제 2 교시

수학 영역

5 지 선 다 형

1. $\log_8 16$의 값은? [2점]

① $\frac{7}{6}$ ② $\frac{4}{3}$ ③ $\frac{3}{2}$ ④ $\frac{5}{3}$ ⑤ $\frac{11}{6}$

$$\log_{2^3} 2^4 = \frac{4}{3}\log_2 2$$
$$= \frac{4}{3}$$

2. 공차가 3인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_4 = 100$일 때, a_1의 값은? [2점]

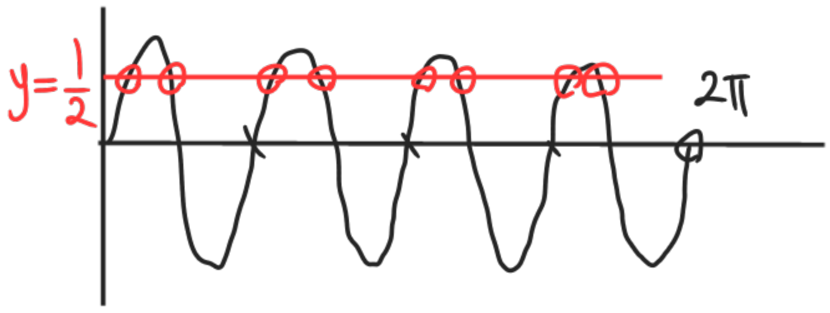
① 91 ② 93 ③ 95 ④ 97 ⑤ 99

$$a_4 - a_1 = 3d$$
$$100 - a_1 = 9$$
$$a_1 = 91$$

3. $0 \le x < 2\pi$일 때, 방정식 $\sin 4x = \frac{1}{2}$의 서로 다른 실근의 개수는? [3점]

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

주기 $= \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$

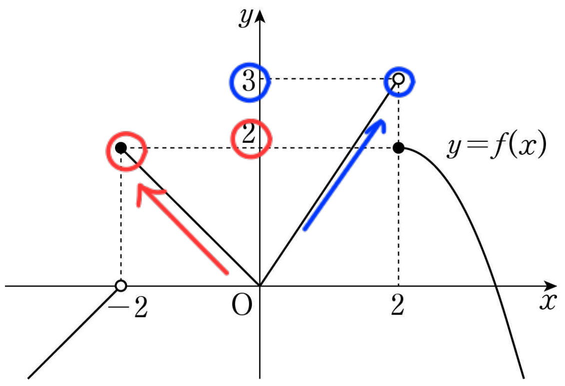


4. $\int_2^{-2}(x^3+3x^2)dx$의 값은? [3점]

① -16 ② -8 ③ 0 ④ 8 ⑤ 16

$$\int_2^{-2}(\cancel{x^3}+3x^2)dx$$
$$= \left[x^3\right]_2^{-2}$$
$$= -8-8$$
$$= -16$$

5. 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



$\lim_{x\to -2+} f(x) + \lim_{x\to 2-} f(x)$의 값은? [3점]

① 6　② 5　③ 4　④ 3　⑤ 2

2　3

6. 함수

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2+ax+b}{x-3} & (x<3) \\ \dfrac{2x+1}{x-2} & (x\ge 3) \end{cases}$$

이 실수 전체의 집합에서 연속일 때, $a-b$의 값은? (단, a, b는 상수이다.) [3점]

① 9　② 10　③ 11　④ 12　⑤ 13

$$f(3)=\frac{2\times3+1}{3-2}=7$$

$$\lim_{x\to3-}\frac{x^2+ax+b}{x-3}=7$$

분모 → 0 이므로 분자 → 0

$9+3a+b=0,\ b=-3a-9$

$$\lim_{x\to3-}\frac{\cancel{(x-3)}(x+a+3)}{\cancel{x-3}}=a+6=7$$

$a=1,\ b=-12$

7. 수열 $\{a_n\}$의 일반항이

$$a_n=\begin{cases} \dfrac{(n+1)^2}{2} & (n\text{이 홀수인 경우}) \\ \dfrac{n^2}{2}+n+1 & (n\text{이 짝수인 경우}) \end{cases}$$

일 때, $\sum_{n=1}^{10} a_n$의 값은? [3점]

① 235　② 240　③ 245　④ 250　⑤ 255

$$\sum_{n=1}^{10} a_n = \sum_{m=1}^{5} a_{2m-1} + \sum_{m=1}^{5} a_{2m}$$
홀　짝

$$=\sum_{m=1}^{5}\frac{(2m-1+1)^2}{2}+\sum_{m=1}^{5}\left(\frac{4m^2}{2}+2m+1\right)$$

$$=\sum_{m=1}^{5}(4m^2+2m+1)$$

$$=4\times\frac{5\times6\times11}{6}+2\times\frac{5\times6}{2}+5$$

$$=220+30+5$$

$$=255$$

8. 곡선 $y=x^3-3x^2-9x$와 직선 $y=k$가 서로 다른 세 점에서 만나도록 하는 정수 k의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $M-m$의 값은? [3점]

① 27 ② 28 ③ 29 ④ 30 ⑤ 31

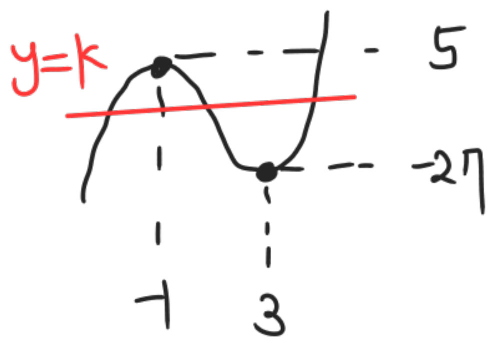
$f(x)=x^3-3x^2-9x$

$f'(x)=3x^2-6x-9$

$=3(x-3)(x+1)$

$f(3)=-27$

$f(-1)=5$

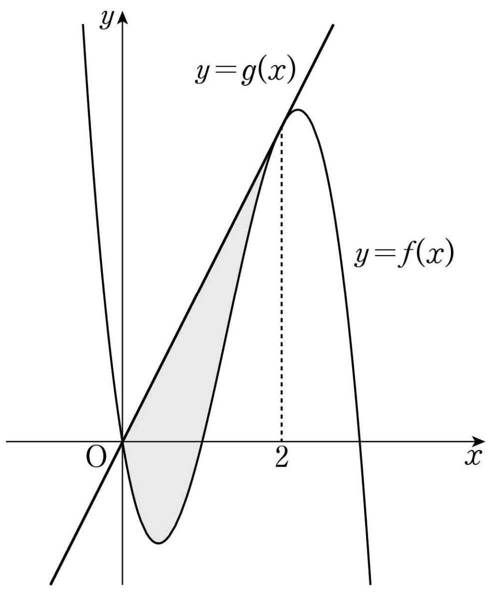


$-27<k<5$

$M=4,\ m=-26$

9. 최고차항의 계수가 -3인 삼차함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점 $(2, f(2))$에서의 접선 $y=g(x)$가 곡선 $y=f(x)$와 원점에서 만난다. 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=g(x)$로 둘러싸인 도형의 넓이는? [4점]

① $\frac{7}{2}$ ② $\frac{15}{4}$ ③ 4 ④ $\frac{17}{4}$ ⑤ $\frac{9}{2}$



$h(x)=g(x)-f(x)$: 최고차항 계수 3인 삼차함수.

↳ $h(x)=0$ 의 근 $x=0$ 또는 $x=2$(중근)

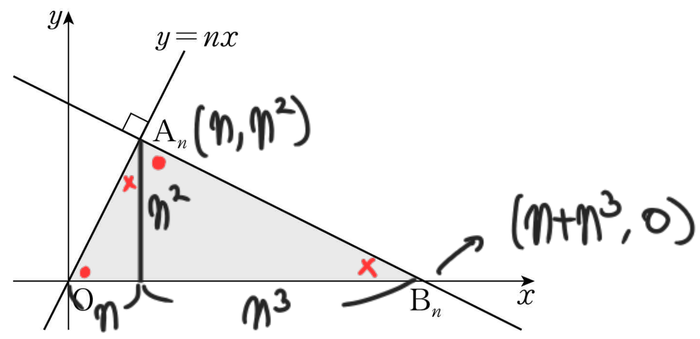
$h(x)=3x(x-2)^2$

$S=\int_0^2 h(x)dx=\int_0^2 3x(x-2)^2dx=\int_{-2}^0 3(x+2)x^2dx$

$=\int_{-2}^0 3x^3+6x^2dx=\left[\frac{3}{4}x^4+2x^3\right]_{-2}^0=-(12-16)$

$=4$

10. 자연수 n에 대하여 점 $A_n(n, n^2)$을 지나고 직선 $y=nx$에 수직인 직선이 x축과 만나는 점을 B_n이라 하자.



다음은 삼각형 A_nOB_n의 넓이를 S_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{8}\frac{S_n}{n^3}$의 값을 구하는 과정이다. (단, O는 원점이다.)

기울기 곱 -1

> 점 $A_n(n, n^2)$을 지나고 직선 $y=nx$에 수직인 직선의 방정식은
>
> $y=$ (가) $\times x+n^2+1$ (가) $f(n)=-\frac{1}{n}$
>
> 이므로 두 점 A_n, B_n의 좌표를 이용하여 S_n을 구하면
>
> $S_n=$ (나) (나) $g(n)=\frac{1}{2}\times(n+n^3)\times n^2$
>
> 따라서
>
> $\sum_{n=1}^{8}\frac{S_n}{n^3}=$ (다)
>
> 이다.

위의 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(n)$, $g(n)$이라 하고, (다)에 알맞은 수를 r라 할 때, $f(1)+g(2)+r$의 값은? [4점]

① 105 ② 110 ③ 115 ④ 120 ⑤ 125

(다) $\frac{S_n}{n^3}=\frac{n^2+1}{2}$

$r=\sum_{n=1}^{8}\frac{n^2+1}{2}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{8}n^2+\sum_{n=1}^{8}\frac{1}{2}$

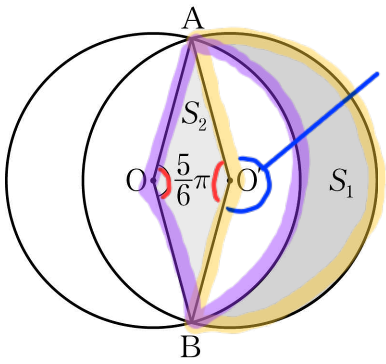
$=\frac{1}{2}\times\frac{8\times9\times17}{6}+4$

$=106$

$f(1)+g(2)+r$

$=-1+20+106=125$

11. 그림과 같이 두 점 O, O′을 각각 중심으로 하고 반지름의 길이가 3인 두 원 O, O'이 한 평면 위에 있다. 두 원 O, O'이 만나는 점을 각각 A, B라 할 때, $\angle \mathrm{AOB} = \frac{5}{6}\pi$이다.



원 O의 외부와 원 O'의 내부의 공통부분의 넓이를 S_1, 마름모 AOBO′의 넓이를 S_2라 할 때, $S_1 - S_2$의 값은? [4점]

① $\frac{5}{4}\pi$ ② $\frac{4}{3}\pi$ ③ $\frac{17}{12}\pi$ ④ $\frac{3}{2}\pi$ ⑤ $\frac{19}{12}\pi$

$S_1 - S_2 =$ $-$ 

$= \frac{1}{2}\times 3^2 \times \frac{7}{6}\pi - \frac{1}{2}\times 3^2 \times \frac{5}{6}\pi$

$= \frac{9}{2}\times\frac{1}{3}\pi = \frac{3}{2}\pi$

12. 두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $\lim_{x\to1}\frac{f(x)-g(x)}{x-1} = 5$
>
> (나) $\lim_{x\to1}\frac{f(x)+g(x)-2f(1)}{x-1} = 7$

두 실수 a, b에 대하여 $\lim_{x\to1}\frac{f(x)-a}{x-1} = b\times g(1)$일 때, ab의 값은? [4점]

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

(가) $f(1) = g(1)$

$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)-(g(x)-g(1))}{x-1} = 5$

$f'(1) - g'(1) = 5$ ⋯ ㉠

(나)

$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)+g(x)-g(1)}{x-1} = 7$

$f'(1) + g'(1) = 7$ ⋯ ㉡

㉠ & ㉡ 연립, $f'(1)=6$, $g'(1)=1$

$f(1)$

$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-a}{x-1} = b\,g(1) = f'(1) = 6$

↳ $b = \frac{6}{g(1)}$

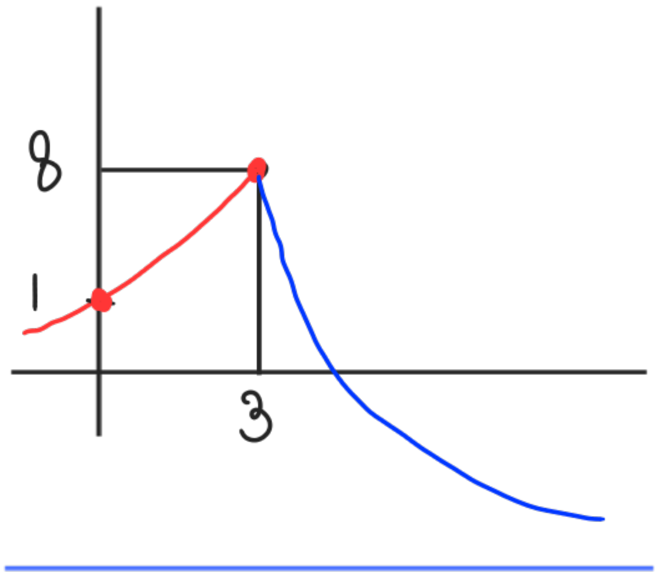
$ab = \cancel{f(1)} \times \frac{6}{\cancel{g(1)}} = 6$

13. 함수

$$f(x)=\begin{cases} 2^x & (x<3) \\ \left(\dfrac{1}{4}\right)^{x+a}-\left(\dfrac{1}{4}\right)^{3+a}+8 & (x \geq 3) \end{cases}$$

에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 중에서 y좌표가 정수인 점의 개수가 23일 때, 정수 a의 값은? [4점]

① -7 ② -6 ③ -5 ④ -4 ⑤ -3



$y=-\left(\frac{1}{4}\right)^{3+a}+8$

$f(3)=\left(\frac{1}{4}\right)^{3+a}-\left(\frac{1}{4}\right)^{3+a}+8=8$

① $x \leq 3$

$0<f(x)\leq 8$

$f(x)$ 값 1부터 8까지 8개

② $x>3$

전체 23개이므로 $x>3$ 에서 15개

$-\left(\frac{1}{4}\right)^{a+3}+8<f(x)<8$

$f(x)$ 값 $\boxed{-7}$ 부터 7까지 15개

$-8\leq -\left(\frac{1}{4}\right)^{a+3}+8<-7$

$15<\left(\frac{1}{4}\right)^{a+3}\leq 16=4^2$

$a=-5$ 일 때 성립

14. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=f(x)+|f'(x)|$$

라 할 때, 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(0)=g(0)=0$
(나) 방정식 $f(x)=0$은 양의 실근을 갖는다.
(다) 방정식 $\lvert f(x)\rvert=4$의 서로 다른 실근의 개수는 3이다.

$g(3)$의 값은? [4점]

① 9 ② 10 ③ 11 ④ 12 ⑤ 13

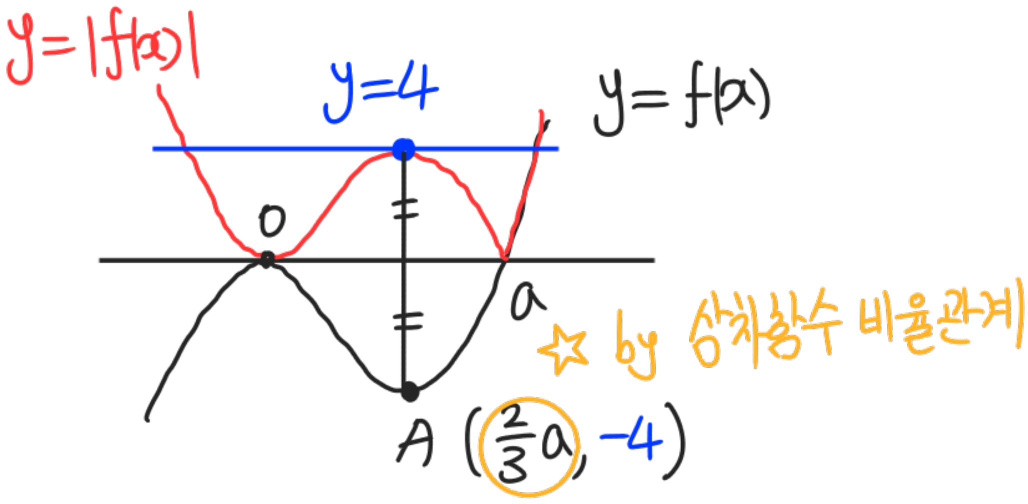
(가) $g(0)=f(0)+|f'(0)|=0$

$f(0)=f'(0)=0$

$\rightarrow f(x)=0$ 은 중근 $x=0$

(나) 양의 실근 a라 하면

$f(x)=x^2(x-a)$

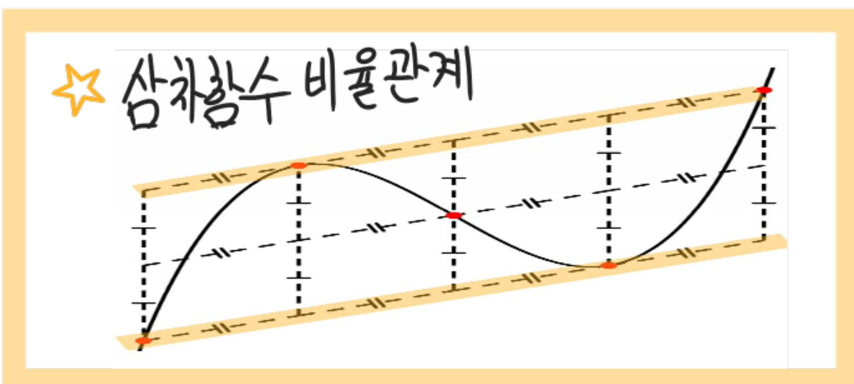


$-4=f\left(\frac{2}{3}a\right)=\frac{4}{9}a^2\times\left(-\frac{1}{3}a\right)$

$a^3=27,\ a=3$

$f(x)=x^3-3x^2,\ f'(x)=3x^2-6x$

$g(3)=f(3)+|f'(3)|=0+9=9$



15. 그림과 같이 $\overline{AB}=5$, $\overline{BC}=4$, $\cos(\angle ABC)=\frac{1}{8}$ 인 삼각형 ABC 가 있다. $\angle ABC$ 의 이등분선과 $\angle CAB$ 의 이등분선이 만나는 점을 D, 선분 BD 의 연장선과 삼각형 ABC 의 외접원이 만나는 점을 E 라 할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

원주각 $\angle ABE=\angle ACE$

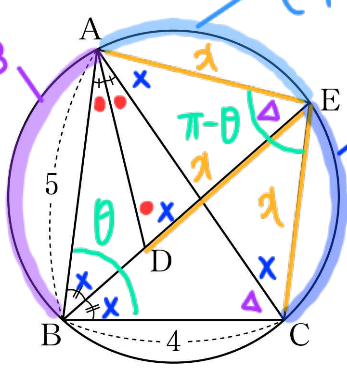
원주각 $\angle AEB=\angle ACB$

$\triangle ABC$에서 $\pi = \bullet\bullet + \times\times + \triangle$

$\angle ADE = \pi - \angle DAE - \angle AED$
$\qquad\qquad\qquad\quad \bullet\ \times \qquad \triangle$

$= \bullet + \times = \angle DAE$

$\therefore$ $\overline{AE}=\overline{ED}$ 이등변



원주각

$\angle EBC = \angle EAC$

< 보 기 >

ㄱ. $\overline{AC}=6$

ㄴ. $\overline{EA}=\overline{EC}$

ㄷ. $\overline{ED}=\frac{31}{8}$

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

ㄱ $\cos(\angle ABC) = \frac{1}{8} = \frac{5^2+4^2-\overline{AC}^2}{2\times5\times4}$

$\overline{AC}^2 = 36$, $\overline{AC}=6$

ㄴ 원주각 $\angle ABE$, 원주각 $\angle EBC$ 같으므로

$\overline{AE} = \overline{CE}$ 따라서 $\triangle ACE$ 이등변

ㄷ $\overline{AE} = \overline{EC} = x$,

$\angle ABC = \theta$ 라 하면 $\angle AEC = \pi - \theta$ (내접사각형)

$\triangle ACE$ 에서

$\cos(\pi-\theta) = -\cos\theta = -\frac{1}{8} = \frac{x^2+x^2-6^2}{2x^2}$

$-\frac{1}{8} = 1 - \frac{18}{x^2}$, $\frac{18}{x^2} = \frac{9}{8}$, $x^2=16$, $x=4$

$\overline{ED} = \overline{AE} = x = 4$

단답형

16. 두 함수 $f(x)=2x^2+5x+3$, $g(x)=x^3+2$ 에 대하여 함수 $f(x)g(x)$ 의 $x=0$ 에서의 미분계수를 구하시오. [3점]

$f'(x) = 4x+5$, $g'(x) = 3x^2$

$f(0)=3$, $f'(0)=5$, $g(0)=2$, $g'(0)=0$

$f'(0)g(0) + f(0)g'(0)$

$= 5\times2 + 3\times0 = 10$

$\boxed{10}$

17. 모든 실수 x 에 대하여 이차부등식

$$3x^2 - 2(\log_2 n)x + \log_2 n > 0$$

이 성립하도록 하는 자연수 n 의 개수를 구하시오. [3점]

$D/4 = (\log_2 n)^2 - 3\log_2 n$

$= \log_2 n(\log_2 n - 3) < 0$

$0 < \log_2 n < 3$

$1 < n < 8$

$\boxed{6}$

18. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $F(x)$의 도함수 $f(x)$가

$$f(x)=\begin{cases}-2x & (x<0)\\ k(2x-x^2) & (x\ge 0)\end{cases}$$

이다. $F(2)-F(-3)=21$일 때, 상수 k의 값을 구하시오. [3점]

$$F(x)=\begin{cases}-x^2+C_1 & (x<0)\\ k(x^2-\frac{1}{3}x^3)+C_2 & (x\ge 0)\end{cases}$$

$=C$ ($x=0$ 연속)

$F(2)=\frac{4}{3}k+C$

$F(-3)=-9+C$

$21=F(2)-F(-3)=\frac{4}{3}k+9$

$\frac{4}{3}k=12,\ k=9$ $\boxed{9}$

19. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자. $a_1=2,\ a_2=4$이고 2 이상의 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}S_n=a_nS_{n+1}$$

이 성립할 때, S_5의 값을 구하시오. [3점]

$(S_{n+1}-S_n)$ (S_n-S_{n-1}) $(n\ge 2)$

$a_{n+1}S_n=a_nS_{n+1}$

$\cancel{S_{n+1}S_n}-S_n^2=\cancel{S_nS_{n+1}}-S_{n-1}S_{n+1}$ $(n\ge 2)$

$S_n^2=S_{n-1}S_{n+1}$ $(n\ge 2)$

S_n이 등비수열

$S_1=a_1=2$

$S_2=a_1+a_2=6$ $r=3$

$S_5=S_1\times r^4=2\times 3^4=162$

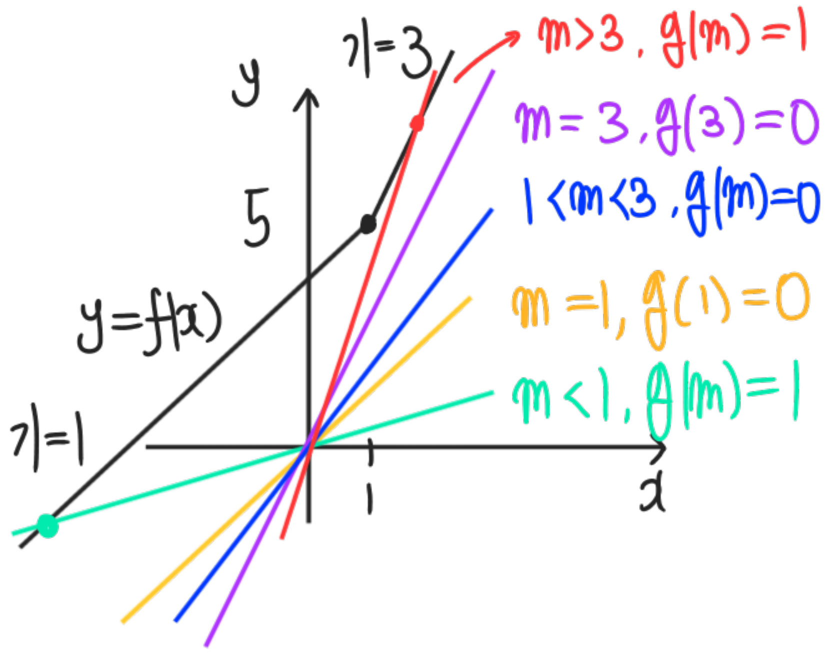
$\boxed{162}$

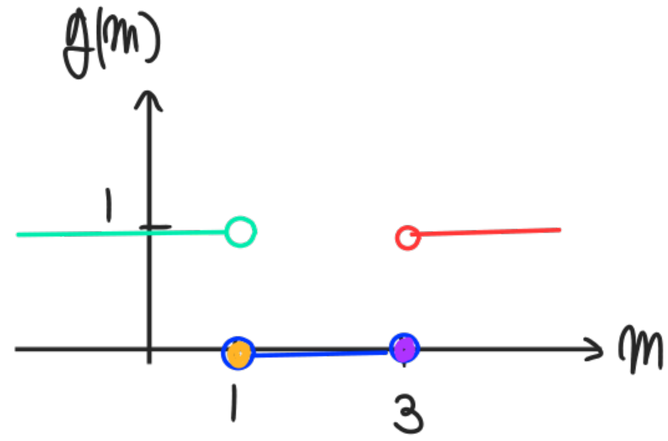
20. 실수 m에 대하여 직선 $y=mx$와 함수

$$f(x)=2x+3+|x-1|$$

의 그래프의 교점의 개수를 $g(m)$이라 하자. 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $h(x)$에 대하여 함수 $g(x)h(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, $h(5)$의 값을 구하시오. [4점]

$$f(x)=\begin{cases}3x+2 & (x\ge 1)\\ x+4 & (x<1)\end{cases}$$





$\lim_{x\to 1-} g(x)h(x)=1\times h(1)$

$\lim_{x\to 1+} g(x)h(x)=0\times h(1)$ $\therefore h(1)=0$

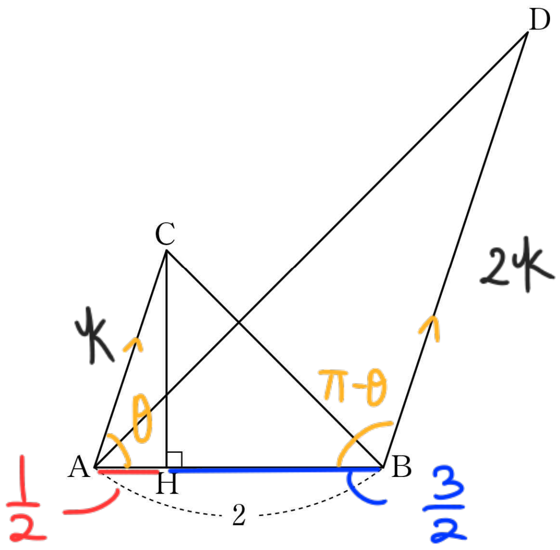
$\lim_{x\to 3-} g(x)h(x)=0\times h(3)$

$\lim_{x\to 3+} g(x)h(x)=1\times h(3)$ $\therefore h(3)=0$

$h(x)=1\times(x-1)(x-3)$

$h(5)=4\times 2=8$ $\boxed{8}$

21. 그림과 같이 $\overline{AB}=2$, $\overline{AC} /\!/ \overline{BD}$, $\overline{AC}:\overline{BD}=1:2$인 두 삼각형 ABC, ABD가 있다. 점 C에서 선분 AB에 내린 수선의 발 H는 선분 AB를 1:3으로 내분한다.



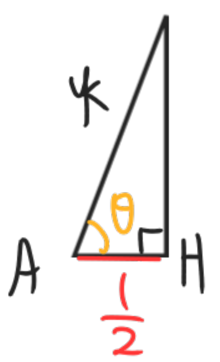
두 삼각형 ABC, ABD의 외접원의 반지름의 길이를 각각 r, R라 할 때, $4(R^2-r^2)\times\sin^2(\angle CAB)=51$이다. $\overline{AC}^2$의 값을 구하시오. (단, $\angle CAB<\frac{\pi}{2}$) [4점] θ

$\triangle ABC$ 사인 법칙 $2r=\dfrac{\overline{BC}}{\sin\theta}$

$\triangle ABD$ 사인법칙 $2R=\dfrac{\overline{AD}}{\sin(\pi-\theta)}=\dfrac{\overline{AD}}{\sin\theta}$

$(4R^2-4r^2)\sin^2\theta=51$

$\overline{AD}^2-\overline{BC}^2=51 \cdots ⊛$



$\cos\theta=\dfrac{1}{2k}$

$\triangle ABC$ 코사인 법칙

$\overline{BC}^2=k^2+4-2\times k\times 2\times \underbrace{\cos\theta}_{\frac{1}{2k}}=k^2+2$

$\triangle ABD$ 코사인 법칙

$\overline{AD}^2=4k^2+4-2\times 2k\times 2\underbrace{\cos(\pi-\theta)}_{-\frac{1}{2k}}=4k^2+8$

⊛에 대입 $3k^2+6=51$, $k^2=15$

$\boxed{15}$

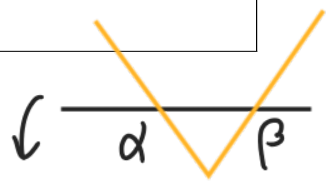
22. 양수 a와 일차함수 $f(x)$에 대하여 실수 전체의 집합에서 정의된 함수

$$g(x)=\int_0^x (t^2-4)\{|f(t)|-a\}\,dt$$

가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $g(x)$는 극값을 갖지 않는다.
(나) $g(2)=5$

$g(0)-g(-4)$의 값을 구하시오. [4점]

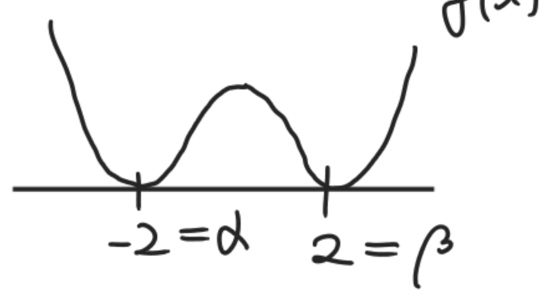


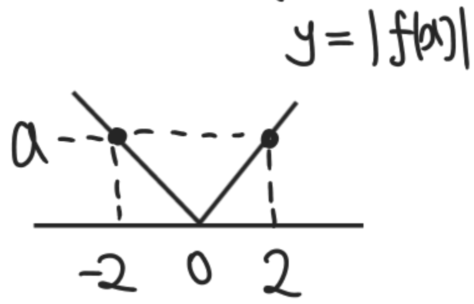
$g'(x)=(x^2-4)(|f(x)|-a)$

$\Rightarrow x=\pm 2,\ \alpha, \beta$

$g(x)$ 극값 없으므로 $g'(x)$의 부호 변화 없다

$\therefore \alpha=-2, \beta=2$





$f(x)=\dfrac{a}{2}x$

$5=g(2)=\int_0^2 (t^2-4)(\frac{a}{2}t-a)\,dt$

$5=\frac{a}{2}\int_0^2 (t-2)^2(t+2)\,dt$

$10=a\int_{-2}^0 t^2(t+4)\,dt$

$=a\int_{-2}^0 (t^3+4t^2)\,dt$

$=a\left[\frac{1}{4}t^4+\frac{4}{3}t^3\right]_{-2}^0$

$10=a\times\frac{20}{3}$, $a=\frac{3}{2}$

$\cancel{g(0)}^{\,0}-g(-4)$

$=-\int_0^{-4}(t^2-4)(-\frac{3}{4}t-\frac{3}{2})\,dt$

$=\frac{3}{4}\int_0^{-4}(t-2)(t+2)^2\,dt$

$=\frac{3}{4}\int_2^{-2}(t-4)t^2\,dt$

$=\frac{3}{4}\int_2^{-2}\cancel{t^3}-4t^2\,dt$

$=\int_{-2}^2 3t^2\,dt$

$=\left[t^3\right]_{-2}^2$

$=8-(-8)=16$

$\boxed{16}$

제 2 교시 수학 영역(확률과 통계)

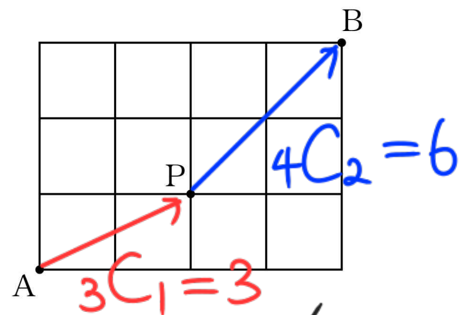
5 지 선 다 형

23. ${}_3\mathrm{H}_6$의 값은? [2점]

① 24 ② 26 ③ 28 ④ 30 ⑤ 32

$${}_{3+6-1}C_6 = {}_8C_6 = {}_8C_2$$
$$= \frac{8\times7}{2}$$

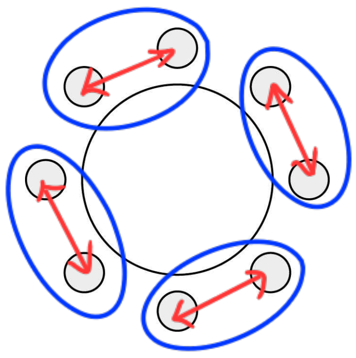
24. 그림과 같이 직사각형 모양으로 연결된 도로망이 있다. 이 도로망을 따라 A 지점에서 출발하여 P 지점을 지나 B 지점까지 최단거리로 가는 경우의 수는? [3점]



① 12 ② 14 ③ 16 ④ 18 ⑤ 20

25. 어느 고등학교 3학년의 네 학급에서 대표 2명씩 모두 8명의 학생이 참석하는 회의를 한다. 이 8명의 학생이 일정한 간격을 두고 원 모양의 탁자에 모두 둘러앉을 때, 같은 학급 학생끼리 서로 이웃하게 되는 경우의 수는? (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.) [3점]

① 92 ② 96 ③ 100 ④ 104 ⑤ 108



$(4-1)! \times 2^4$

$= 6 \times 16 = 96$

26. 같은 종류의 연필 6자루와 같은 종류의 지우개 5개를 세 명의 학생에게 남김없이 나누어 주려고 한다. 각 학생이 적어도 한 자루의 연필을 받도록 나누어 주는 경우의 수는? (단, 지우개를 받지 못하는 학생이 있을 수 있다.) [3점]

① 210 ② 220 ③ 230 ④ 240 ⑤ 250

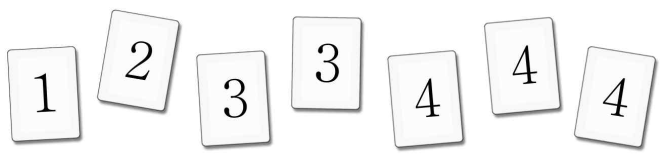
연필 하나씩 주고 남은 3자루

${}_3H_3 = {}_5C_3 = 10$

지우개 ${}_3H_5 = {}_7C_5 = 21$

27. 숫자 1, 2, 3, 3, 4, 4, 4가 하나씩 적힌 7장의 카드를 모두 한 번씩 사용하여 일렬로 나열할 때, 1이 적힌 카드와 2가 적힌 카드 사이에 두 장 이상의 카드가 있도록 나열하는 경우의 수는? [3점]

① 180 ② 185 ③ 190 ④ 195 ⑤ 200



① 3, 3, 4, 4, 4 우선 배열

$\rightarrow {}_5C_2 = 10$ - ⓐ

② 사이 사이 1, 2 넣기

V ③ V ③ V ④ V ④ V ④ V

6개 자리 V 에 배치 $\rightarrow 6\times5=30$

이웃한 V에 배치 $\rightarrow 5\times2=10$

$\therefore 30-10=20$ - ⓑ

28. 두 집합

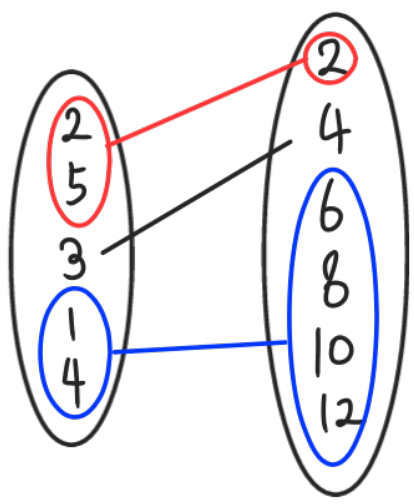
$$X=\{1, 2, 3, 4, 5\},\quad Y=\{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$$

에 대하여 X에서 Y로의 함수 f 중에서 다음 조건을 만족시키는 함수의 개수는? [4점]

(가) $f(2) < f(3) < f(4)$
(나) $f(1) > f(3) > f(5)$

① 100 ② 102 ③ 104 ④ 106 ⑤ 108

$f(3)$을 정한 후, $f(3)$ 보다 큰값 $f(1), f(4)$
$f(3)$ 보다 작은 값 $f(2), f(5)$



$f(3)=4,\ 1^2\times4^2=16$
$f(3)=6,\ 2^2\times3^2=36$
$f(3)=8,\ 3^2\times2^2=36$
$f(3)=10,\ 4^2\times1^2=16$

104개

단답형

29. 5 이하의 자연수 a, b, c, d에 대하여 부등식

$$a \le b+1 \le c \le d$$

를 만족시키는 모든 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수를 구하시오. [4점]

$b=1$ $a \le 2 \le c \le d \le 5$

$2 \times {}_4H_2 = 2 \times 10 = 20$

$b=2$ $a \le 3 \le c \le d \le 5$

$3 \times {}_3H_2 = 3 \times 6 = 18$

$b=3$ $a \le 4 \le c \le d \le 5$

$4 \times {}_2H_2 = 4 \times 3 = 12$

$b=4$ $a \le 5 \le c \le d \le 5$

$5 \times 1 = 5$

$\boxed{55}$

30. 숫자 1, 2, 3, 4 중에서 중복을 허락하여 네 개를 선택한 후 일렬로 나열할 때, 다음 조건을 만족시키도록 나열하는 경우의 수를 구하시오. [4점]

> (가) 숫자 1은 한 번 이상 나온다.
> (나) 이웃한 두 수의 차는 모두 2 이하이다.

4가 없으면 간단,
1과 4가 이웃하지 않게

	1	4	
①		0개	→ 1,2,3 중복순열 $3^4=81$ / 1없이 중복순열 $2^4=16$ / $81-16=65$
②	1개	1개	→ □△□△ / △□△□ / □△△□ $3\times2^2\times2=24$
③	1개	2개	→ □△□□ / □□△□ $2\times2=4$
④	2개	1개	→ 위와 마찬가지 4

2또는3
1하나 4하나
4 2또는 3 1

$65+24+4+4=97$ $\boxed{97}$

* 확인 사항
○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기) 했는지 확인하시오.

제 2 교시

수학 영역(미적분)

5지선다형

23. $\lim_{n\to\infty}\frac{10n^3-1}{(n+2)(2n^2+3)}$의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$$\lim_{n\to\infty}\frac{10n^3-1}{2n^3+4n^2+3n+6}=\frac{10}{2}=5$$

24. 수열 $\{a_n\}$의 일반항이

$$a_n=\left(\frac{x^2-4x}{5}\right)^n$$

일 때, 수열 $\{a_n\}$이 수렴하도록 하는 모든 정수 x의 개수는? [3점]

① 7 ② 8 ③ 9 ④ 10 ⑤ 11

$$\lim_{n\to\infty} r^n \begin{cases} \infty & (r>1) \\ 1 & (r=1) \\ 0 & (-1<r<1) \\ \text{진동} & (r\le -1) \end{cases}$$

수렴

$$-1<\frac{x^2-4x}{5}\le 1$$

$x^2-4x+5>0$ & $x^2-4x-5\le 0$

$(x-2)^2+1\ge 0$ 이므로 모든 실수

$(x-5)(x+1)\le 0$

$-1\le x\le 5$

$\therefore 5-(-1)+1=7$

25. 모든 항이 양수인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1} = a_1 a_n$$

을 만족시킨다. $\lim_{n\to\infty} \frac{3a_{n+3}-5}{2a_n+1} = 12$일 때, a_1의 값은? [3점]

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

a_n은 공비 a_1인 등비수열

$a_n = a_1^n$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3a_1^{n+3}-5}{2a_1^n+1} = \begin{cases} \frac{3-5}{2+1} = -\frac{2}{3} & (a_1=1) \\ \frac{0-5}{0+1} = -5 & (-1<a_1<1) \\ \text{발산} & (a_1=-1) \\ \frac{3}{2}a_1^3 = 12 & (|a_1|>1) \end{cases}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{3a_1^3 - \frac{5}{a_1^n}}{2+\frac{1}{a_1^n}}$$

$a_1^3 = 8$

$a_1 = 2$

26. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$2n^2 - 3 < a_n < 2n^2 + 4$$

를 만족시킨다. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n^3}$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ $\frac{5}{6}$ ④ 1 ⑤ $\frac{7}{6}$

$2\times1^2 - 3 < a_1 < 2\times1^2+4$

$2\times2^2 - 3 < a_2 < 2\times2^2+4$

$\vdots$

$+\ 2\times n^2 - 3 < a_n < 2\times n^2+4$

$$2\times\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 3n < S_n < 2\times\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 4n$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)(2n+1)-9}{3n^2} \le \lim_{n\to\infty} S_n \le \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)(2n+1)-12}{3n^2}$$

$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{2}{3}$

27. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{(k-1)!} = \frac{3}{(n+2)!}$$

을 만족시킨다. $\lim_{n \to \infty}(a_1 + n^2 a_n)$의 값은? [3점]

① $-\frac{7}{2}$ ② -3 ③ $-\frac{5}{2}$ ④ -2 ⑤ $-\frac{3}{2}$

$n=1 \quad \frac{a_1}{0!} = \frac{3}{3!}, \quad a_1 = \frac{1}{2}$

$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{(k-1)!} = \frac{3}{(n+2)!} \quad \cdots ㉠$

$S_{n-1} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{a_k}{(k-1)!} = \frac{3}{(n+1)!} \quad \cdots ㉡$

$㉠-㉡ \quad \frac{a_n}{(n-1)!} = \frac{3}{(n+2)!} - \frac{3}{(n+1)!} \quad (n \geq 2)$

$= \left(\frac{1}{n+2} - 1\right)\frac{3}{(n+1)!}$

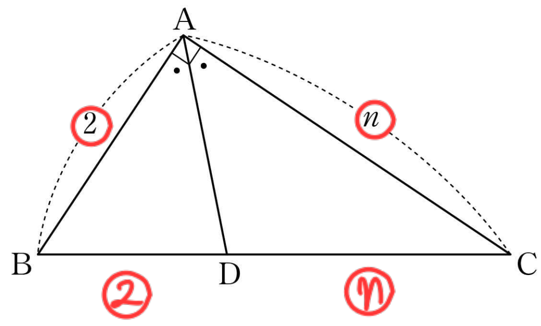
$\frac{a_n}{\cancel{(n-1)!}} = -\frac{\cancel{n+1}}{n+2} \times \frac{3}{\cancel{(n+1)} \times n \times \cancel{(n-1)!}}$

$\lim_{n \to \infty} n^2 a_n = \lim_{n \to \infty} \frac{-3n^2}{n(n+2)} = -3$

$\therefore \frac{1}{2} - 3 = -\frac{5}{2}$

28. 자연수 n에 대하여 $\angle A = 90°$, $\overline{AB} = 2$, $\overline{CA} = n$인 삼각형 ABC에서 $\angle A$의 이등분선이 선분 BC와 만나는 점을 D라 하자. 선분 CD의 길이를 a_n이라 할 때, $\lim_{n \to \infty}(n - a_n)$의 값은? [4점]

① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ 2 ④ $2\sqrt{2}$ ⑤ 4



$\overline{BC} = \sqrt{n^2+4}$

$\overline{CD} = \overline{BC} \times \frac{n}{n+2} = \frac{n\sqrt{n^2+4}}{n+2} = a_n$

$\lim_{n \to \infty}(n - a_n) = \lim_{n \to \infty}\left(n \times \frac{n+2-\sqrt{n^2+4}}{n+2}\right)$

$= \lim_{n \to \infty} \frac{n}{n+2} \times \frac{(n+2)^2 - (n^2+4)}{n+2+\sqrt{n^2+4}}$

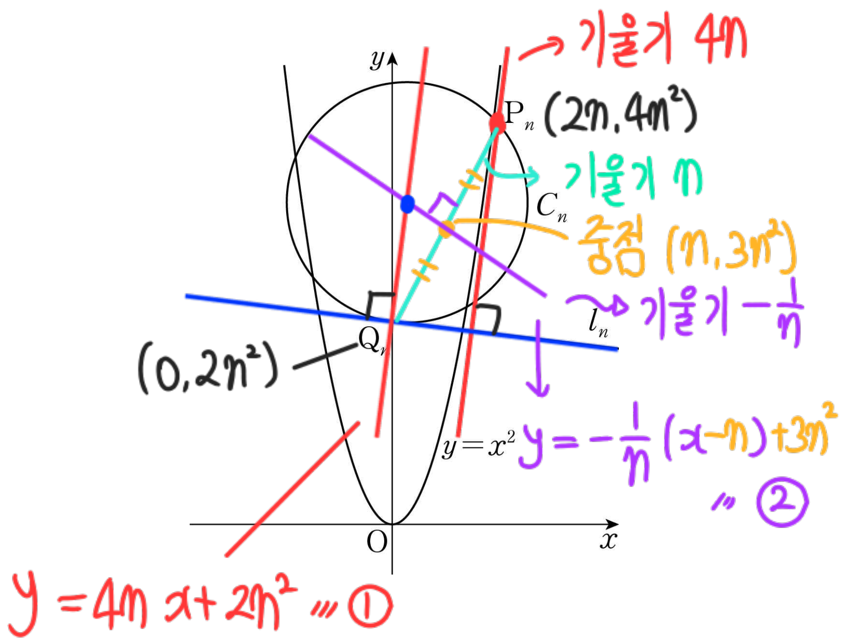
$= \lim_{n \to \infty} \frac{n}{n+2} \times \frac{4n}{n+2+\sqrt{n^2+4}}$

$= 1 \times 2$

단답형

$y' = 2x$

29. 자연수 n에 대하여 곡선 $y=x^2$ 위의 점 $P_n(2n, 4n^2)$에서의 접선과 수직이고 점 $Q_n(0, 2n^2)$을 지나는 직선을 l_n이라 하자. 점 P_n을 지나고 점 Q_n에서 직선 l_n과 접하는 원을 C_n이라 할 때, 원점을 지나고 원 C_n의 넓이를 이등분하는 직선의 기울기를 a_n이라 하자. $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}$의 값을 구하시오. [4점]



$$\begin{cases} y = 4nx+2n^2 \cdots ① \\ y = -\frac{1}{n}x + 3n^2+1 \cdots ② \end{cases}$$ 연립

$$\left(4n+\frac{1}{n}\right)x = n^2+1$$

$$\frac{4n^2+1}{n}x = n^2+1,$$

중심 $x = \frac{n^3+n}{4n^2+1}$, $y = \frac{12n^4+6n^2}{4n^2+1}$

넓이 이등분 : 중심 지나.

$$a_n = \frac{y}{x} = \frac{12n^4+6n^2}{n^3+n} = \frac{12n^3+6n}{n^2+1}$$

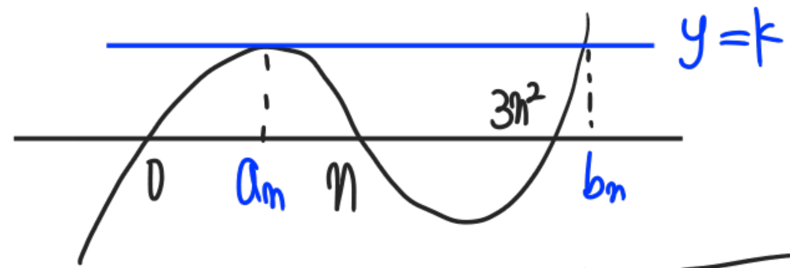
$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{12n^3+6n}{n^3+n} = 12$$

$\boxed{12}$

30. 자연수 n에 대하여 삼차함수 $f(x)=x(x-n)(x-3n^2)$이 극대가 되는 x를 a_n이라 하자. x에 대한 방정식 $f(x)=f(a_n)$의 근 중에서 a_n이 아닌 근을 b_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n b_n}{n^3}=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

$$f(x) = x^3-(n+3n^2)x^2+3n^3x$$

$$f'(x) = 3x^2-2(n+3n^2)x+3n^3$$



$f'(x)=0$ 의 해 $\frac{n+3n^2 \pm \sqrt{(n+3n^2)^2-9n^3}}{3}$

$$a_n = \frac{n+3n^2-\sqrt{9n^4-3n^3+n^2}}{3}$$

$$f(x)-k = x^3-(n+3n^2)x^2+3n^3x-k=0$$

의 해 $x=a_n$(중근) 또는 $x=b_n$

근과 계수 → $2a_n+b_n = n+3n^2$

$$b_n = \frac{n+3n^2+2\sqrt{9n^4-3n^3+n^2}}{3}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n b_n}{n^3} = \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}\times\frac{b_n}{n^2}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{(n+3n^2)^2-(9n^4-3n^3+n^2)}{3n(n+3n^2+\sqrt{9n^4-3n^3+n^2})}\times\frac{\frac{1}{n}+3+2\sqrt{9-\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}}{3}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{3}{\frac{1}{n}+3+\sqrt{9-\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}}\times 3$$

$$= \frac{1}{2}\times 3 = \frac{3}{2}.$$

$\boxed{5}$

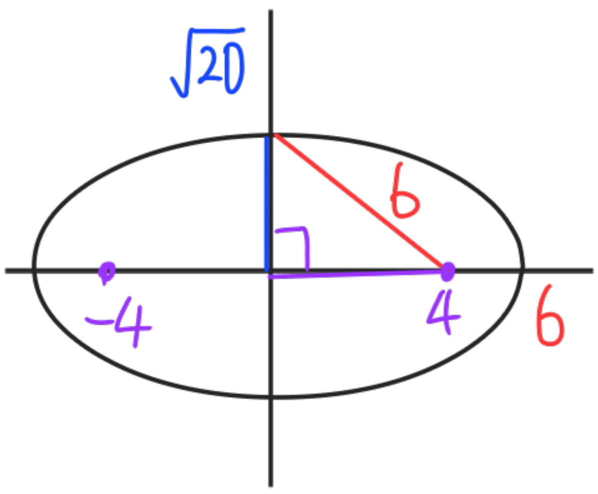
제 2 교시

수학 영역(기하)

5지선다형

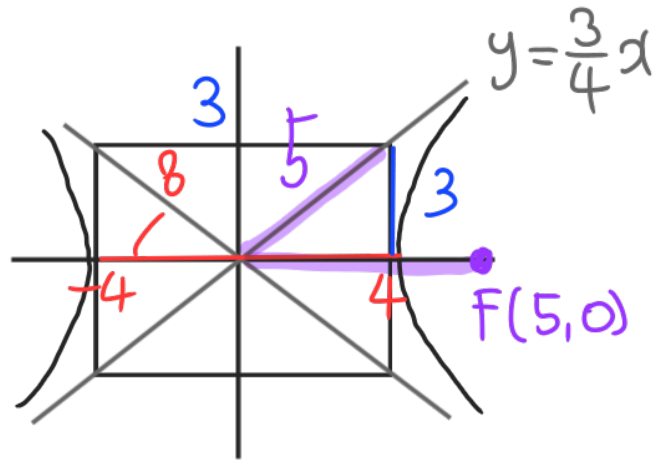
23. 타원 $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{20}=1$의 두 초점을 F, F′이라 할 때, 선분 FF′의 길이는? [2점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10



24. 두 초점이 F$(c, 0)$, F′$(-c, 0)$이고 주축의 길이가 8인 쌍곡선의 한 점근선이 직선 $y=\frac{3}{4}x$일 때, 양수 c의 값은? [3점]

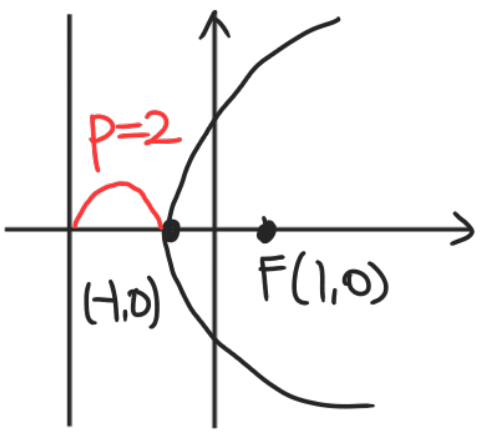
① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9



3^2, 주축 길이 6

25. 꼭짓점이 점 $(-1, 0)$이고 준선이 직선 $x=-3$인 포물선의 방정식이 $y^2=ax+b$일 때, 두 상수 a, b의 합 $a+b$의 값은? [3점]

① 14 ② 16 ③ 18 ④ 20 ⑤ 22

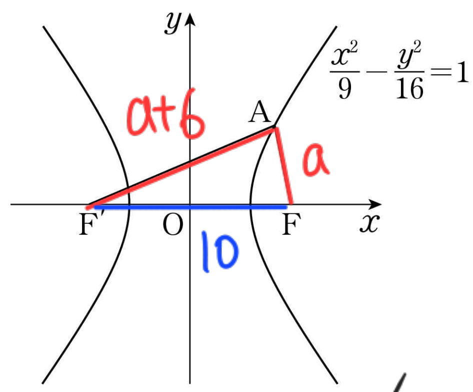


$x=-3$

$y^2 = 4\times2\times(x+1)$
$= 8x+8$

26. 그림과 같이 쌍곡선 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$의 두 초점 F, F′과 쌍곡선 위의 점 A에 대하여 삼각형 AF′F의 둘레의 길이가 24일 때, 삼각형 AF′F의 넓이는? (단, 점 A는 제1사분면의 점이다.) [3점]

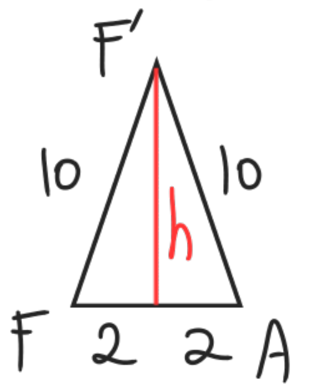
$9+16=5^2 \rightarrow F(5,0)$



① $4\sqrt{3}$ ② $4\sqrt{6}$ ③ $8\sqrt{3}$ ④ $8\sqrt{6}$ ⑤ $16\sqrt{3}$

$24=(a+6)+a+10$
$2a=8$
$a=4$

△AF′F 이등변



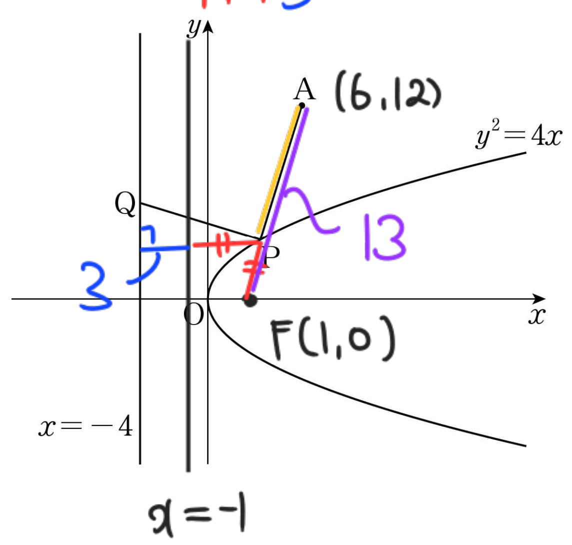
$h=\sqrt{10^2-2^2}$
$=\sqrt{96}$
$=4\sqrt{6}$

$S=\frac{1}{2}\times4\times4\sqrt{6}=8\sqrt{6}$

27. 점 A(6, 12)와 포물선 $y^2=4x$ 위의 점 P, 직선 $x=-4$ 위의 점 Q에 대하여 $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{PQ}}$의 최솟값은? [3점]

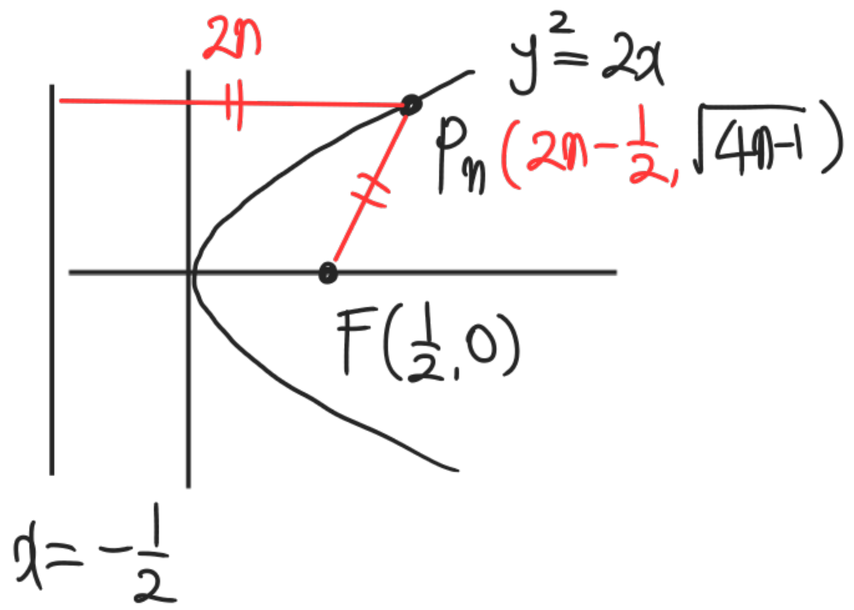
① 12 ② 14 ③ 16 ④ 18 ⑤ 20

$\overline{\mathrm{PF}}+3$



28. 자연수 n에 대하여 초점이 F인 포물선 $y^2=2x$ 위의 점 P_n이 $\overline{\mathrm{FP}_n}=2n$을 만족시킬 때, $\sum_{n=1}^{8}\overline{\mathrm{OP}_n}^2$의 값은? (단, O는 원점이고, 점 P_n은 제1사분면에 있다.) [4점]

① 874 ② 876 ③ 878 ④ 880 ⑤ 882



$$\overline{OP_n}^2=(2n-\tfrac{1}{2})^2+4n-1$$

$$=4n^2+2n-\tfrac{3}{4}$$

$$\sum_{n=1}^{8}(4n^2+2n-\tfrac{3}{4})$$

$$=4\sum_{n=1}^{8}n^2+2\sum_{n=1}^{8}n-\tfrac{3}{4}\sum_{n=1}^{8}1$$

$$=4\times\frac{8\times9\times17}{6}+2\times\frac{8\times9}{2}-\frac{3}{4}\times8$$

$$=16\times51+72-6$$

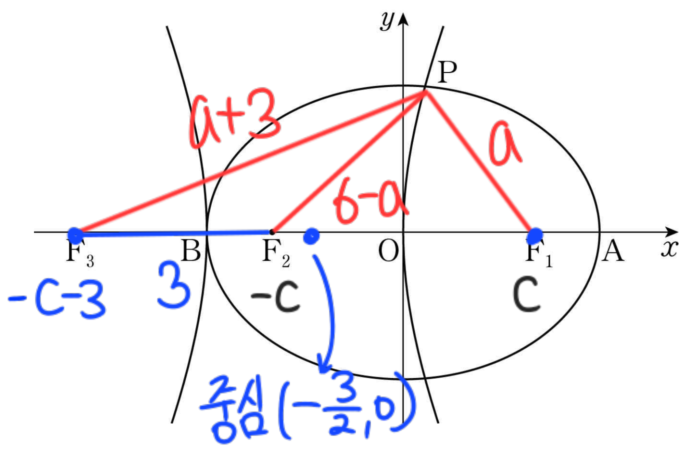
$$=510+306+72-6$$

$$=582+300$$

$$=882$$

단답형

29. 두 초점이 $F_1(c, 0)$, $F_2(-c, 0)$ $(c>0)$인 타원이 x축과 두 점 A(3, 0), B(−3, 0)에서 만난다. 선분 BO가 주축이고 점 F_1이 한 초점인 쌍곡선의 초점 중 F_1이 아닌 점을 F_3이라 하자. 쌍곡선이 타원과 제1사분면에서 만나는 점을 P라 할 때, 삼각형 PF_3F_2의 둘레의 길이를 구하시오. (단, O는 원점이다.) [4점]



$\overline{F_1P}+\overline{F_2P}=6$

$\overline{F_3P}-\overline{F_1P}=3$

쌍곡선 중심 = $\overline{BO}$ 중점 $=(-\frac{3}{2},0)$

$=\overline{F_1F_3}$ 중점 ∴ $F_3(-c-3,0)$

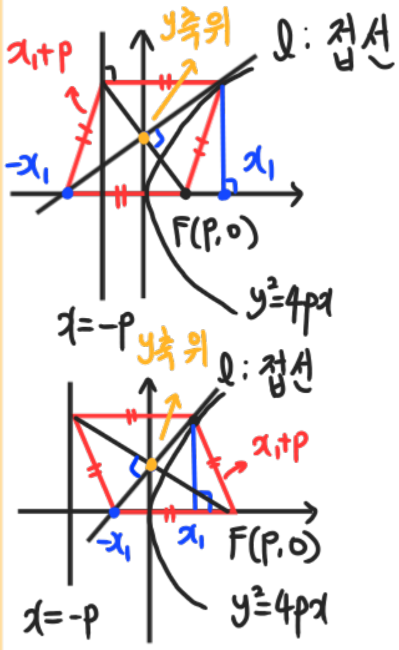
$\overline{F_2F_3}=3$

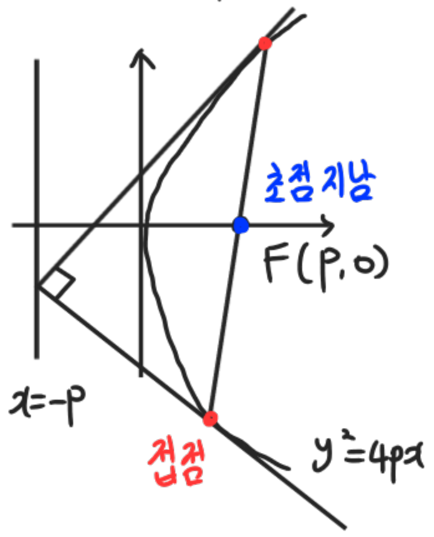
둘레 $(a+3)+(6-a)+3=12$ $\boxed{12}$

30번. 포물선 접선 성질 알아두기

① 마름모가 된다

② 준선 위의 점에서 접선은 수직



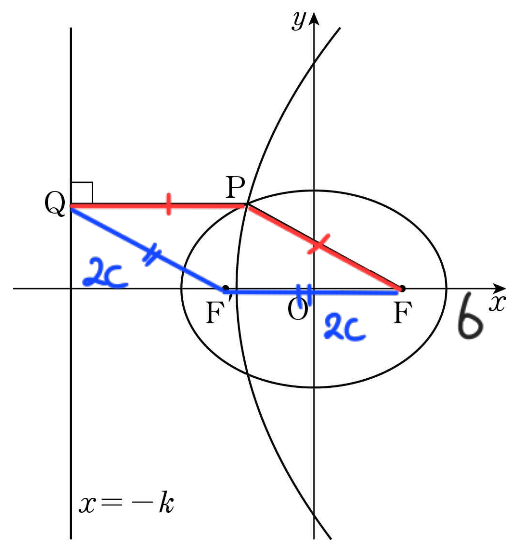


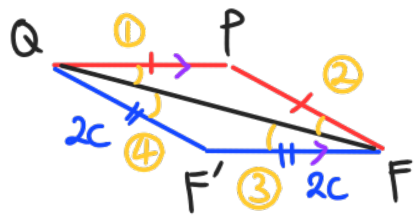
30. 그림과 같이 두 초점이 $F(c, 0)$, $F'(-c, 0)$ $(c>0)$이고 장축의 길이가 12인 타원이 있다. 점 F가 초점이고 직선 $x=-k$ $(k>0)$이 준선인 포물선이 타원과 제2사분면의 점 P에서 만난다. 점 P에서 직선 $x=-k$에 내린 수선의 발을 Q라 할 때, 두 점 P, Q가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\cos(\angle F'FP)=\frac{7}{8}$

(나) $\cancel{\overline{FP}}-\overline{F'Q}=\cancel{\overline{PQ}}-\overline{FF'}$

$c+k$의 값을 구하시오. [4점]



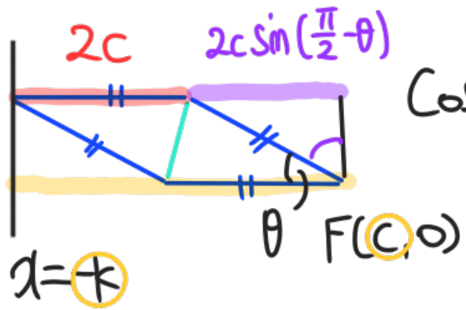


△PQF 이등변 → ① = ②

△QF′F 이등변 → ③ = ④

평행 엇각 → ① = ③

→ 마름모



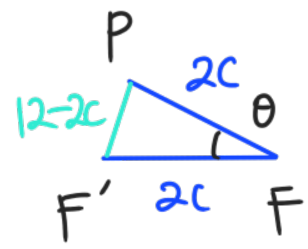
$\cos\theta=\frac{7}{8}$

$c+k=2c+2c\sin(\frac{\pi}{2}-\theta)$

$c+k=2c+2c\cos\theta$

$c+k=2c+\frac{7}{4}c$

$k=\frac{11}{4}c$



$\cos\theta=\frac{7}{8}$

$=\frac{4c^2+4c^2-(12-2c)^2}{2\times2c\times2c}$

$7c^2=4c^2+48c-12^2$

$c^2-16c+48=0$

$(c-12)(c-4)=0$

$c=4$ 또는 $c=12$

$c=4$ (장축 길이 12)

$c=4$, $k=11$

$c+k=15$

$\boxed{15}$