정답 & 해설

[난문현답 기출 정답]

1. 23
2. 12
3. 16
4. ②
5. 102
6. ①
7. ③
8. ②
9. ②
10. 11

[추가 과제 정답]

1) [정답] ②

$f(x)-2g(x)=h(x)$라 하면

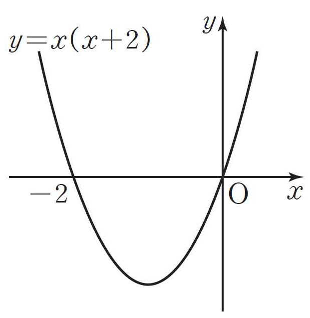
$2g(x)=f(x)-h(x)$

이때, $\lim\limits_{x\to\infty}h(x)=\alpha$ (α는 실수)라 하면 상수함수가 아닌 다항함수 $f(x)$에 대하여 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\pm\infty$이므로

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3f(x)+2g(x)+1}{f(x)+2g(x)+3}=\lim_{x\to\infty}\frac{4f(x)-h(x)+1}{2f(x)-h(x)+3}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{4-\frac{h(x)}{f(x)}+\frac{1}{f(x)}}{2-\frac{h(x)}{f(x)}+\frac{3}{f(x)}}$$
$$=\frac{4-0+0}{2-0+0}$$
$$=2$$

2) [정답] ②

함수 $y=x(x+2)$의 그래프에서



$x\to-2+0$일 때 $y\to-0$이므로

$x(x+2)<0$이다.

즉, $|x(x+2)|=-x(x+2)$이므로

$$\lim_{x\to-2+0}f(x)=\lim_{x\to-2+0}\frac{-x(x+2)}{x(x+1)}$$
$$=\lim_{x\to-2+0}\frac{-(x+2)}{x+1}$$
$$=0$$

$x\to+0$일 때 $y\to+0$이므로 $x(x+2)>0$이다.

즉, $|x(x+2)|=x(x+2)$이므로

$$\lim_{x\to+0}f(x)=\lim_{x\to+0}\frac{x(x+2)}{x(x+1)}=\lim_{x\to+0}\frac{x+2}{x+1}=2$$

$$\lim_{x\to-2+0}f(x)+\lim_{x\to+0}f(x)=0+2=2$$

3) [정답] ③

$\lim\limits_{x\to1}\frac{f(x)+2}{x-1}=3$에서 $x\to1$일 때, (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$이어야 한다.

즉, $\lim\limits_{x\to1}\{f(x)+2\}=0$에서 $f(x)$가 다항함수이므로

$f(1)+2=0 \qquad \therefore\ f(1)=-2$

이때 $-x=t$로 놓으면 $x\to-1$일 때 $t\to1$이므로

$$\lim_{x\to-1}\frac{\{f(-x)\}^2-4}{x^2-1}=\lim_{t\to1}\frac{\{f(t)\}^2-4}{t^2-1}$$
$$=\lim_{t\to1}\frac{\{f(t)+2\}\{f(t)-2\}}{(t-1)(t+1)}$$
$$=\lim_{t\to1}\frac{f(t)+2}{t-1}\times\lim_{t\to1}\frac{f(t)-2}{t+1}$$
$$=3\times\frac{f(1)-2}{1+1}$$
$$=-6$$

4) [정답] 15

함수 $f(x)=x^3+3x^2+k$는 다항함수이므로 닫힌 구간 $[1,\ 2]$에서 연속이다.

또 주어진 조건으로부터 $x>0$에서 x의 값이 증가할 때, $f(x)$의 값도 증가하므로 방정식 $f(x)=0$이 열린 구간 $(1,\ 2)$에서 하나의 실근을 가지려면 $f(1)=k+4<0$이고 $f(2)=k+20>0$이어야 한다.

따라서 $-20<k<-4$를 만족시키는 정수 k는

$-19,\ -18,\ -17,\cdots,\ -5$이고 그 개수는 15이다.

5) [정답] ④

$f(x)=-x^2+4x$에서

$f'(x)=-2x+4$

$f'(3)=-2$이므로 접선 l의 방정식은

$y-2=-2(x-3) \qquad \therefore\ y=-2x+9$

$\mathrm{P}(t,\ -t^2+4t)$, $\mathrm{Q}(t,\ -2t+9)$이므로

$\overline{\mathrm{AP}}=t$, $\overline{\mathrm{PQ}}=t^2-6t+9$

직사각형 APQB의 넓이를 $S(t)$라 하면

$S(t)=\overline{\mathrm{AP}}\times\overline{\mathrm{PQ}}$

$\quad =t(t^2-6t+9)=t^3-6t^2+9t\ \ (0<t<2)$

$S'(t)=3t^2-12t+9$

$\quad =3(t^2-4t+3)=3(t-1)(t-3)$

$t=1$의 좌우에서 $S'(t)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌므로 $S(t)$는 $t=1$에서 극대이면서 최댓값을 갖는다.

따라서 직사각형 APQB의 넓이의 최댓값은

$S(1)=1-6+9=4$

6) [정답] ②

$$\mathrm{M}\left(\frac{(t+2)+(2-t)}{2},\ \frac{(t-2)+(2t^2+t+2)}{2}\right)$$

즉, $\mathrm{M}(2,\ t^2+t)$이므로

$\overline{\mathrm{OM}}^2=2^2+(t^2+t)^2=t^4+2t^3+t^2+4$

따라서 $f(t)=t^4+2t^3+t^2+4$라 하면

$f'(t)=4t^3+6t^2+2t=2t(2t^2+3t+1)$

$\quad =2t(2t+1)(t+1)$

이므로 $f'(t)=0$에서

$t=-1$ 또는 $t=-\frac{1}{2}$ 또는 $t=0$

$-2\le t\le1$에서 함수 $f(t)$의 증가와 감소를 나타내면 다음과 같다.

x	-2	$\cdots$	-1	$\cdots$	$-\frac{1}{2}$	$\cdots$	0	$\cdots$	1
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	8	↘	4	↗	$\frac{65}{16}$	↘	4	↗	8

$f(-2)=f(1)=8$,

$f(-1)=f(0)=4$,

$$f\left(-\frac{1}{2}\right)=\left(-\frac{1}{2}\right)^4+2\times\left(-\frac{1}{2}\right)^2+4=\frac{65}{16}$$

따라서 $\overline{\mathrm{OM}}^2$의 최솟값은 $t=-1$ 또는 $t=0$일 때, 4이다.

7) [정답] ③

지면에 도달하는 순간 물체의 높이는 0, 즉 $h(t)=0$이므로

$-5t^2+20t+25=0$

$t^2-4t-5=0,\quad (t-5)(t+1)=0$

$\therefore\ t=5\ (\because\ t\ge0)$

따라서 $t=5$일 때 물체가 지면에 도달한다.

이때, 물체의 속도는 $h'(t)=-10t+20$ 이므로

$h'(5)=-50+20=-30$

8) [정답] ④

점 P 의 속도를 $v(t)$라 하면

$v(t)=f'(t)=3t^2-4t-4$

점 P 가 운동 방향을 바꿀 때의 속도는 0 이므로

$3t^2-4t-4=0$, $(3t+2)(t-2)=0$

$\therefore\ t=2\ (\because\ t>0)$

점 P 의 가속도를 $a(t)$라 하면

$a(t)=v'(t)=6t-4$

따라서 $t=2$ 일 때 점 P 의 가속도는 $a(2)=8$

9) [정답] ④

$$\int_0^2 f(x)dx=\int_a^2 f(x)dx \qquad \cdots\cdots ㉠$$

$$\left\{\int_0^a f(x)dx+\int_a^2 f(x)dx\right\}-\int_a^2 f(x)dx=0$$

$$\therefore\ \int_0^a f(x)dx=0$$

$$\begin{aligned}\int_0^a f(x)dx&=\int_0^a\{x^3-(2+a)x^2+2ax\}dx\\&=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{2+a}{3}x^3+ax^2\right]_0^a\\&=\frac{a^4}{4}-\frac{(2+a)a^3}{3}+a^3\\&=\frac{a^3(4-a)}{12}=0\end{aligned}$$

$a^3(4-a)=0 \qquad \therefore\ a=0$ 또는 $a=4$

따라서 ㉠을 만족시키는 서로 다른 모든 상수 a 의 값의 합은 4 이다.

10) [정답] ①

함수 $f(x)$는 삼차항의 계수가 1인 삼차함수이고, 조건 (가)에서 모든 실수 x 에 대하여 $f'(x)=f'(-x)$이므로 $f'(x)=3x+a$ (a는 상수)로 놓을 수 있다.

$$\begin{aligned}f(x)&=\int f'(x)dx\\&=\int(3x^2+a)dx\\&=x^3+ax+C\ (\text{단, } C\text{는 적분상수})\end{aligned}$$

이므로 조건 (나)에 의하여

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 f(x)dx&=\int_{-1}^1(x^3+ax+C)dx\\&=\int_{-1}^1(x^3+ax)dx+\int_{-1}^1 Cdx\\&=0+\Big[Cx\Big]_{-1}^1\\&=2C=6\end{aligned}$$

$\therefore\ C=3$

$f'(1)=8$이므로

$3+a=8 \qquad \therefore\ a=5$

따라서 $f(x)=x^3+5x+3$이므로

$f(1)=1+5+3=9$

11) [정답] -10

$$\begin{aligned}S_{10}+T_{10}&=\frac{10(a_1+a_{10})}{2}+\frac{10(b_1+b_{10})}{2}\\&=5(a_1+a_{10})+5(b_1+b_{10})\\&=5\{(a_1+b_1)+(a_{10}+b_{10})\}\\&=5\{(a_1+b_1)+42\}=160\end{aligned}$$

이므로 $(a_1+b_1)+42=32$

$\therefore a_1+b_1=-10$

12) [정답] ⑤

오른쪽 그림에서 색칠한 직각삼각형은 모두 합동이므로

$$\begin{aligned}&\overline{P_2Q_2}-\overline{P_1Q_1}\\&=\overline{P_3Q_3}-\overline{P_2Q_2}\\&\quad\vdots\\&=\overline{P_{10}Q_{10}}-\overline{P_9Q_9}\end{aligned}$$

즉 $\overline{P_1Q_1}$, $\overline{P_2Q_2}$, $\cdots$, $\overline{P_{10}Q_{10}}$ 의 길이는 이 순서대로 등차수열을 이루므로 이 수열의 공차를 d 라 하면

$\overline{P_2Q_2}=6+\mathrm{d}$, $\overline{P_9Q_9}=10-\mathrm{d}$

$$\overline{P_2Q_2}+\overline{P_3Q_3}+\overline{P_4Q_4}+\ \cdots\ +\overline{P_9Q_9}=\frac{8\{(6+d)+(10-d)\}}{2}=64$$

13) [정답] 0

$3^x=4^y=12^z=k\ (k>0)$로 놓으면 $xyz\neq0$에서 $k\neq1$

밑을 k로 통일한다. $x\neq0,\ y\neq0,\ z\neq0$

$3^x=k$에서 $\quad 3=k^{\frac{1}{x}} \qquad \cdots\cdots ㉠$

$4^y=k$에서 $\quad 4=k^{\frac{1}{y}} \qquad \cdots\cdots ㉡$

$12^z=k$에서 $\quad 12=k^{\frac{1}{z}} \qquad \cdots\cdots ㉢$

㉠×㉡÷㉢을 하면

$3\times4\div12=k^{\frac{1}{x}}\times k^{\frac{1}{y}}\div k^{\frac{1}{z}} \qquad \therefore\ k^{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}-\frac{1}{z}}=1$

그런데 $k\neq1$이므로 $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}-\dfrac{1}{z}=0$

14) [정답] ①

$a^m=b^n=5$ 에서 $\quad \log_a5=m,\ \log_b5=n$

$$\therefore\ \log_5a=\frac{1}{m},\ \log_5b=\frac{1}{n}$$

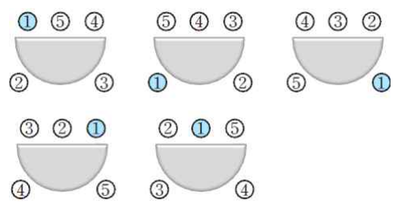
$$\begin{aligned}\therefore\ \log_{ab}b^2&=\frac{\log_5b^2}{\log_5ab}=\frac{2\log_5b}{\log_5a+\log_5b}\\&=\frac{\frac{2}{n}}{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}=\frac{\frac{2}{n}}{\frac{m+n}{mn}}=\frac{2m}{m+n}\end{aligned}$$

15) **정답** 120

5 명을 원형으로 배열하는 방법의 수는

$(5-1)!=4!=24$

이때 주어진 모양의 탁자에서는 원형으로 배열하는 한 가지 방법에 대하여 다음 그림과 같이 서로 다른 경우가 5 가지씩 존재한다.



따라서 구하는 방법의 수는 $\qquad 24\cdot5=120$

16) **정답** 18

가운데 정사각형을 칠하는 방법의 수는 9 이고, 나머지 8 개의 정사각형을 칠하는 방법의 수는

$(8-1)!=7!$

이때 8 개의 정사각형을 칠하는 한 가지 방법에 대하여 주어진 도형에서는 다음 그림과 같이 서로 다른 경우가 2 가지씩 존재한다.

②	③	④
⑨	①	⑤
⑧	⑦	⑥

⑨	②	③
⑧	①	④
⑦	⑥	⑤

따라서 구하는 방법의 수는 $9\cdot7!\cdot2=18\cdot7!$

$\therefore\ k=18$

17) **정답** 7

경품을 받을 확률이 $\dfrac{1}{10}$ 이므로 음료수를 3 병 구입한 사람이 경품으로 1 병의 음료수를 받을 확률은

$${}_3C_1\left(\frac{1}{10}\right)^1\left(\frac{9}{10}\right)^2\cdot\frac{9}{10}=\frac{3\cdot9^3}{10^4}=\frac{3^7}{10^4}$$

따라서 $\dfrac{3^7}{10^4}=\dfrac{3^k}{10^4}$ 이므로 $k=7$

18) [정답] 0.0466

실제로 호텔에 투숙하는 사람 수를 확률변수 X라 하면 X는 이항분포 $\mathrm{B}(22,\ 0.8)$을 따르므로

$$\mathrm{P}(X=x)={}_{22}C_x\,0.8^x\times0.2^{22-x}\ (x=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 22)$$

방이 부족하려면 $X>20$이어야 하므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned}&\mathrm{P}(X>20)=\mathrm{P}(X=21)+\mathrm{P}(X=22)\\&={}_{22}\mathrm{C}_{21}0.8^{21}\times0.2+{}_{22}\mathrm{C}_{22}0.8^{22}\times0.2^{0}\\&=22\times0.009\times0.2+1\times0.007\times1\\&=0.0466\end{aligned}$$

19) [정답] ⑤

$$\begin{aligned}&\mathrm{P}(X=x)={}_{45}\mathrm{C}_{x}\cdot\frac{2^x}{3^{45}}\\&={}_{45}\mathrm{C}_{x}\left(\frac{2}{3}\right)^x\left(\frac{1}{3}\right)^{45-x}\ (x=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 45)\end{aligned}$$

따라서 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(45,\ \frac{2}{3}\right)$를 따르므로

$$\mathrm{E}(X)=45\cdot\frac{2}{3}=30,\ \mathrm{V}(X)=45\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}=10$$

20) [정답] ④

확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}\left(10,\ \frac{1}{5}\right)$을 따르므로

$$\mathrm{P}(X=x)={}_{10}\mathrm{C}_{x}\left(\frac{1}{5}\right)^x\left(\frac{4}{5}\right)^{10-x}\ (x=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 10)$$

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned}&\mathrm{P}(X\le 9)=1-\mathrm{P}(X=10)\\&=1-{}_{10}\mathrm{C}_{10}\left(\frac{1}{5}\right)^{10}\left(\frac{4}{5}\right)^{0}\\&=1-\left(\frac{1}{5}\right)^{10}\end{aligned}$$

21) **정답** 1

$\triangle \mathrm{AB_1P}_n \backsim \triangle \mathrm{AB}_n\mathrm{C}_n$이고 닮음비가 $1:n$이므로

$\overline{\mathrm{AP}_n}:\overline{\mathrm{AC}_n}=1:n$

$$\therefore \overline{\mathrm{AP}_n}=\frac{\overline{\mathrm{AC}_n}}{n}=\frac{\sqrt{3^2+n^2}}{n}=\frac{\sqrt{9+n^2}}{n}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\overline{\mathrm{AP}_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{9+n^2}}{n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{9}{n^2}+1}=1$$

22) **정답** ②

$\mathrm{P}_n\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n^2}\right)$이므로 직선 OP_n의 기울기는 $\frac{1}{n}$이다.

즉 점 P_n을 지나고 직선 OP_n에 수직인 직선의 방정식은

$$y=-n\left(x-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{n^2}=-nx+1+\frac{1}{n^2}$$

따라서 이 직선의 y절편이 $1+\frac{1}{n^2}$이므로

$$a_n=1+\frac{1}{n^2}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\left\{1+\frac{1}{n^2}\right\}=1$$

23) **정답** 1

점 C의 좌표를 $(0,\ y)$, 점 P의 좌표를 $\left(x,\ \frac{1}{2}x^2\right)$으로 놓으면

$\overline{\mathrm{CO}}=\overline{\mathrm{CP}}$, 즉 $\overline{\mathrm{CO}}^2=\overline{\mathrm{CP}}^2$이므로

$$y^2=x^2+\left(\frac{1}{2}x^2-y\right)^2,\quad y^2=x^2+\frac{1}{4}x^4-x^2y+y^2$$

$$\therefore\ y=1+\frac{1}{4}x^2\ (\because x\ne 0)$$

$\mathrm{P}\to\mathrm{O}$이면 $x\to0$이므로 점 C가 한없이 가까워지는 점의 y좌표는

$$\lim_{x\to0}y=\lim_{x\to0}\left(1+\frac{1}{4}x^2\right)=1$$

24) **정답** 6

일차함수 $f(x)$를 $f(x)=ax+b$ ($a\ne0$이고, a, b는 상수)로 놓자.

$\int_{-1}^{1}xf(x)dx=3$에서

$$\begin{aligned}&\int_{-1}^{1}xf(x)dx=\int_{-1}^{1}(ax^2+bx)dx=2a\int_0^1x^2dx\\&=2a\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1=2a\cdot\frac{1}{3}=\frac{2}{3}a\end{aligned}$$

즉 $\frac{2}{3}a=3$이므로 $a=\frac{9}{2}$

$\int_{-1}^{1}x^2f(x)dx=-2$에서

$$\begin{aligned}&\int_{-1}^{1}x^2f(x)dx=\int_{-1}^{1}(ax^3+bx^2)dx=2b\int_0^1x^2dx\\&=2b\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1=2b\cdot\frac{1}{3}=\frac{2}{3}b\end{aligned}$$

즉 $\frac{2}{3}b=-2$이므로 $b=-3$

따라서 $f(x)=\frac{9}{2}x-3$이므로 $f(2)=\frac{9}{2}\cdot2-3=6$

25) **정답** -10

$f(-x)=f(x)$에서 $f(x)$는 우함수이므로 $x^3f(x)$, $xf(x)$는 모두 기함수이다.

$$\begin{aligned}&\therefore\ \int_{-1}^{1}(2x^3-x-1)f(x)dx\\&=2\int_{-1}^{1}x^3f(x)dx-\int_{-1}^{1}xf(x)dx-\int_{-1}^{1}f(x)dx\\&=0-\int_{-1}^{1}f(x)dx=-2\int_0^1f(x)dx\\&=-2\cdot5=-10\end{aligned}$$

26) **정답** 3

$f(x)=-f(-x)$에서 $f(-x)=-f(x)$이므로 $f(x)$는 기함수이다.

$$\begin{aligned}&\therefore\ \int_{-2}^{3}f(x)dx=\int_{-2}^{2}f(x)dx+\int_2^3f(x)dx\\&=0+\int_2^3f(x)dx\\&=\int_0^3f(x)dx-\int_0^2f(x)dx\\&=k-(-5)\end{aligned}$$

이때 $\int_{-2}^{3}f(x)dx=3k-1$이므로

$$k-(-5)=3k-1,\quad 2k=6$$

$$\therefore\ k=3$$

27) **정답** $A+B-C$

$$\begin{aligned}&\int_0^3f(x)dx=\int_0^1f(x)dx+\int_1^3f(x)dx\\&=\left\{\int_0^2f(x)dx-\int_1^2f(x)dx\right\}+\int_1^3f(x)dx\\&=(A-C)+B=A+B-C\end{aligned}$$

28) **정답** ①

$F'(t)=f(t)$로 놓으면

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to1}\frac{1}{x-1}\int_x^1f(t)dt=\lim_{x\to1}\frac{-1}{x-1}\int_1^xf(t)dt\\&=-\lim_{x\to1}\frac{F(x)-F(1)}{x-1}\\&=F'(1)=-f(1)\\&=-4\end{aligned}$$

29) **정답** ③

S_n은 밑변의 길이가 $\frac{1}{n}$이고, 높이가 각각 $\left(\frac{1}{n}\right)^2,\left(\frac{2}{n}\right)^2,\cdots,\left(\frac{n}{n}\right)^2$인 직사각형의 넓이의 합이므로

$$\begin{aligned}&S_n=\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}\right)^2+\frac{1}{n}\left(\frac{2}{n}\right)^2+\cdots+\frac{1}{n}\left(\frac{n}{n}\right)^2\\&=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^2=\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{n^3}\end{aligned}$$

따라서 구하는 넓이 S는

$$\begin{aligned}&S=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\boxed{\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{n^3}}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}=\frac{1}{3}\end{aligned}$$

30) **정답** $\frac{85}{2}$

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{3k}{n}\right)^3\cdot\frac{2}{n}\\&=\frac{2}{3}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{3k}{n}\right)^3\cdot\frac{3}{n}\end{aligned}$$

$$=\frac{2}{3}\int_{1}^{4}x^3dx=\frac{2}{3}\left[\frac{1}{4}x^4\right]_1^4$$
$$=\frac{2}{3}\cdot\frac{255}{4}=\frac{85}{2}$$

31) [정답] 163

$x_1,\ x_2,\ x_3,\ \cdots,\ x_n$ 중 1이 a개, 2가 b개 있다고 하면

$\sum_{i=1}^{n}x_i=1\cdot a+2\cdot b=13$

$\therefore a+2b=13$ …… ㉠

$\sum_{i=1}^{n}x_i^2=1^2\cdot a+2^2\cdot b=23$

$\therefore a+4b=23$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=3,\ b=5$

$\therefore \sum_{i=1}^{n}x_i^5=1^5\cdot 3+2^5\cdot 5=163$

32) [정답] 30

주어진 등차수열의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$\frac{4(2a+3d)}{2}=24,\ \frac{10(2a+9d)}{2}=0$

$2a+3d=12,\ 2a+9d=0$

$\therefore\ a=9,\ d=-2$

따라서 첫째항부터 제 n항까지의 합은

$\frac{n\{2\cdot 9+(n-1)\cdot(-2)\}}{2}=-n^2+10n$

$=-(n-5)^2+25$

이므로 $p=5,\ q=25\quad \therefore\ p+q=30$

33) [정답] ④

연속하는 20개의 자연수 중에서 가장 작은 수를 a라 하면 20개의 자연수는 첫째항이 a, 공차가 1인 등차수열을 이루므로

$\frac{20\{2a+(20-1)\cdot 1\}}{2}=530,\quad 2a+19=53$

$2a=34\quad \therefore\ a=17$

따라서 구하는 가장 큰 수는 $17+19=36$

34) [정답] ①

$b_1+b_3+b_5$

$=a_1+(a_1-2a_3)+(a_1-2a_3+3a_5)$

$=3a_1-4a_3+3a_5$

$b_2+b_4+b_6$

$=3a_1-4a_3+3a_5-3a_2+4a_4-3a_6$

$=-3(a_2-a_1)+4(a_4-a_3)-3(a_6-a_5)$

$=-3d+4d-3d$

$=-2d$

따라서 $-2d=10$이므로 $d=-5$

35) 정답 20

어느 두 직선도 평행하지 않고 어느 세 직선도 한 점에서 만나지 않으므로 6개의 직선 중에서 3개의 직선을 택하면 삼각형이 결정된다.

따라서 구하는 삼각형의 개수는

$_6\mathrm{C}_3=20$

36) 정답 $\frac{5}{9}$

양규가 도착한 시각을 오후 2시 x분, 은경이가 도착한 시각을 오후 2시 y분이라 하면

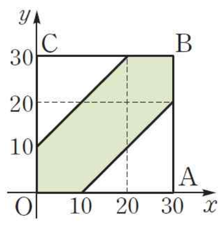
$0\le x\le 30,\ 0\le y\le 30$ …… ㉠

두 사람이 만나려면 $|x-y|\le 10$이어야 하므로

$-10\le x-y\le 10$

$\therefore\ x-10\le y\le x+10$ …… ㉡

오른쪽 그림에서 부등식 ㉠의 영역은 □OABC의 내부(경계선 포함)이고, 부등식 ㉠, ㉡의 공통인 영역은 색칠한 부분(경계선 포함)과 같다.



따라서 구하는 확률은

$$\frac{(\text{색칠한 부분의 넓이})}{(\square\text{OABC 의 넓이})}$$

$$=\frac{30\cdot 30-2\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot 20\cdot 20\right)}{30\cdot 30}=\frac{5}{9}$$

37) 정답 ㄴ, ㄷ

ㄱ. 두 사건 $A,\ B$가 서로 배반사건이면 $\mathrm{P}(A\cap B)=0$

이때 $\mathrm{P}(A)\neq 0,\ \mathrm{P}(B)\neq 0$이면

$\mathrm{P}(A\cap B)\neq \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$

이므로 $A,\ B$는 서로 독립이 아니다.

ㄴ. 두 사건 $A,\ B$가 서로 독립이면 $\mathrm{P}(A\,|\,B^c)=\mathrm{P}(A)$

$\therefore\ \mathrm{P}(A\cap B^c)=\mathrm{P}(A\,|\,B^c)\mathrm{P}(B^c)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B^c)$

따라서 $A,\ B^c$도 서로 독립이다.

ㄷ. $A^c,\ B^c$가 서로 독립이면 $\mathrm{P}(A^c\cap B^c)=\mathrm{P}(A^c)\mathrm{P}(B^c)$

$\therefore\ \mathrm{P}(A\cap B)=1-\mathrm{P}((A\cap B)^c)$

$=1-\mathrm{P}(A^c\cup B^c)$

$=1-\{\mathrm{P}(A^c)+\mathrm{P}(B^c)-\mathrm{P}(A^c\cap B^c)\}$

$=1-\{\mathrm{P}(A^c)+\mathrm{P}(B^c)-\mathrm{P}(A^c)\mathrm{P}(B^c)\}$

$=\{1-\mathrm{P}(A^c)\}\{1-\mathrm{P}(B^c)\}$

$=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$

따라서 $A,\ B$도 서로 독립이다.

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

38) 정답 ㄴ

사건 $[a,\ b,\ c,\ d]$를 A라 하면 $\mathrm{P}(A)=\frac{2}{3}$

ㄱ. 사건 $[d,\ f]$를 B라 하면 $A\cap B=[d]$이므로

$\mathrm{P}(B)=\frac{1}{3},\ \mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{6}$

$\therefore\ \mathrm{P}(A\cap B)\neq\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$

따라서 A와 B는 서로 종속이다.

ㄴ. 사건 $[c,\ d,\ e]$를 C라 하면 $A\cap C=[c,\ d]$이므로

$\mathrm{P}(C)=\frac{1}{2},\ \mathrm{P}(A\cap C)=\frac{1}{3}$

$\therefore\ \mathrm{P}(A\cap C)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(C)$

따라서 A와 C는 서로 독립이다.

ㄷ. 사건 $[c,\ d,\ e,\ f]$를 D라 하면 $A\cap D=[c,\ d]$이므로

$\mathrm{P}(D)=\frac{2}{3},\ \mathrm{P}(A\cap D)=\frac{1}{3}$

$\therefore\ \mathrm{P}(A\cap D)\neq\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(D)$

따라서 A와 D는 서로 종속이다.

이상에서 $[a,\ b,\ c,\ d]$와 서로 독립인 사건은 ㄴ뿐이다.

39) [정답] ⑤

모표준편차가 5이므로 표본의 크기를 n이라 하면 모평균 m의 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$\bar{x}-3\cdot\frac{5}{\sqrt{n}}\le m\le\bar{x}+3\cdot\frac{5}{\sqrt{n}}$

$\frac{-15}{\sqrt{n}}\le m-\bar{x}\le\frac{15}{\sqrt{n}}$

$\therefore\ |m-\bar{x}|\le\frac{15}{\sqrt{n}}$

모평균 m과 표본평균 $\bar{x}$의 차가 $\frac{1}{2}$ 이하이어야 하므로

$\frac{15}{\sqrt{n}}\le\frac{1}{2},\ \sqrt{n}\ge 30\quad \therefore\ n\ge 900$

따라서 적어도 900개의 표본은 조사해야 한다.

40) [정답] ①

표본의 크기가 525, 표본비율이 $\hat{p}=0.16$이므로 자전거 사용률 p를 신뢰도 95 %로 추정한 신뢰구간은

$$0.16-2\sqrt{\frac{0.16\times0.84}{525}} \le p \le 0.16+2\sqrt{\frac{0.16\times0.84}{525}}$$

$$0.16-2\times0.016 \le p \le 0.16+2\times0.016$$

$$\therefore\ 0.128 \le p \le 0.192$$