[나승민/한성은 모의고사]

❙ 6월 모의고사(가형) 연습 (1/2) ❙

나승민 (성균관대 수학과)

이투스앤써, 이투스 네오

수학에 감각을 더하다.
Youtube #매 민TV
instagram @cremath_david

한성은 (POSTECH 수학과)

이투스앤써, 일산 종로, 일산 클라비스, 5A ACADEMY

코로나19발 범위 변경을 반영하였습니다.
올해 수능은 치겠죠? 공부 열심히 하세요.

hansungeun.com
 - 저자소개, 학습자료, 교재판매

수학 영역(가형)

5지선다형

1. $\sqrt[3]{4}\times4^{\frac{1}{6}}$의 값은? [2점]

① $\sqrt{2}$　② 2　③ $2\sqrt{2}$　④ 4　⑤ $4\sqrt{2}$

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+1}{n(n+1)}$의 값은? [2점]

① -1　② $-\frac{1}{2}$　③ 0　④ $\frac{1}{2}$　⑤ 1

3. $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$이고 $\sin\theta=\frac{\sqrt{11}}{6}$일 때, $\cos\theta$의 값은? [2점]

① $-\frac{1}{6}$　② $-\frac{1}{3}$　③ $-\frac{1}{2}$　④ $-\frac{5}{6}$　⑤ $-\frac{7}{6}$

4. 두 사건 A, B에 대하여 A와 B는 서로 배반사건이고

$$\mathrm{P}(A\cup B)=5\mathrm{P}(B)=1$$

일 때, $\mathrm{P}(A)$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{5}$　② $\frac{2}{5}$　③ $\frac{7}{10}$　④ $\frac{4}{5}$　⑤ $\frac{9}{10}$

5. 세 수 $\frac{21}{12}$, x, $\frac{39}{12}$가 이 순서대로 등차수열을 이룰 때, x의 값은? [3점]

① $\frac{5}{2}$ ② $\frac{8}{3}$ ③ $\frac{17}{6}$
④ 3 ⑤ $\frac{19}{6}$

6. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여

$$\sum_{k=1}^{10}(a_k-3)=80, \quad \sum_{k=1}^{10}(a_k+3b_k)=200$$

일 때, $\sum_{k=1}^{10}(2a_k+b_k)$의 값은? [3점]

① 250 ② 275 ③ 300
④ 325 ⑤ 350

7. $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)=\cos\left(\alpha-\frac{5\pi}{6}\right)$를 만족시키는 α에 대하여 $\tan\alpha$의 값은? [3점]

① $-2-\sqrt{3}$ ② $-3-\sqrt{3}$ ③ $-4-\sqrt{3}$
④ $-5-\sqrt{3}$ ⑤ $-6-\sqrt{3}$

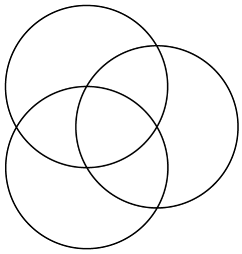
8. 두 양수 a, b에 대하여 $\log_{\sqrt{2}} a = \log_5 b = \log_2 4$일 때, $\log_3 (a+b)$의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

9. $-1 \le x \le 4$에서 함수 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{-x^2+4x}$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $M \times m$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1
④ 2 ⑤ 4

10. 그림과 같이 반지름의 길이가 같은 3개의 원이 있다. 이 3개의 원은 각각 다른 2개의 원의 중심을 지난다. 3개 원의 내부에 만들어지는 7개의 영역에 서로 다른 7가지 색을 모두 사용하여 칠하려고 한다. 한 영역에 한 가지 색만을 칠할 때, 색칠한 결과로 나올 수 있는 경우의 수는? (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.) [3점]



① 1260 ② 1680 ③ 2520
④ 3760 ⑤ 5040

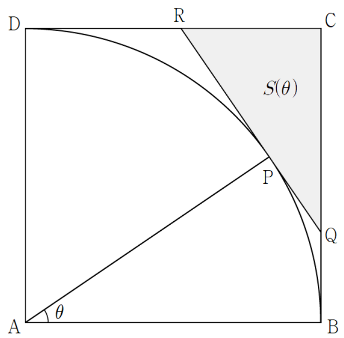
11. 두 실수 a, c와 양수 b에 대하여 함수

$$f(x)=a\sin bx+c$$

의 최솟값은 0, 최댓값은 4이다. 방정식 $f(x)=0$의 양수인 근 중 가장 작은 것은 π, 두 번째로 작은 것은 5π일 때, $b(c-a)$의 값은? [3점]

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 4 ⑤ 8

12. 그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정사각형 ABCD와 점 A를 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 원 C가 있다. 원 C 위의 점 P에서의 접선이 두 선분 BC, CD와 만나는 점을 각각 Q, R이라 하자. $\angle \mathrm{PAB}=\theta$라 할 때, 삼각형 CQR의 넓이는 $S(\theta)$이다. $\lim_{\theta \to 0+} \frac{S(\theta)}{\theta}$의 값은? (단, $0<\theta<\frac{\pi}{2}$) [3점]

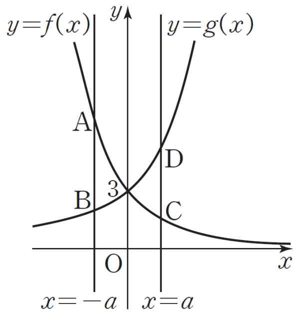


① 4 ② 2 ③ 1 ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{1}{4}$

13. 한 개의 주사위를 두 번 던진다. 6의 눈이 한 번도 나오지 않을 때, 나온 두 눈의 수의 합이 3의 배수일 확률은? [3점]

① $\frac{9}{25}$　② $\frac{2}{5}$　③ $\frac{11}{25}$　④ $\frac{12}{25}$　⑤ $\frac{13}{25}$

14. 두 함수 $f(x)=\frac{3}{2^x}$, $g(x)=2^{x+1}+1$이 있다. 그림과 같이 직선 $x=-a$가 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프와 만나는 점을 각각 A, B라 하고, 직선 $x=a$가 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프와 만나는 점을 각각 C, D라 하자. $2\overline{\mathrm{AB}}+\overline{\mathrm{CD}}=54$일 때, 양수 a의 값은? [4점]

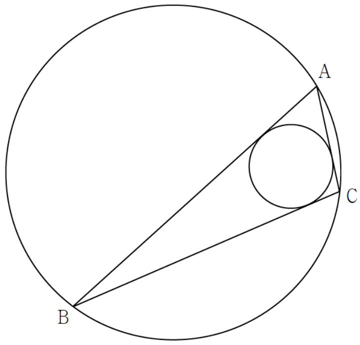


① $-1+\log_2 5$　② $\log_2 7$　③ $-1+2\log_2 3$　④ $\log_2 5$　⑤ $1+\log_2 7$

15. 자연수 p에 대하여 다항식 $(x+p)^8$의 전개식에서 x^k의 계수를 a_k라 하자. 서로 다른 세 수 a_1, a_2, a_3 중 최댓값이 a_2일 때, a_6의 값은? [4점]

① 126 ② 168 ③ 252 ④ 336 ⑤ 504

16. 반지름의 길이가 $4\sqrt{3}$인 원에 내접하는 삼각형 ABC에 대하여 $\angle \mathrm{BAC}=60°$이고 삼각형 ABC에 내접하는 원의 반지름의 길이는 $\sqrt{3}$이다. $\overline{\mathrm{AB}}+\overline{\mathrm{AC}}$의 값은? [4점]



① 16 ② 17 ③ 18 ④ 19 ⑤ 20

17. 모든 항이 양수인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n} a_k^{\,3} = 2\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^2$$

를 만족시킨다. 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $a_1 = 2$

ㄴ. 모든 자연수 n에 대하여

$(a_{n+1})^2 = 2a_{n+1} + 4\sum_{k=1}^{n} a_k$ 이다.

ㄷ. 모든 자연수 n에 대하여 $a_n = 2n$이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

18. 집합 $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$에 대하여 함수 $f : X \to X$는 다음 두 조건을 만족시킨다.

(가) 집합 X의 원소 i에 대하여 $f(f(i)) = f(i)$이다.
(나) 합성함수 $f \circ f$의 치역의 원소의 개수는 4 이상이다.

다음은 조건을 만족시키는 함수 f의 개수를 구하는 과정이다.

함수 f의 치역을 A라 하자. 집합 A의 원소 a에 대하여 $f(b) = a$인 집합 X의 원소 b가 존재하므로 $f(a) = a$이다. 따라서 집합 A의 원소의 개수가 k개일 때, 함수 $f \circ f$의 치역의 원소의 개수는 $\boxed{(가)}$이다.

6 이하의 자연수 k에 대하여 $n(A) = k$인 집합 X의 부분집합 A를 선택하는 경우의 수는 $\boxed{(나)}$이다.

정의역의 원소 중 집합 A에 속하지 않는 $(6-k)$개의 원소들은 각각 k개의 함숫값 중 하나를 가질 수 있으므로, 이 $(6-k)$개의 원소가 함숫값을 선택하는 경우의 수는 $\boxed{(다)}$이다.

구하는 경우의 수는 $\sum_{k=4}^{6}\left\{\boxed{(나)} \times \boxed{(다)}\right\}$인 271이다.

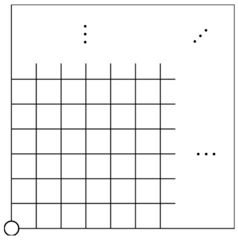
위의 (가), (나), (다)에 알맞은 식을 각각 $f(k)$, $g(k)$, $h(k)$라 할 때, $f(6) + g(5) + h(4)$의 값은? [4점]

① 24 ② 26 ③ 28
④ 30 ⑤ 32

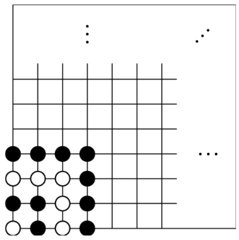
19. 돌을 놓을 수 있는 눈 $2n \times 2n$개가 있는 바둑판에 다음 단계에 따라 흰 바둑돌과 검은 바둑돌을 올려 놓는다.

> [단계1] [그림1]과 같이 바둑판 한쪽 구석의 눈에 흰 돌을 올려놓는다.
>
> [단계2] 놓인 돌들의 바깥쪽에 돌들을 놓아 한 변의 길이가 1 늘어난 정사각형이 되도록 한다. 이때 전 단계에서 흰 돌을 놓았다면 검은 돌을, 검은 돌을 놓았다면 흰 돌을 놓는다.

[그림2]는 [단계2]를 세 번 반복한 것이다. 이와 같이 [단계2]를 바둑판의 $2n \times 2n$개의 눈이 가득 찰 때까지 반복했을 때, 검은 바둑돌의 개수를 a_n, 흰 바둑돌의 개수를 b_n이라 하자. $\lim_{n \to \infty}\{\sqrt{a_n} - \sqrt{b_n}\}$의 값은? [4점]



[그림1]



[그림2]

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ③ 1
④ $\sqrt{2}$ ⑤ 2

20. 공차가 정수인 등차수열 $\{a_n\}$과 1보다 큰 자연수 m이 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $\sum_{k=1}^{m} a_k = 70$
>
> (나) $\sum_{k=1}^{2m} a_k = 238$

a_{2m}의 값은? [4점]

① 18 ② 21 ③ 24
④ 27 ⑤ 30

21. 함수 $f(x)=\ln x$와 $0<t<\frac{\pi}{4}$인 실수 t에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 P에서의 접선과 직선 $y=x$가 이루는 예각이 t인 점 P의 x좌표 중 가장 작은 것을 $g(t)$, 가장 큰 것을 $h(t)$라 하자. $0<t<\frac{\pi}{4}$인 실수 a가 $\tan a=\frac{1}{2}$를 만족시킬 때, $g'(a)\times h'(a)$의 값은? [4점]

① $-\frac{25}{2}$ ② $-\frac{100}{9}$ ③ -10

④ $-\frac{100}{11}$ ⑤ $-\frac{25}{3}$

단답형

22. ${}_4\mathrm{P}_3$의 값을 구하여라. [3점]

23. 1이 아닌 양수 a, b와 실수 x, y에 대하여

$$a^2b^3=1,$$
$$b\times a^x=a^4\times b^y$$

가 성립한다. $3x+2y$의 값을 구하여라. [3점]

24. 미분가능한 함수 $f(x)$와 함수 $g(x)=x^3+x$에 대하여 합성함수 $h(x)=(g\circ f)(x)$가

$$\lim_{x\to 1}\frac{h(x)-f(x)-1}{x-1}=6$$

일 때, $f'(1)$의 값을 구하여라. [3점]

25. 집합 $X=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 $f: X\to X$의 개수를 구하여라. [3점]

(가) $f(1)<f(3)<f(5)<f(6)$
(나) $f(4)\le f(2)$

26. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^k a_k=2^n$$

을 만족시킬 때, $\sum_{n=1}^{10}a_n$의 값을 구하여라. [4점]

27. 첫째항이 26이고 공차가 -4인 등차수열 $\{a_n\}$과 첫째항이 -6이고 공차가 d인 등차수열 $\{b_n\}$에 대하여

$$a_m b_m > 0$$

이 되게 하는 자연수 m의 개수가 2가 되게 하는 모든 실수 d값의 범위는 $p \le d < q$ 또는 $r < d \le s$이다. $20pr$의 값을 구하여라. (단, $p < q < r < s$이다.) [4점]

28. 다음 조건을 만족시키는 자연수 a, b, c, d, e의 모든 순서쌍 (a, b, c, d, e)의 개수를 구하여라. [4점]

(가) $a+b+c+d+e=12$
(나) $a+b+c$는 $d+e$의 배수이다.

29. $a_1=1$인 수열 $\{a_n\}$은 집합

$$A=\{n \mid n=2^k,\ k\text{는 음이 아닌 정수}\}$$

와 상수 d에 대하여 다음을 만족시킨다.

(가) $n \in A$이면 $a_{2n}=2a_n$이다.
(나) $n \notin A$이면 $a_{n+1}=a_n+d$이다.

$\sum_{k=1}^{32} a_k = 218$일 때, a_{60}의 값을 구하여라. [4점]

30. 이차함수 $P(x)$와 실수 a에 대하여 함수

$$f(x)=P(x)e^{ax}$$

와 함수 $g(x)$는 $x>-1$인 모든 실수 x에 대하여

$$(x^2-1)g(x)=f(x)$$

일 때, 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\lim_{x\to 1} g(x)=0$
(나) 함수 $g(x)$는 $x=2$에서 극댓값 $\frac{1}{e}$을 갖는다.

$60f\left(\frac{1}{2}\right)$의 값을 구하여라. [4점]

[나승민/한성은 모의고사]

6월(가형) 연습(1/2) 정답표

문항	정답	문항	정답	문항	정답	문항	정답	문항	정답
01	②	02	⑤	03	④	04	④	05	①
06	①	07	①	08	③	09	④	10	②
11	③	12	④	13	①	14	②	15	③
16	③	17	⑤	18	③	19	②	20	⑤
21	②	22	24	23	14	24	2	25	315
26	340	27	16	28	205	29	52	30	45

COMMENT 16

사인법칙에서 $a=12$이다. 삼각형의 넓이에서 $\frac{1}{2}\times\sqrt{3}\times(12+b+c)=\frac{1}{2}bc\times\frac{\sqrt{3}}{2}$이고,

코사인법칙에서 $144=b^2+c^2-bc$이다. 연립하여 풀면 $b+c=18$이다.

COMMENT 17

ㄱ : 준 식에 $n=1$을 대입하면, $a_1^3=2a_1^2$이고 $a_n>0$이므로 $a_1=2$이다.

ㄴ : 준 식의 n 자리에 $n+1$을 대입하면 $\sum_{k=1}^{n+1}a_k^3=2\left(\sum_{k=1}^{n+1}a_k\right)^2$이다.

여기서 준 식을 빼면, $a_{n+1}^3=2\left\{\left(\sum_{k=1}^{n+1}a_k\right)^2-\left(\sum_{k=1}^{n}a_k\right)^2\right\}=2a_{n+1}\left(a_{n+1}+2\sum_{k=1}^{n}a_k\right)$이다.

ㄷ : ㄴ의 식과 ㄴ 식의 n 자리에 $n-1$을 대입한 것을 빼면 등차수열 뜬다.

COMMENT 19

$$\begin{aligned}a_n&=(2^2-1^2)+(4^2-3^2)+(6^2-5^2)+\cdots((2n)^2-(2n-1)^2)\\&=3+7+11+\cdots+(4n-1)\\&=\sum_{k=1}^{n}(4k-1)=2n^2+n\end{aligned}$$

$b_n=4n^2-a_n=2n^2-n$

COMMENT 20

(나)의 식에서 $\sum_{k=1}^{2m}a_k=\frac{a_1+a_{2m}}{2}\times 2m=238$이고,

(나)의 식에서 (가)의 식을 빼면 $\sum_{k=m+1}^{2m}a_k=\frac{a_{m+1}+a_{2m}}{2}\times m=168$이다.

등차수열의 간격을 재려보면 $\frac{168}{m}-\frac{119}{m}=\frac{m}{2}\times d$이므로 $98=m^2d$이다.

m과 d가 정수이다. 가능한 조합은 $m=7$, $d=2$ 뿐이다.

COMMENT 21

$\frac{1-g(t)}{1+g(t)}=\tan t$이고 $\frac{h(t)-1}{h(t)+1}=\tan t$이다.

각각의 식에 $t=a$를 대입하면 $g(a)=\frac{1}{3}$, $h(a)=3$이다.

각각의 식을 미분하고 $t=a$를 대입하면 $g'(a)=-\frac{10}{9}$, $h'(a)=10$이다.

COMMENT 27

조건 '$b_5\le 0$이고 $b_6>0$' 또는 '$b_9<0$이고 $b_{10}\ge 0$'를 만족시켜야 한다.

풀면 $\frac{2}{3}\le d<\frac{3}{4}$ 또는 $\frac{6}{5}<d\le\frac{3}{2}$이다.

COMMENT 28

$d+e$는 12의 약수이다.

Case1) $a+b+c=10$, $d+e=2$ $\Rightarrow$ ${}_3\mathrm{H}_7\times{}_2\mathrm{H}_0=36$

Case2) $a+b+c=9$, $d+e=3$ $\Rightarrow$ ${}_3\mathrm{H}_6\times{}_2\mathrm{H}_1=56$

Case3) $a+b+c=8$, $d+e=4$ $\Rightarrow$ ${}_3\mathrm{H}_5\times{}_2\mathrm{H}_2=63$

Case4) $a+b+c=6$, $d+e=6$ $\Rightarrow$ ${}_3\mathrm{H}_3\times{}_2\mathrm{H}_4=50$

COMMENT 29

(가)에 의해 $a_1=1$, $a_2=2$, $a_4=4$, $a_8=8$, $a_{16}=16$, $a_{32}=32$이다.

(나)에 의해 $a_3=4-d$,

$a_7=8-d$, $a_6=8-2d$, $a_5=8-3d$,

$a_{15}=16-d$, $a_{14}=16-2d$, $\cdots$, $a_9=16-7d$,

$a_{31}=32-d$, $a_{30}=32-2d$, $\cdots$, $a_{17}=32-15d$

이다. $\sum_{k=1}^{32}a_k$는, 좀 노가다인데,

$\{1+2+4\times2+8\times4+16\times8+32\times16\}-\{1+(1+2+3)+(1+2+\cdots+7)+(1+2+\cdots+15)\}d$

이므로 $683-155d$이다. $d=3$이고 $a_{64}=64$, $a_{60}=64-4d=52$이다.

COMMENT 30

$x>-1$, $x\neq1$일 때, $g(x)=\dfrac{f(x)}{(x+1)(x-1)}$이다.

(가)에서 $f(x)=k(x-1)^2e^{ax}$이다.

$g(x)=\dfrac{k(x-1)e^{ax}}{x+1}$이다. $g(2)=\dfrac{1}{e}$, $g'(2)=0$을 풀면 $k=3e^{\frac{1}{3}}$, $a=-\dfrac{2}{3}$이다.

※ $g(x)$를 두 점 $(-1,\ 0)$, $(x,\ k(x-1)e^{ax})$ 사이의 평균변화율로 만들다 망한 문항이다.