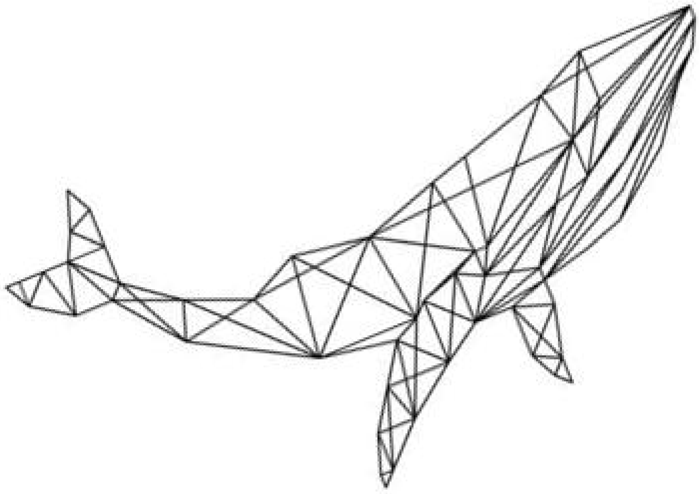
2021학년도 우주설 칼럼

원순열과 확률



원순열 기본이론

서로 다른 n명을 원탁에 앉히는 경우의 수 : $(n-1)!$
(단, 회전에 의해 겹쳐지는 것들은 같은 것으로 한다.)

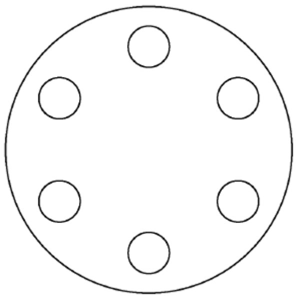
원순열을 제대로 이해하여 고난도 문항을 풀어내기 위해서는 $(n-1)!$이 아니라 $\frac{n!}{N}$으로 이해해야 한다.

$\frac{n!}{N}$에 대한관점
이때 $n!$은 서로 다른 n개를 나열하는 경우의 수 이고,
N은 중복할 수 있는 경우의 수 이다.

$n!$은 항상 성립하는가?

아래에 문제를 살펴보자.

1. 그림과 같이 최대 6개의 용기를 넣을 수 있는 원형의 실험기구가 있다. 6개의 용기 A, B, B, C, C, C를 이 실험기구에 모두 넣는 경우의 수는? (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.)



이 문제가 출제될 수 있을 것인가?

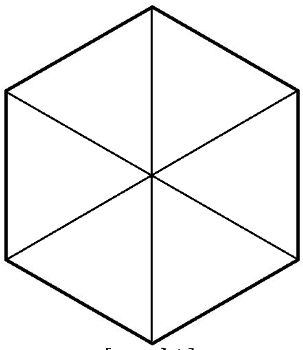
정답: 불가능합니다.

교과서 및 수능특강에는 원순열을
'서로 다른 n명을 원탁에 앉히는 경우의 수' 로 정의합니다.

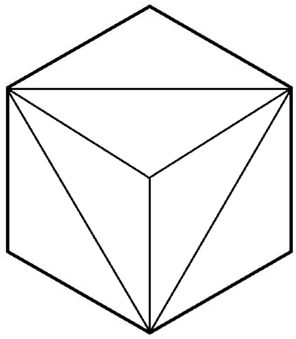
배열하는 요소들이 중복되는 것에 대한 내용은 교과과정 외입니다.
따라서 어떤 상황에서든 $\frac{n!}{N}$에서 $n!$은 보장됩니다.

N의 값은 무엇을 의미하는가?

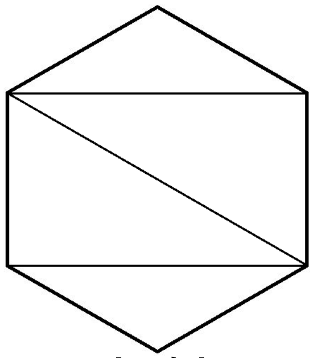
정육각형을 나눈 n개의 영역에 서로 다른 n개의 색을 색칠한다고 생각해봅시다.



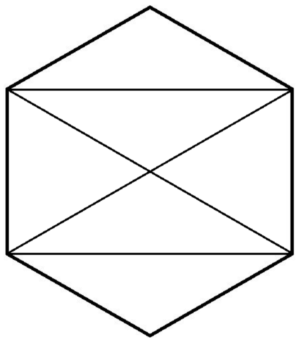
[그림1]



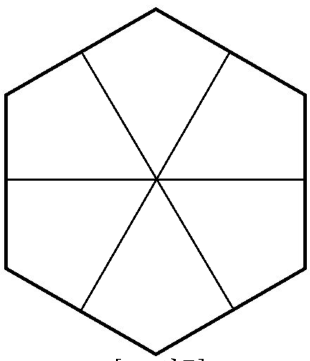
[그림2]



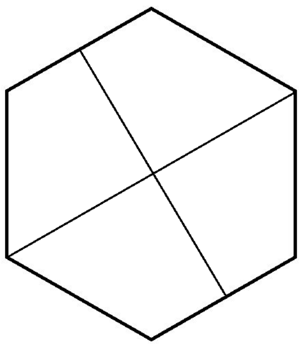
[그림3]



[그림4]



[그림5]



[그림6]

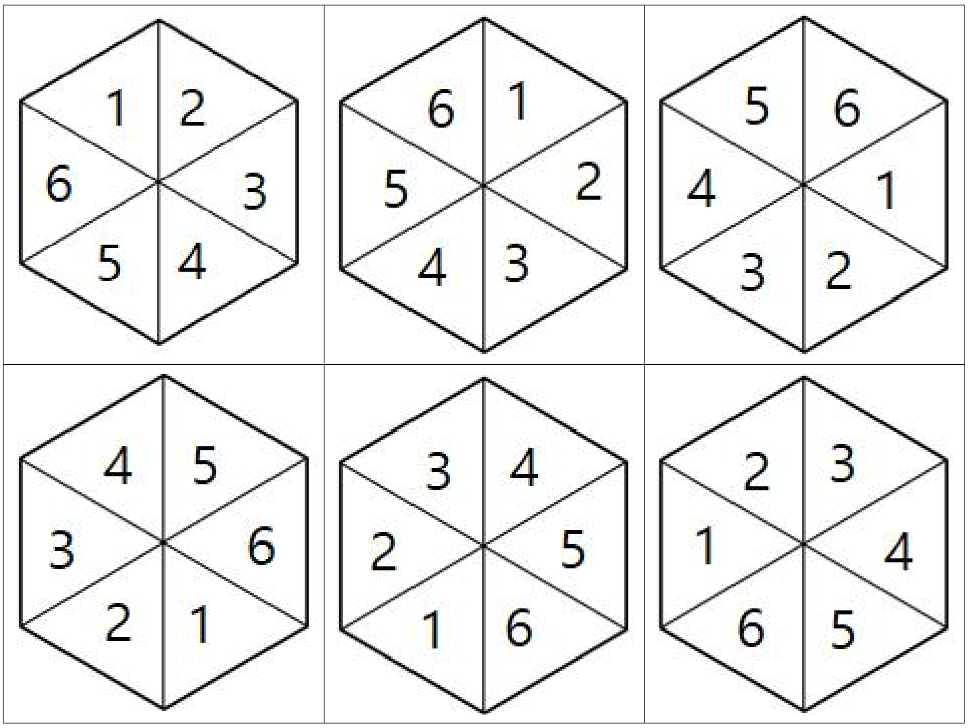
[그림1] ~ [그림6]까지의 경우의 수를 각각 구해봅시다.
그리고 N의 값을 구하는 방법을 정리해봅시다.

여러 가지 시도를 하며 N의 값을 구하는 방법을 구축하는 시도를 해보자.

중복의 원리

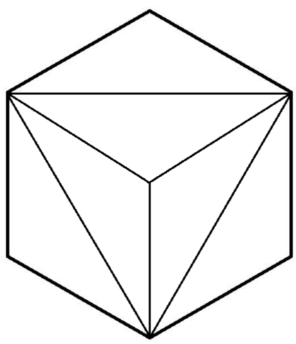
[그림1]의 6개의 영역에 색칠하는 6개의 색을 각각 1~6이라 하자. 한번 자유롭게 그리고 최대한 간단하게 1부터 6까지의 수를 영역이 1개씩 나열해보자. 오른쪽 그림과 같을 것이다.
그렇다면 이와 같은 배열과 회전을 통해 중복되는 배열은 몇 가지인가? 세어보자.

[그림1]

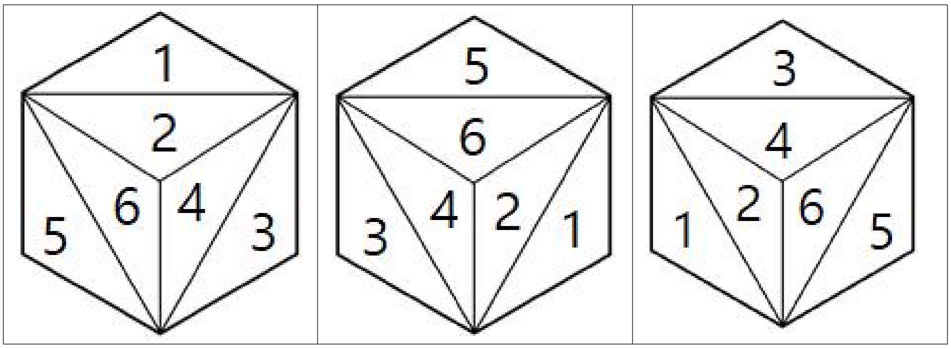


이렇게 6가지 경우의 수가 나오므로 $N=6$임을 알 수 있다.

이번에는 [그림2]의 6개에 영역에 1부터 6까지의 색을 색칠할 때는 N의 값이 어떻게 될지 같은 방식으로 알아보자.

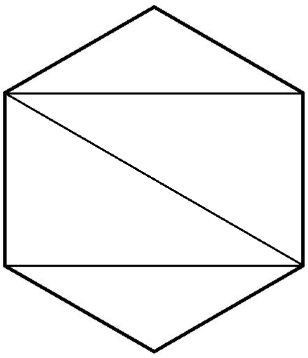


[그림2]

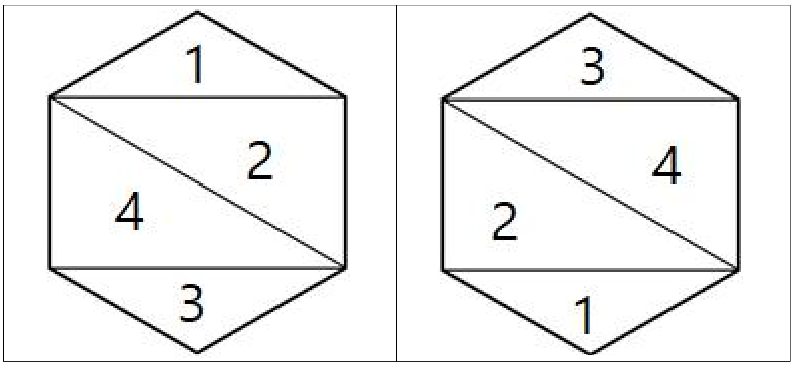


$N=3$이 되는 것을 알 수 있다.

이번에는 [그림3]의 6개에 영역에 1부터 6까지의 색을 색칠할 때는 N의 값이 어떻게 될지 같은 방식으로 알아보자.

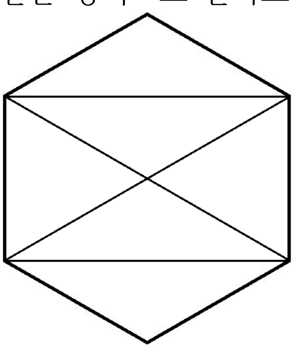


[그림3]

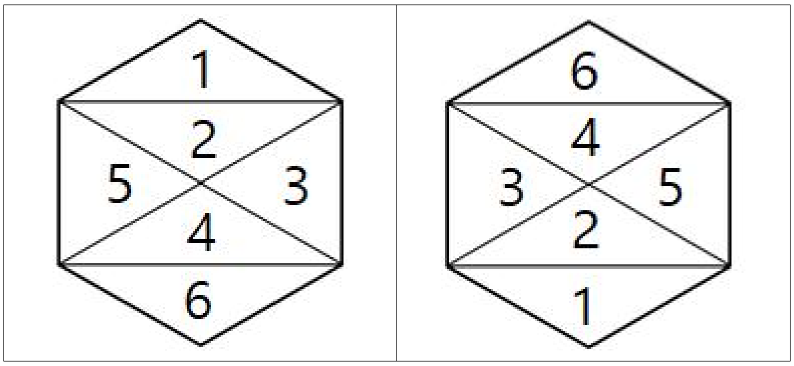


$N=2$가 되는 것을 알 수 있다.

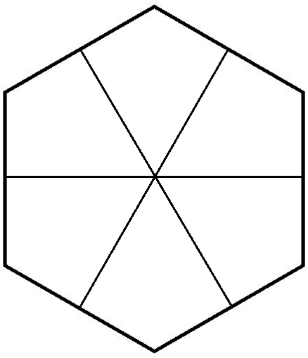
이번에는 [그림4]의 6개에 영역에 1부터 6까지의 색을 색칠할 때는 N의 값이 어떻게 될지 같은 방식으로 알아보자.



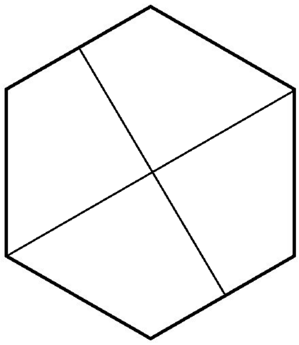
[그림4]



$N=2$가 되는 것을 알 수 있다.



[그림5]



[그림6]

[그림 5]는 $N=6$이 되고, [그림 6]은 $N=2$이 가 됨을 알 수 있다.

이와 같은 방식으로 N값을 구할 수 있고 원순열의 경우의 수는
이 N에 의해 결정되는 거나 마찬가지이다.

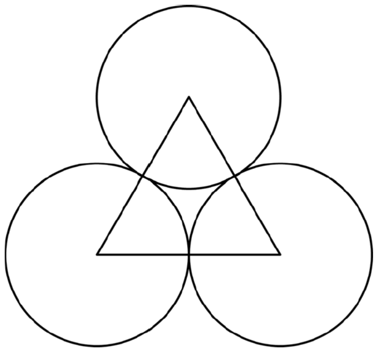
이러한 방식이 통하는 이유는 무엇일까? 생각해보자.

이유: 곱의 법칙의 원리를 거꾸로 생각한다.

평가원 및 교육청 기출

1. 그림과 같이 서로 접하고 크기가 같은 원 3 개와 이 세 원의 중심을 꼭짓점으로 하는 정삼각형이 있다. 원의 내부 또는 정삼각형의 내부에 만들어지는 7 개의 영역에 서로 다른 7 가지 색을 모두 사용하여 칠하려고 한다. 한 영역에 한 가지 색만을 칠할 때, 색칠한 결과로 나올 수 있는 경우의 수는? (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.)

[4점] [2011년 6월 가15]

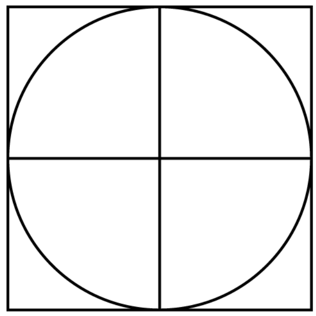


① 1260 ② 1680 ③ 2520
④ 3760 ⑤ 5040

해설: $N=3$이므로 $\frac{7!}{3}=1680$

답 2번

2. 정사각형에 내접하는 원을 4등분하여 그림과 같은 도형을 만들었다. 도형의 한 영역에 한 가지 색만 사용하여, 8개의 영역에 서로 다른 8가지 색을 모두 칠하는 방법의 수는? (단, 회전에 의하여 겹쳐지는 것들은 같은 것으로 한다.) [3점][2008년 4월 가38]

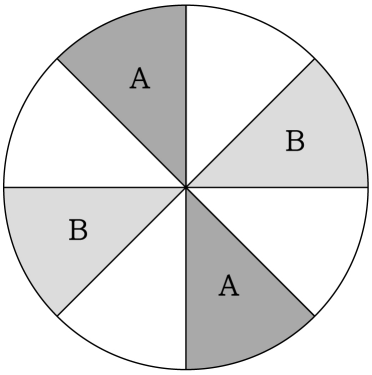


① $\frac{8!}{5}$ ② $\frac{8!}{4}$ ③ $\frac{8!}{3}$ ④ $\frac{8!}{2}$ ⑤ $8!$

해설: $N=4$이므로 $\frac{8!}{4}=1680$

답 2번

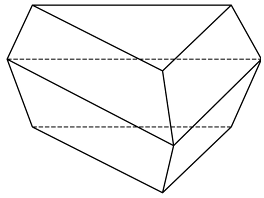
3. 8등분된 원판에 A, B, C, D, E, F의 6가지 색을 모두 사용하여 영역을 구분하려고 한다. 그림과 같이 A, B 두 가지 색은 이미 칠해져 있을 때, 칠해져 있지 않은 영역에 칠할 수 있는 방법의 수를 구하시오. (단, 한 영역에는 한 가지 색을 칠하고, 회전하여 같은 경우에는 한 가지 방법으로 한다.) [3점][2009년 10월 나20]



해설: $N=2$이므로 $\dfrac{4!}{2}=12$

답 12

4. 그림과 같이 합동인 정삼각형 2개와 합동인 등변사다리꼴 6개로 이루어진 팔면체가 있다. 팔면체의 각 면에는 한 가지의 색을 칠한다고 할 때, 서로 다른 8개의 색을 모두 사용하여 팔면체의 각 면을 칠하는 경우의 수는? (단, 팔면체를 회전시켰을 때 색의 배열이 일치하면 같은 경우로 생각한다.) [4점[2010년 3월 가15]



① 6520 ② 6620 ③ 6720 ④ 6820 ⑤ 6920

해설: 윗면 아랫면 중복에 의한 $N=2$,

열면 간의 중복에 의한 $N'=3$이므로

$\dfrac{8!}{2\times3}=6720$

답 3번

확률과 표본공간

제시된 상황에서 일어날 수 있는 모든 사건의 집합을 표본공간이라 한다.

확률 연산의 전제조건은 **표본공간에 해당하는 모든 사건이 일어날 확률이 모두 같다는 것에서 시작한다.**

사건 A가 일어날 확률 $\mathrm{P}(A)$는

$$\mathrm{P}(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{(\text{사건 } A\text{가 일어나는 경우의 수})}{(\text{일어날 수 있는 모든 경우의 수})}$$ 이다.

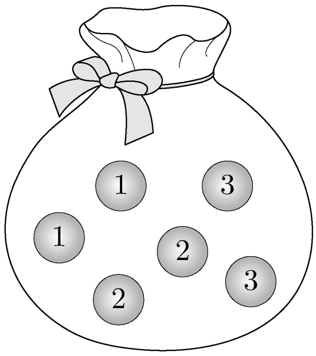
핵심은 표본공간을 어떻게 설정하느냐에 따라 같은 상황, 같은 확률을 구해도 다른 방법으로 구할 수 있다는 것이다.

표본공간설정에 따른 연산의 간편화

숫자 $1, 1, 2, 2, 3, 3$이 하나씩 적혀 있는 6개의 공이 들어 있는 주머니가 있다. 이 주머니에서 한 개의 공을 임의로 꺼내어 공에 적힌 수를 확인한 후 다시 넣지 않는다. 이와 같은 시행을 6번 반복할 때, $k(1 \le k \le 6)$번째 꺼낸 공에 적힌 수를 a_k라 하자. 두 자연수 m, n을

$$m = a_1 \times 100 + a_2 \times 10 + a_3,$$

$$n = a_4 \times 100 + a_5 \times 10 + a_6,$$



이라 할 때, $m > n$를 만족시키는 확률을 구하시오.

위 문제를 ⅰ) $a_1 > a_4$인 경우, ⅱ)$a_1 = a_4$이고, $a_2 > a_5$인 경우의 확률을 각각 구하고 이를 더하는 방법으로 풀이한다고 해봅시다.

‘ⅰ) $a_1 > a_4$일 확률‘을 어떻게 구할지 생각해봅시다.

풀이 1. 6개의 공을 모두 다른 공으로 해석
(예: 1이 적힌 공 2개가 적힌 숫자는 같지만 종류는 검은 공 흰 공으로 다르다.)

전체 경우의 수 : $6!$

가능한 a_1, a_4의 순서쌍 (a_1, a_4)는 $(3, 2), (3, 1), (2, 1)$로 3가지인데 각각의 경우가 검은 공인지 흰 공인지에 따라 2^2개의 경우가 존재한다.

나머지 a_2, a_3, a_5, a_6는 4개의 공을 자유롭게 나열하면 되므로 $4!$

구하는 확률 : $\dfrac{3\times 2^2 \times 4!}{6!} = \dfrac{2}{5}$

풀이 2. 같은 것이 있는 순열

전체 경우의 수 : $\dfrac{6!}{2!2!2!}$

가능한 a_1, a_4의 순서쌍 (a_1, a_4)는 $(3, 2), (3, 1), (2, 1)$로 3가지인데

나머지 a_2, a_3, a_5, a_6는 4개의 공 중 같은 것 2개와 다른 것 1개, 1개를 나열하는 경우의 수이므로 $\dfrac{4!}{2!}$이다.

구하는 확률 : $\dfrac{3\times\dfrac{4!}{2!}}{\dfrac{6!}{2!2!2!}} = \dfrac{2}{5}$

풀이 3. m, n을 결정할 필요 없이 백의자리 수 a_1, a_4만 결정하면 된다.
(단, 풀이1처럼 모두 다른 종류의 공으로 해석)

전체 경우의 수 : ${}_6\mathrm{P}_2 = 30$

가능한 a_1, a_4의 순서쌍 (a_1, a_4)는 $(3, 2), (3, 1), (2, 1)$로 3가지인데 각각의 경우가 검은 공인지 흰 공인지에 따라 2^2개의 경우가 존재한다.

구하는 확률 : $\dfrac{3\times 2^2}{30} = \dfrac{2}{5}$

같은 확률을 구하더라도 분모는 작게는 30부터 크게는 $6!$이 될 수 있다.
확률을 구하는 방법은 분모설정 방법에 따라 매우 간단해 질 수 있다.
이것을 반드시 기억한 상태에서 다음으로 넘어갑니다.

원순열과 확률

어떤 조건을 만족시키며 나열을 하는 원순열 심화문항에 대하여 이전까지 학습한 확률의 정의와 성질을 이용하면 문제를 쉽게 풀어낼 수 있다.

확률 $= \dfrac{\text{해당 경우의 수}}{\text{전체 경우의 수}}$

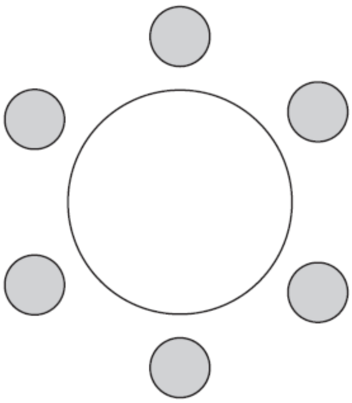
에 대하여, 해당경우의 수=(전체경우의 수)×확률이 성립한다.

전체경우의 수는 $\dfrac{n!}{N}$으로 쉽게 구할 수 있으므로 확률의 값만 $\dfrac{\text{정답}}{\dfrac{n!}{N}}$을 제외한 방법으로 구할 수 있다면, 문제를 매우 쉽게 풀 수 있는데 이때, 확률은 분모를 최소로 설정함으로서 적은 계산으로 구할 수 있음을 학습했다.

또한 회전을 통한 중복이 있든 없든 확률은 변화가 없다. $\left(\dfrac{q}{p} = \dfrac{Nq}{Np}\text{이므로}\right)$

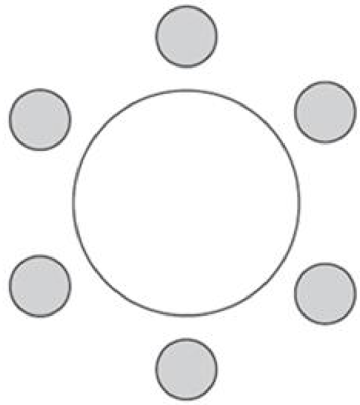
따라서 확률을 구할 때는 탁자가 회전하지 않는다고 놓고 풀 수 있다.

1. 그림과 같이 일정한 간격으로 6개의 의자가 놓인 원탁에 남학생 4명과 여학생 2명이 둘러앉으려고 한다. 남학생 중 2명은 서로 마주보고 2명은 서로 마주보지 않게 앉는 경우의 수는? (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.) [4점][2018년 전북5월 나15]



위 문항을 어떻게 풀 수 있을까? 다음페이지로 넘어가기 전 자유롭게 풀이해보자.

1. 그림과 같이 일정한 간격으로 6개의 의자가 놓인 원탁에 남학생 4명과 여학생 2명이 둘러앉으려고 한다. 남학생 중 2명은 서로 마주보고 2명은 서로 마주보지 않게 앉는 경우의 수는? (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.) [4점][2018년 전북5월 나15]



전체경우의 수는 $\frac{n!}{N}=\frac{6!}{6}=120$이 자명하다.

확률을 구할 때, 분모를 최소화 하는 방법을 생각해보자. 6명의 학생을 배치하는 것보다 여학생 2명만 고려하는 것이 편리하다. (남학생은 4명이나 되니까)

+ (9페이지에서 공 6개가 아닌 a_1, a_4만 고려한 풀이 3의 발상과 동일)

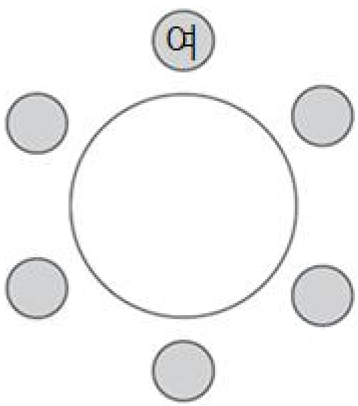
여학생 2명의 위치가 어떻게 배치되어야 조건을 만족시키는가?

여학생 2명이 서로 마주보고 앉아, 마주보는 남학생이 2쌍만 아니면 된다.

여사건으로 여학생 2명이 마주보고 앉을 확률을 구하면 분모를 최소로 할 수 있다.

그렇다면 분모에 들어갈 전체 경우의 수는

여학생이 앉을 2개의 자리를 선택하는 방법에 수 ${}_6C_2$일까? 더 작게 할 수 있다.



여학생 1명을 어떤 좌석에 앉히든 나머지 여학생이 앉을 수 있는 자리는 5개는 상황의 변화가 없고, 그 중 마주볼 수 있는 자리는 1개 이므로

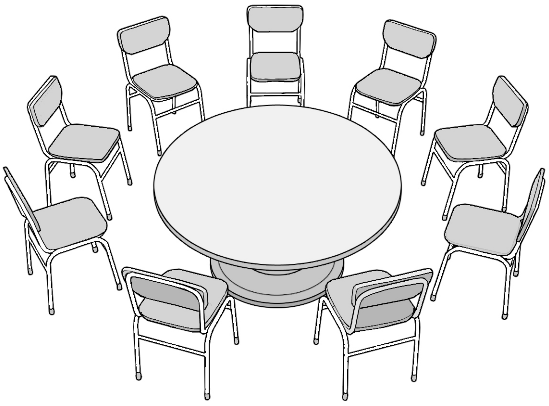
여학생 2명이 마주보고 앉을 확률 $\frac{1}{5}$을 분모를 최소화 하여 쉽게 구할 수 있다.

$1-\frac{1}{5}=\frac{4}{5}$에 의해 조건을 만족시킬 확률은 $\frac{4}{5}$이다.

따라서 조건을 만족시키는 경우의 수는 $120\times\frac{4}{5}=96$이다.

복습하고 다음문제에 적용해보자.

2. 여학생 3명과 남학생 6명이 원탁에 같은 간격으로 둘러앉으려고 한다. 각각의 여학생 사이에는 1명 이상의 남학생이 앉고 각각의 여학생 사이에 앉은 남학생의 수는 모두 다르다. 9명의 학생이 모두 앉는 경우의 수가 $n \times 6!$일 때, 자연수 n의 값은? (단, 회전하여 일치하는 것들은 같은 것으로 본다.) [4점] [2017년 3월 가15]



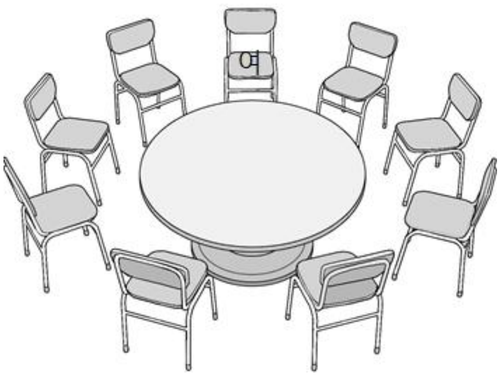
2. 여학생 3명과 남학생 6명이 원탁에 같은 간격으로 둘러앉으려고 한다. 각각의 여학생 사이에는 1명 이상의 남학생이 앉고 각각의 여학생 사이에 앉은 남학생의 수는 모두 다르다. 9명의 학생이 모두 앉는 경우의 수가 $n \times 6!$일 때, 자연수 n의 값은? (단, 회전하여 일치하는 것들은 같은 것으로 본다.) [4점] [2017년 3월 가15]

전체경우의 수는 $\frac{n!}{N} = \frac{9!}{9} = 8!$이 자명하다.

확률을 구할 때, 분모를 최소화 하는 방법을 생각해보자. 9명의 학생을 배치하는 것보다 여학생 3명만 고려하는 것이 편리하다. (남학생은 6명이나 되니까)

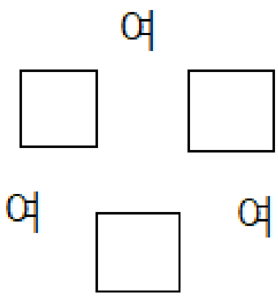
여학생 2명의 위치가 어떻게 배치되어야 조건을 만족시키는가?

3명의 여학생 사이에 존재하는 남학생의 수가 각각 1명, 2명, 3명 이어야 한다.



여학생 1명을 어떤 좌석에 앉히든 나머지 여학생이 앉을 수 있는 자리 8개는 상황의 변화가 없고, 분모에 들어갈 전체 경우의 수를 ${}_8C_2$로 최소화 할 수 있다.

그렇다면 조건을 만족시키는 경우의 수는 어떻게 구할 수 있을까?



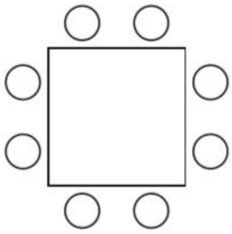
여학생들 사이에 들어갈 남학생들의 숫자 1,2,3을 나열하는 경우의 수 $3!$이 조건을 만족시키는 경우의 수가 된다.

따라서 우리가 구하는 경우의 수는 $8! \times \frac{3!}{{}_8C_2} = 6! \times 12$ 이므로 정답은 12이다.

다음은 수능특강 문제에 적용해보자. 한 번 더 복습해보자.

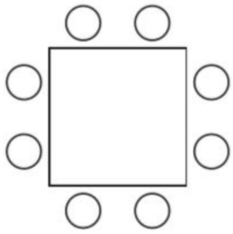
[20009-0017]

3 그림과 같이 정사각형 모양의 탁자에 배열된 8개의 의자에 A, B, C, D를 포함한 8명의 학생이 앉으려고 한다. A와 B는 탁자의 서로 반대쪽 면에 배열된 의자에 각각 한 명씩 앉고, C와 D는 탁자의 서로 이웃한 면에 배열된 의자에 각각 한 명씩 앉는 경우의 수는? (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.)



[20009-0017]

3 그림과 같이 정사각형 모양의 탁자에 배열된 8개의 의자에 A, B, C, D를 포함한 8명의 학생이 앉으려고 한다. A와 B는 탁자의 서로 반대쪽 면에 배열된 의자에 각각 한 명씩 앉고, C와 D는 탁자의 서로 이웃한 면에 배열된 의자에 각각 한 명씩 앉는 경우의 수는? (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.)



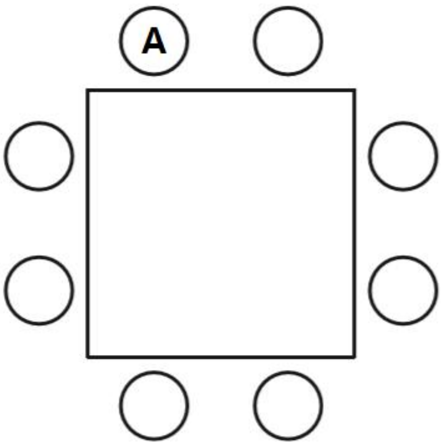
전체경우의 수는 $\frac{n!}{N}=\frac{8!}{4}$이 자명하다.

A와 B가 탁자의 서로 반대쪽 면에 앉을 확률을 p_1

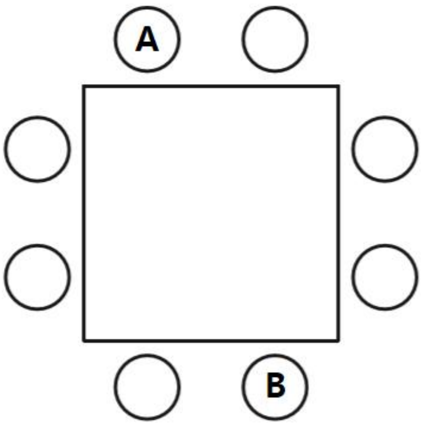
C와 D가 탁자의 서로 이웃한 면에 앉을 확률을 p_2라 하면

두 사건은 독립이므로 $\frac{8!}{4}\times p_1 \times p_2$를 통해 답을 구할 수 있다.

p_1을 구해보자. 분모를 최소화 한다는 것에 초점을 맞추자.



A를 어떤 좌석에 앉히든 B 앉을 수 있는 자리는 7개는 상황의 변화가 없고, 그 중 마주보는 면에 있는 자리는 2개 이므로 $p_1=\frac{2}{7}$임을 알 수 있다.



A, B에 관한 조건을 만족시킨 후, C와 D가 앉을 의자를 선택하는 경우의 수는 ${}_6C_2$이고, 그 중 C와 D가 탁자의 서로 이웃한 면에 앉는 경우의 수는 경우의 수는 8이다. 그러므로 $p_2=\frac{8}{15}$임을 알 수 있다.

따라서 정답은 $\frac{8!}{4}\times\frac{2}{7}\times\frac{8}{15}=1536$이다. 익숙해지면 너무 편하다.