$ (∵㉠, ㉡)

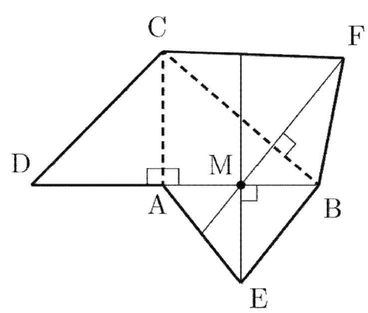
직선과 평면의 수직에 대한 정의에 의하여

$\overline{\mathrm{BC}}\perp\overline{\mathrm{PM}}$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

[참고1]

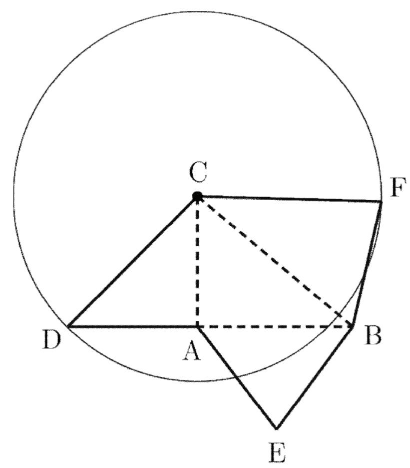


점 P에서 평면 ABC에 내린 수선의 발은 M이다.

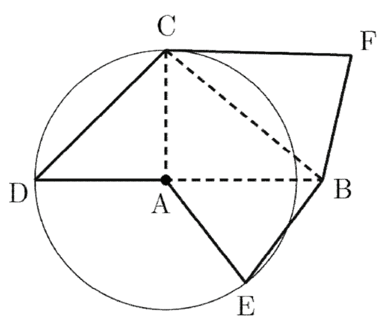
이때, M은 점 E를 지나고 직선 AB에 수직인 직선과 점 F

를 지나고 직선 BC에 수직인 직선의 교점이다. 점 D를 지나고 직선 CA에 수직인 직선도 점 M을 지난다.

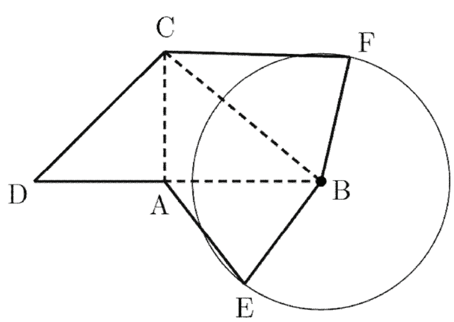
[풀이2] +기하와 벡터(평면의 방정식)
주어진 전개도를 접어서 사면체를 만들 수 있으므로 다음이 성립한다.



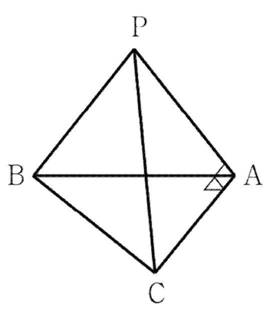
위의 그림에서 $\overline{\mathrm{CD}}=\overline{\mathrm{CF}}$이다.



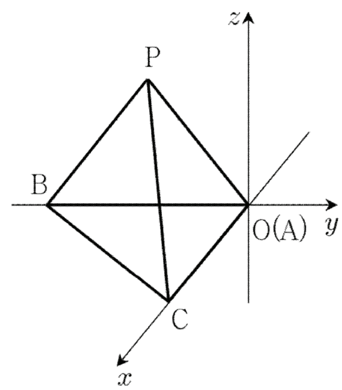
위의 그림에서 $\overline{\mathrm{AE}}=\overline{\mathrm{AD}}=\overline{\mathrm{AC}}$이다.



위의 그림에서 $\overline{\mathrm{BE}}=\overline{\mathrm{BF}}$이다.
사면체 PABC는 다음과 같다.



$\overline{\mathrm{AB}} \perp \overline{\mathrm{AC}}$, $\overline{\mathrm{AP}} \perp \overline{\mathrm{AC}}$
직선과 평면의 수직에 대한 정리에 의하여
$\mathrm{APB} \perp \overline{\mathrm{AC}}$
두 모서리 AB, AC의 길이를 각각 $2a$, b로 두어도 풀이의 일반성을 잃지 않는다.
(단, $0<a<b$이다.)
이제 세 점 A, B, C의 좌표가 각각
$\mathrm{A}(0,\ 0,\ 0)$, $\mathrm{B}(0,\ -2a,\ 0)$, $\mathrm{C}(b,\ 0,\ 0)$
이 되도록 좌표공간을 도입하자.
평면 APB는 yz평면과 일치하므로
점 P의 좌표는
$\mathrm{P}(0,\ -a,\ \sqrt{b^2-a^2})$

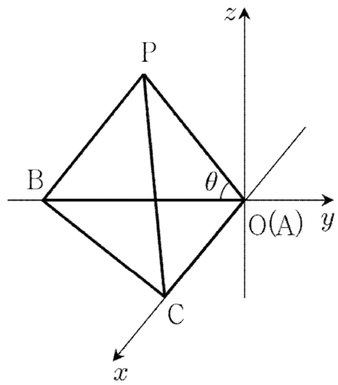


ㄱ. (참)
두 점 사이의 거리 공식에 의하여
$\overline{\mathrm{CP}}=\sqrt{2}b$, $\overline{\mathrm{BP}}=b$
$\therefore\ \overline{\mathrm{CP}}=\sqrt{2}\,\overline{\mathrm{BP}}$
ㄴ. (참)
점 P가 xy평면 위에 있다고 가정하자.
점 P의 z좌표는 0이므로 $b=a$인데 이는 가정에 모순이다.
따라서 점 P는 xy평면 위에 있지 않다.
두 직선 AB, CP는 한 평면 위에 있지 않으므로 두 직선 AB, CP는 꼬인 위치에 있다.
ㄷ. (참)
내분점의 공식에 의하여
$\mathrm{M}(0,\ -a,\ 0)$
성분으로 주어진 벡터의 연산을 하면
$\overrightarrow{\mathrm{PM}}=\overrightarrow{\mathrm{OM}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(0,\ 0,\ -\sqrt{b^2-a^2})$
$\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(b,\ 2a,\ 0)$
성분으로 주어진 벡터의 내적을 하면
$\overrightarrow{\mathrm{PM}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BC}}$
$=(0,\ 0,\ -\sqrt{b^2-a^2})\cdot(b,\ 2a,\ 0)=0$
이므로
$\overline{\mathrm{PM}} \perp \overline{\mathrm{BC}}$
이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.
답 ⑤

[참고2] +기하와 벡터(점의 좌표)

좌표공간을 도입하고 각 점의 좌표를 정할 때 삼각함수를 이용할 수도 있다.

$\overline{AC}=1$, $\angle PAB=\theta$(단, θ는 예각)으로 두자.



세 점 A, B, C의 좌표를 각각

A$(0,\ 0,\ 0)$, B$(0,\ -2\cos\theta,\ 0)$, C$(1,\ 0,\ 0)$

두 점 P, M의 좌표는 각각

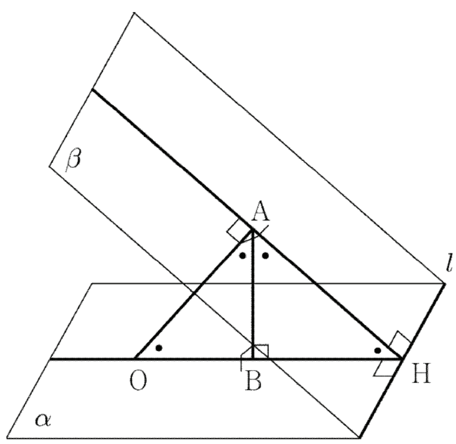
P$(0,\ -\cos\theta,\ \sin\theta)$, M$(0,\ -\cos\theta,\ 0)$

S017

| 답 10

[풀이1]

두 평면 α와 β의 교선을 l, 점 A에서 평면 α에 내린 수선의 발을 B, 점 B에서 직선 l에 내린 수선의 발을 H라고 하자.



$\overline{AB}\perp\alpha$, $\overline{BH}\perp l$

이므로 삼수선의 정리에 의하여

$\overline{AH}\perp l$ …㉠

점 A는 주어진 구를 잘라서 생긴 원 C_2의 중심이므로

$\overline{OA}\perp\beta$ …㉡

㉠, ㉡에서 삼수선의 정리에 의하여

$\overline{OH}\perp l$

두 직선 OH, BH는 각각 직선 l에 수직이므로

세 점 O, B, H는 한 직선 위에 있다.

평면 ABH는 직선 BH를 포함하므로 점 O는 평면 ABH 위에 있다.

직각삼각형 ABH의 세 내각의 합은 180°이므로

$\angle HAB=45^\circ$

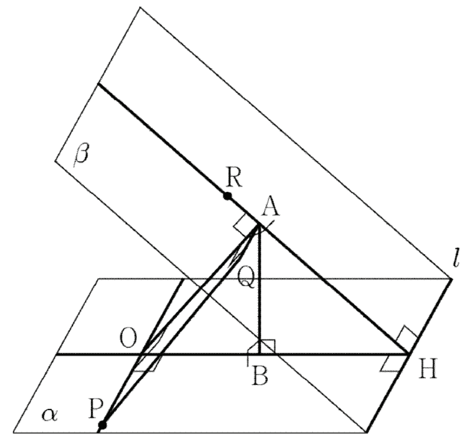
$\angle HAO=90^\circ$이므로 $\angle BAO=45^\circ$

직각삼각형 AOB의 세 내각의 합은 180°이므로

$\angle AOB=45^\circ$

직각삼각형 AOB에서 특수각의 삼각비에 의하여

$\overline{OA}=\sqrt{3}$ …㉢



직선과 평면의 수직에 대한 정의에 의하여

$\overline{OA}\perp\beta$에서 $\overline{OA}\perp\overline{AQ}$

조건 (나)에서 OP//AQ이므로

$\angle POA=90^\circ$

한편

$\overline{AB}\perp\alpha$, $\overline{AO}\perp\overline{OP}$

이므로 삼수선의 정리에 의하여

$\overline{BO}\perp\overline{OP}$

이를 만족시키는 원 C_1 위의 점 P의 개수는 2이다.

이 두 점 중에서 어떤 점을 잡아도 풀이의 일반성을 잃지 않는다.

OH(OB)$\perp l$이므로

OP//l

조건 (나)에서 OP//AQ이므로

AQ//l

즉, 세 직선 l, OP, AQ는 평행하다. 이때, 네 점 A, Q, P, O는 한 평면 위에 있다.

점 R에서 직선 PQ에 내린 수선의 발을 S, 점 P를 지나고 직선 OA에 평행한 직선과 직선 AQ의 교점을 D라고 하자.