평균값정리 5문

1. ebs 수능완성 나형 p.79 19번

함수 $f(x)=-x^3-5x^2+3$에 대하여 닫힌 구간 [-1, 2]에서 평균값 정리를 만족시키는 상수 c의 값은?

① $-\frac{1}{3}$ ② 0 ③ $\frac{1}{3}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ 1

4

2. 2017 ebs 수능특강 나형 p.153 유제 4번

다음 조건을 만족시키는 모든 함수 $f(x)$에 대하여 $f(1)$의 최댓값을 구하시오.

(가) 닫힌 구간 $[0,1]$에서 연속이고 열린 구간 $(0,1)$에서 미분가능하다.
(나) $0<c<1$인 모든 c에 대하여 $|f'(c)|\le 5$이다.
(다) $f(0)=3$

8

3. ebs 수능완성 나형 p.79 20번

다항함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=-f(x)$를 만족시킨다. $f(1)=1, f(2)=0$일 때, 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

5

ㄱ. $f(0)=0$
ㄴ. 방정식 $f'(x)=0$은 열린 구간 $(0,2)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.
ㄷ. 방정식 $f'(x)=1$은 적어도 두 개의 실근을 갖는다.

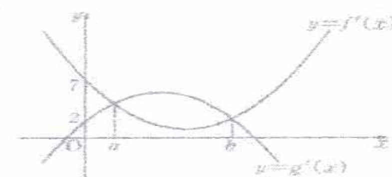
① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

4. 2016 나형 7월 18번 교육청

그림과 같이 두 삼차함수 $f(x)$, $g(x)$의 도함수 $y=f'(x)$, $y=g'(x)$의 그래프가 만나는 서로 다른 두 점의 x좌표는 a, $b(0<a<b)$이다. 함수 $h(x)$를

$$h(x)=f(x)-g(x)$$

라 할 때, [보기]에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, $f'(0)=7$, $g'(0)=2$) (4점)



[보기]

ㄱ. 함수 $h(x)$는 $x=a$에서 극댓값을 갖는다.
ㄴ. $h(b)=0$이면 방정식 $h(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.
ㄷ. $0<\alpha<\beta<b$인 두 실수 α, β에 대하여 $h(\beta)-h(\alpha)<5(\beta-\alpha)$이다.

5

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

5. ebs 수능완성 나형 p.79 21번

실수 전체의 집합에서 미분가능하고 도함수가 연속인 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $x\le 2$일 때, $f(x)=ax^2+bx$ (a, b는 자연수)이다.
(나) 2 이상의 임의의 서로 다른 두 실수 $x_1, x_2\,(x_1<x_2)$에 대하여 $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\le 9$이다.

$f(4)$의 최댓값을 구하시오.

32

1. $f(x) = -x^3 - 5x^2 + 3$

[-1, 2] 평균값정리 만족 $c=?$

$\frac{f(2)-f(-1)}{2-(-1)} = \frac{-25-(-1)}{3} = \frac{-24}{3} = -8 = f'(c)$ 존재

$-3x^2 - 10x = -8$

$-3x^2 - 10x + 8 = 0$ $(x+4)(3x-2)=0$ $x = \frac{2}{3}, -4$

but (-1, 2)에 존재해야 함.

$c = \frac{2}{3}$ $\boxed{답 ④}$

2. f(1)의 최댓값.

㉮ [0,1] 연속 (0,1) 미분가능 → 평균값정리 적용가능

㉯ $0 < c < 1$ $|f'(c)| \le 5$

$\frac{f(1)-f(0)}{1-0} = f'(c)$ 가 (0,1)에 존재.

$-5 \le \frac{f(1)-3}{1} \le 5$ $-2 \le f(1) \le 8$ $\boxed{답\ 8}$

3. $f(-x) = -f(x)$

→ 기함수

$f(1)=1$ $f(2)=0$

ㄱ. $f(0)=0$

→ 원점대칭 기함수이므로 (참)

ㄴ. $f'(x)=0$ 은 열린구간 (0,2)에서 적어도 하나의 실근을 갖는다

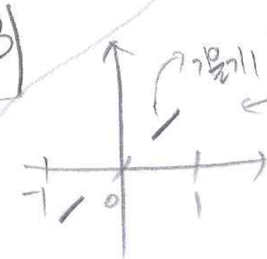
→ [0,2] 연속 (0,2) 미분가능

(다항함수니까)

$\frac{f(2)-f(0)}{2-0} = \frac{0-0}{2} = 0 = f'(c)$가

(0,2)에 존재. (참)

ㄷ. $f'(x)=1$은 적어도 두개의 실근을 갖는다. → (0,1) 미분가능 [0,1] 연속.



기울기1

$\frac{f(1)-f(0)}{1-0}$ = $f'(c)=1$은 (0,1)에 존재

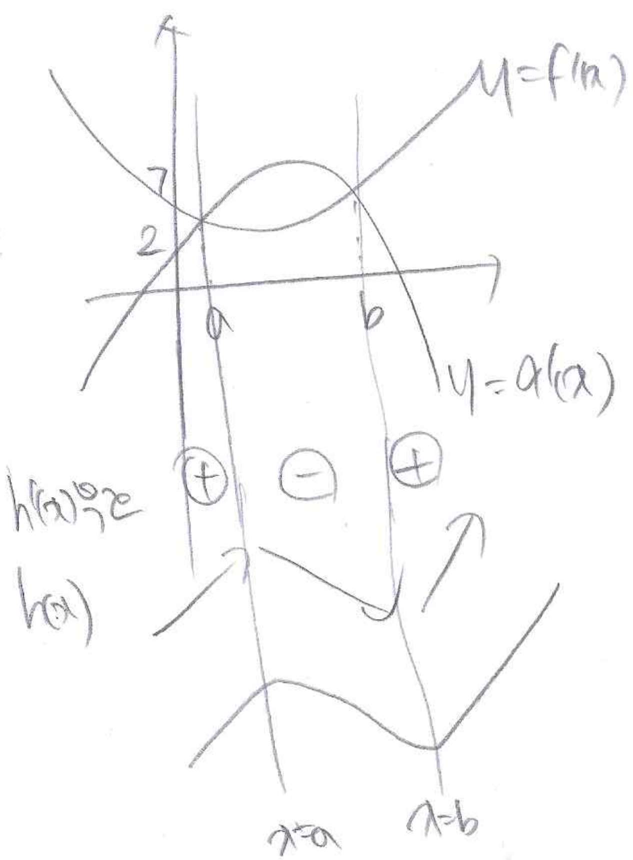
(기함수니까 (-1,0)에도 $f'(c)=1$ 이 존재가능) 참

$\boxed{3, ⑤}$

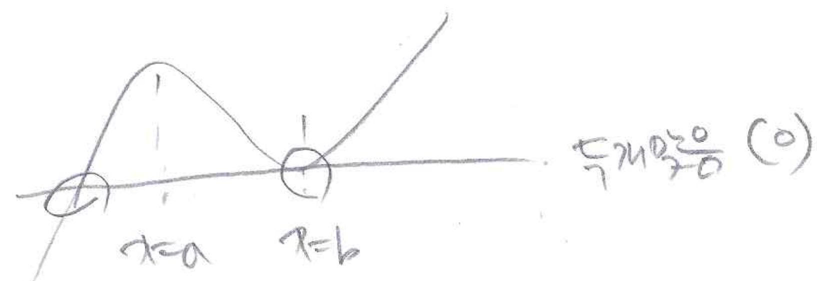
4. $h(x)=f(x)-g(x)$

ㄱ. $h(x)$ $x=a$에서 극대? $h'(x)$의 부호 $+ \to -$ 로 바뀌고 $h'(a)=0$ 이므로 극대이다.

$h'(x)=f'(x)-g'(x)$



ㄴ. $h(b)=0$ 이면 $h(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.



ㄷ. $\boxed{\begin{array}{l} a<\alpha<\beta<b \quad \alpha.\beta \\ h(\beta)-h(\alpha)<5(\beta-\alpha) \end{array}}$

$h(x)$는 $(a.b)$ 미가. $[a.b]$ 연속. 평균값정리에 의해

$\dfrac{h(\beta)-h(\alpha)}{\beta-\alpha}=h'(c)$ 가 존재하며 $h'(x)$는 구간 $(a.b)$ 에서 항상 5보다 작다. 따라서 ㄷ은 참.

답 ⑤

5. $\dfrac{\text{실수전체 미분가능}}{\text{도함수 연속}}$ → 실수전체 연속이므로 평균값정리를 적용가능!

(가) $x \le 2$ $f(x) = ax^2 + bx$ (a, b는 자연수)

(나) 2이상 임의의 서로 다른 두실수 x_1, x_2 $(x_1 < x_2)$

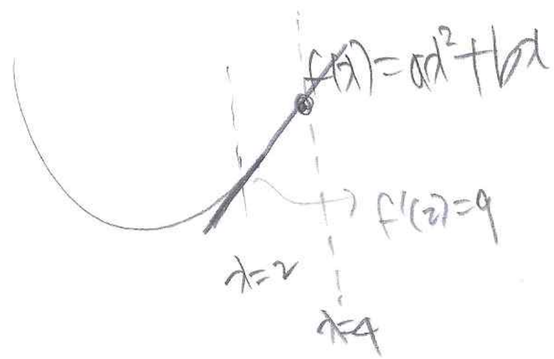
에 대해 $\boxed{\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}} \le 9$ 이다

$f(4)$ 의 최댓값 = ?

($x \ge 2$에서) 와 같아지는 $f'(c)$ 가 존재하며 $f'(c) \le 9$ 이다

$f(4)$가 최대가 되려면 ① 2에서 미분계수가 제일 큰 값을 가진 상태가 되면서

② $x \ge 2$ 에서 미분계수의 최댓값 ($\boxed{f'(c) \le 9}$) 9를 유지해야 $f(4)$가 최대이다.



$f'(x) = 2ax + b$ $f'(2) = 4a + b$이고 $4a + b = 9$가 되는 자연수 a, b는 (1) $a=1$ $b=5$ (2) $a=2$ $b=1$ 이며 (1)의경우 $f(2)$는 14
(2)의경우 $f(2)$는 10

따라서 $a=1$ $b=5$이고, 기울기 9, 한점 $(2, 14)$를 지나는 일차함수를 잡으면 $y = 9(x-2) + 14$

$\boxed{f(4) = 32}$