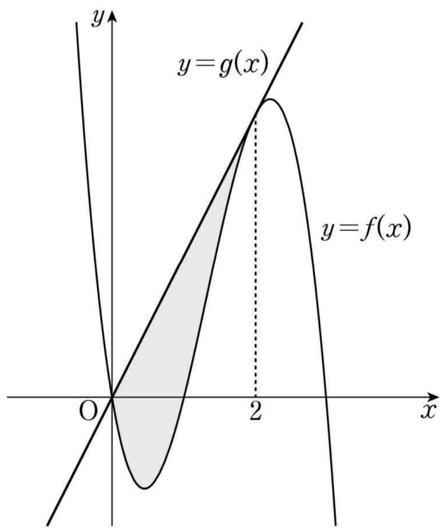
1. 최고차항의 계수가 -3인 삼차함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점 $(2,\ f(2))$에서의 접선 $y=g(x)$가 곡선 $y=f(x)$와 원점에서 만난다. 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=g(x)$로 둘러싸인 도형의 넓이는? 〔2021년 3월 09〕

① $\frac{7}{2}$　　② $\frac{15}{4}$　　③ 4　　④ $\frac{17}{4}$　　⑤ $\frac{9}{2}$



1. 정답 ③ 〔2021년 3월 09〕

1) 그림 있으면 그림 보면서, 함수 구하기 - 차함수

최고차항의 계수가 -3인 삼차함수 $f(x)$와 일차함수 $g(x)$가 있는데 그림처럼 두 함수가 $x=0$에서 만나고 $x=2$에서 접한다고 합니다. 일단 차함수를 설정할 수 있을 것 같죠?

$f(x)-g(x)=h(x)$라 하면 $h(x)$는 최고차항의 계수가 -3이고 x축과 $x=0$에서 만나고 $x=2$에서 접하는 삼차함수니까 $h(x)=-3x(x-2)^2$입니다.

2) $f(x)=a(x-\alpha)^2(x-\beta)$ 또는 $f(x)=a(x-\alpha)(x-\beta)^2$와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이

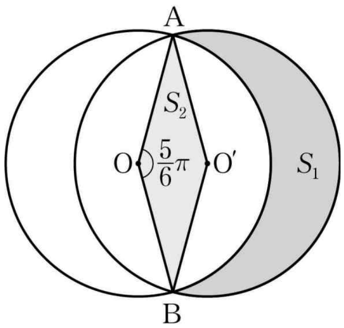
$\rightarrow \dfrac{|a|}{12}(\beta-\alpha)^4$

그리고 나서 $f(x)$와 $g(x)$로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하랍니다. 이건 사실상 $h(x)$와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이와 같잖아요? 그래서 $h(x)=-3x(x-2)^2$와 x축이 만나는 $x=0$과 $x=2$를 적분구간으로 해서 그냥 계산해도 됩니다. 그런데 조금만 더 편하게 갈 수 있어요.

위에 행동강령에도 있듯이 $f(x)=a(x-\alpha)(x-\beta)^2$와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는 $\dfrac{|a|}{12}(\beta-\alpha)^4$입니다.

지금 보면 $a=-3$, $\alpha=0$, $\beta=2$잖아요? 그대로 넣어보면 $\dfrac{1}{4}\times 2^4=4$이네요. 답은 ③번입니다.

2. 그림과 같이 두 점 O, O$'$을 각각 중심으로 하고 반지름의 길이가 3인 두 원 O, O'이 한 평면 위에 있다. 두 원 O, O'이 만나는 점을 각각 A, B라 할 때, $\angle \mathrm{AOB} = \dfrac{5}{6}\pi$이다.



원 O의 외부와 원 O'의 내부의 공통부분의 넓이를 S_1, 마름모 AOBO$'$의 넓이를 S_2라 할 때, $S_1 - S_2$의 값은? 〔2021년 3월 11〕

① $\dfrac{5}{4}\pi$ ② $\dfrac{4}{3}\pi$ ③ $\dfrac{17}{12}\pi$ ④ $\dfrac{3}{2}\pi$ ⑤ $\dfrac{19}{12}\pi$

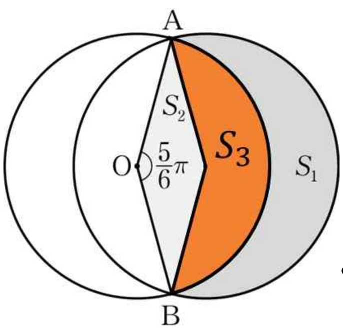
2. 정답 ④ 〔2021년 3월 11〕

1) 그림 있으면 그림 보면서

그림과 같이 반지름의 길이가 3인 두 원 O, O'가 있어요. 그림에 다 반지름 말고는 다 표시되어 있네요.

이때 원 O의 외부와 원 O'의 내부의 공통부분의 넓이를 S_1, 마름모 AOBO$'$의 넓이를 S_2라 할 때, $S_1 - S_2$의 값을 구하랍니다. 음...

일단 S_1은 그냥은 못 구할 것 같고 빼서 구해야 할 것 같아요. 지금 그림에



이렇게 S_3를 추가하면 $S_1 + S_3$은 원 O'의 부채꼴이죠. 중심각의 크기는 $\frac{7}{6}\pi$이구요.

S_3는.... 이것도 그냥은 못 구할 것 같고 빼서 구해야 할 것 같습니다. S_2와 S_3를 합치면 $S_2 + S_3$은 원 O의 부채꼴입니다. 중심각의 크기는 $\frac{5}{6}\pi$이구요.

어? 그런데 둘 다 반지름의 크기가 3이잖아요? 거기에 우리가 구해야 하는 건 $S_1 - S_2$인데 이건 사실상 $S_1 + S_3 - (S_2 + S_3)$아닌가요? 그럼 두 부채꼴의 넓이를 빼버리면 되겠네요.

$S_1 + S_3$은 $\frac{7}{12} \times \pi \times 3^2$이고 $S_2 + S_3 = \frac{5}{12} \times \pi \times 3^2$입니다. 이 둘을 빼면 결국 구하는 건 $S_1 - S_2 = \frac{3}{2}\pi$이네요.

답은 ④번입니다.

3. 두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\lim_{x \to 1} \frac{f(x) - g(x)}{x-1} = 5$
(나) $\lim_{x \to 1} \frac{f(x) + g(x) - 2f(1)}{x-1} = 7$

두 실수 a, b에 대하여 $\lim_{x \to 1} \frac{f(x) - a}{x-1} = b \times g(1)$일 때, ab의 값은? 〔2021년 3월 12〕

① 4　② 5　③ 6　④ 7　⑤ 8

3. 정답 ③ 〔2021년 3월 12〕

1) 조건해석, 함수극한은 논리다

두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$가 있는데 (가)조건에서 $\lim_{x \to 1}\frac{f(x)-g(x)}{x-1}=5$랍니다. 일단 분모가 0으로 가는데 극한값이 존재하니까 분자도 0이 되어야겠죠? 따라서 $f(1)=g(1)$입니다.

그리고 나서는 $f(x)$, $g(x)$가 다항함수니까 $\lim_{x \to 1}\frac{f(x)-g(x)}{x-1}=5$를

$\lim_{x \to 1}\frac{f(x)-f(1)-(g(x)-g(1))}{x-1}=\lim_{x \to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}-\lim_{x \to 1}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}=f'(1)-g'(1)=5$로 변형할 수 있죠?

(나)조건에서 $\lim_{x \to 1}\frac{f(x)+g(x)-2f(1)}{x-1}=7$랍니다. 이것도 마찬가지로 해보면 되겠네요. 일단 분모가 0으로 가는데 극한값이 존재하니까 분자도 0이 되어야 합니다. 따라서 $f(1)+g(1)=2f(1)$입니다. 이건 당연한데요? 아까 $f(1)=g(1)$라고 했었잖아요.

$f(1)+g(1)=2f(1)$을 이용하면 $\lim_{x \to 1}\frac{f(x)+g(x)-2f(1)}{x-1}=7$을 $\lim_{x \to 1}\frac{f(x)+g(x)-f(1)-g(1)}{x-1}=7$로 변형할 수 있어요. $f(x)$, $g(x)$는 다항함수니까 $\lim_{x \to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}+\lim_{x \to 1}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}=f'(1)+g'(1)=7$가 됩니다. 아까 $f'(1)-g'(1)=5$랑 연립하면 $f'(1)=6$, $g'(1)=1$가 되네요.

마지막으로 $\lim_{x \to 1}\frac{f(x)-a}{x-1}=b\times g(1)$일 때 ab의 값을 구하랍니다. 이것도 분모가 0으로 가는데 극한값이 존재하네요. 따라서 분자도 0으로 가야 하니까 $f(1)=a$입니다. 따라서

$\lim_{x \to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=6=b\times g(1)$이 되네요. 방금 $f(1)=a$이라고 했었는데 $f(1)=g(1)$이죠? 따라서 $ab=6$입니다. 답은 ③번이네요.

4. 함수

$$f(x)=\begin{cases} 2^{x} & (x<3) \\ \left(\frac{1}{4}\right)^{x+a}-\left(\frac{1}{4}\right)^{3+a}+8 & (x \geq 3) \end{cases}$$

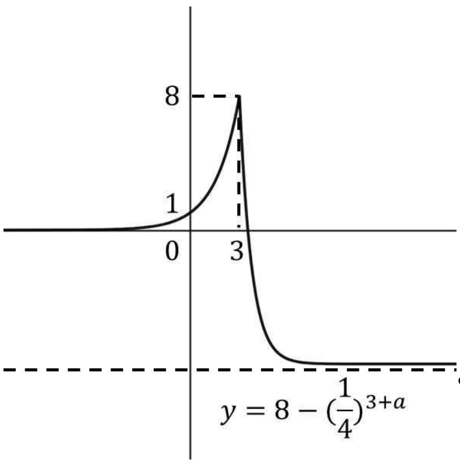
에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 중에서 y좌표가 정수인 점의 개수가 23일 때, 정수 a의 값은? 〔2021년 3월 13〕

① -7 ② -6 ③ -5 ④ -4 ⑤ -3

4. 정답 ③ 〔2021년 3월 13〕

1) 함수 보이면 관찰 → 그래프 그리기, 정수 보이면 숫자 넣을 준비

함수 $f(x)=\begin{cases} 2^{x} & (x<3) \\ \left(\frac{1}{4}\right)^{x+a}-\left(\frac{1}{4}\right)^{3+a}+8 & (x\geq 3) \end{cases}$가 있는데 이 위의 점 중에서 y좌표가 정수인 점의 개수가 23이랍니다. 이건 일단 그래프를 그려봐야 할 것 같아요. 대충만 그려봅시다.



이렇게 되겠어요. $x\geq 3$에서 점근선이 x축 위로 올라오도록 그릴 수는 없어요. y좌표가 정수인 점의 개수가 절대로 23개가 나올 수가 없습니다. 1부터 7까지 $x<3$와 $x\geq 3$에서 각각 하나씩 있고 8은 하나만 있죠. 총 15개인데 점근선이 더 위로 올라가면 이거보다도 더 작아질 수도 있어요.

그럼 결국 x축 아래로, 그것도 한참 아래로 내려가야 한다는 말이에요. 일단 지금 현재는 1부터 7까지 $x<3$와 $x\geq 3$에서 각각 하나씩 있고 8은 하나만 있는데 0까지 추가되었으니까 지금은 16개에요. 23개가 나오려면? 지금 그래프를 보면 y값이 음수일 때는 한 점에서만 만나잖아요. 그러니까 -7까지는 만나야 한다는 이야기죠.

그런데 -8은 만나면 안 돼요. 따라서 점근선이 -7과 -8 사이에 있어야 합니다. 그런데 -7에는 등호가 붙으면 안 돼요. -7이 점근선이라는 건 $y=-7$과 $y=f(x)$가 만나지 않는다는 말이잖아요? -8에는 동호가 들어가도 됩니다. 따라서 $-8\leq 8-\left(\frac{1}{4}\right)^{a+3}<-7$이고 정리하면 $15<\left(\frac{1}{4}\right)^{a+3}\leq 16$입니다.

$\left(\frac{1}{4}\right)^{a+3}=4^{-a-3}$이잖아요? 따라서 $15<4^{-a-3}\leq 16$이네요.

2) 정수 보이면 숫자 넣기

a가 정수잖아요? 4^{-a-3}에서 지수에 있는 $-a-3$가 음수가 된다면 4^{-a-3}는 분수가 돼요. 말이 안 되죠? 따라서 양수여야 합니다. $-a-3$가 양수라면 4^{-a-3}는 무조건 자연수가 되죠. a가 정수니까요. 4^{1}, 4^{2}, $\cdots$ 뭐

이런 식으로 되잖아요. 자연수인데 $15 < 4^{-a-3} \leq 16$에 있는 건? 16만 가능하죠. $16 = 4^2$이니까 $-a-3=2$이고 $a=-5$입니다. 답은 ③번이네요.

5. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=f(x)+|f'(x)|$$

라 할 때, 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(0)=g(0)=0$ (나) 방정식 $f(x)=0$은 양의 실근을 갖는다. (다) 방정식 $|f(x)|=4$의 서로 다른 실근의 개수는 3이다.

$g(3)$의 값은? 〔2021년 3월 14〕

① 9 ② 10 ③ 11 ④ 12 ⑤ 13

5. 정답 ① 〔2021년 3월 14〕

1) 조건해석, 함수 구하기 - 인수정리

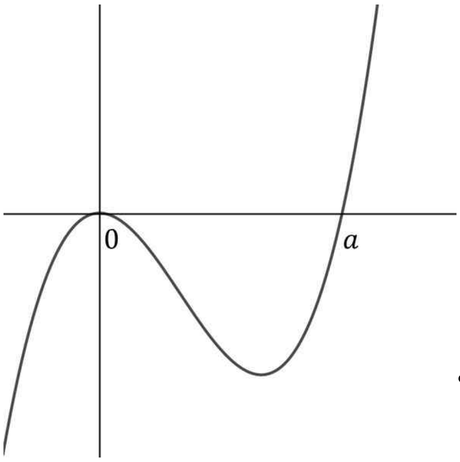
$f(x)$가 최고차항의 계수가 1인 삼차함수인데 $g(x)=f(x)+|f'(x)|$랍니다. 음... 하나는 절댓값이 없고 하나는 절댓값이 씌워져 있네요.. 뭐 좀 더 봅시다.

(가)조건에서 $f(0)=g(0)=0$라고 합니다. 위의 식에 다 넣어보면 $f'(0)=0$이네요. 일단 $f(x)$는 $x=0$에서 x축에 접해야 합니다. $f(0)=f'(0)=0$이니까요.

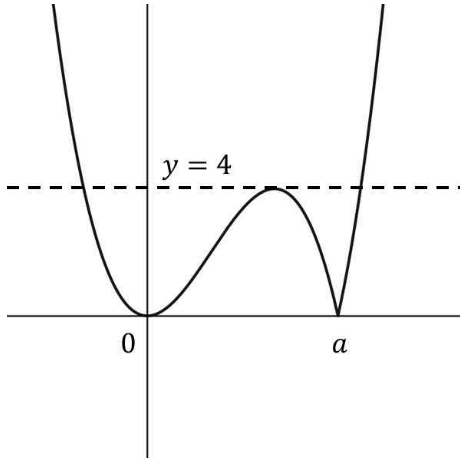
(나)조건에서 $f(x)=0$은 양의 실근을 갖는다고 하네요. 그러면 인수정리에 의해 $f(x)=x^2(x-a)$라고 할 수 있겠죠? $a>0$이구요.

2) 함수 보이면 관찰 → 그래프 그리기, 절댓값 함수

(다)조건에서 $|f(x)|=4$가 서로 다른 3개의 실근을 갖는답니다. $y=|f(x)|$와 $y=4$가 3개의 점에서 만난다는 거겠죠? 그래프 그려봅시다. 일단 $f(x)$는 x축과 $x=0$에서 접하고 $x=a$에서 그냥 만나니까



이렇게 되는데 접어 올리면

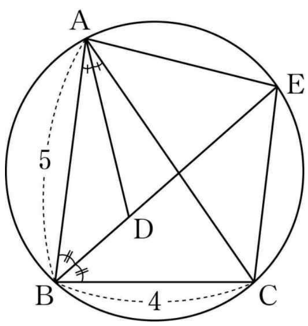


이렇게 되네요. $y=4$와 3개의 점에서 만나는 방법은 접어 올렸을 때 극댓값이 4가 되어야 합니다. 그 말은 원래 함수에서 극솟값은 -4가 된다는 말이죠.

가봅시다. $f(x)=x^2(x-a)$를 미분하면 $f'(x)=3x^2-2ax=x(3x-2a)$가 됩니다. 극솟점의 x좌표는 $x=\frac{2}{3}a$이네요. 따라서 $f\left(\frac{2}{3}a\right)=-\frac{4}{27}a^3=-4$이고 $a=3$입니다. $f(x)=x^2(x-3)$이고 $f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$가 되네요.

이제 마지막으로 $g(3)$의 값을 구해봅시다. $g(3)=f(3)+|f'(3)|$이고 $f(3)=0$, $f'(3)=9$이니까 $g(3)=9$입니다. 답은 ①번입니다.

6. 그림과 같이 $\overline{AB}=5$, $\overline{BC}=4$, $\cos(\angle ABC)=\frac{1}{8}$인 삼각형 ABC가 있다. $\angle ABC$의 이등분선과 $\angle CAB$의 이등분선이 만나는 점을 D, 선분 BD의 연장선과 삼각형 ABC의 외접원이 만나는 점을 E라 할 때, 〈보기〉에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? 〔2021년 3월 15〕



<보 기>

ㄱ. $\overline{AC}=6$

ㄴ. $\overline{EA}=\overline{EC}$

ㄷ. $\overline{ED}=\frac{31}{8}$

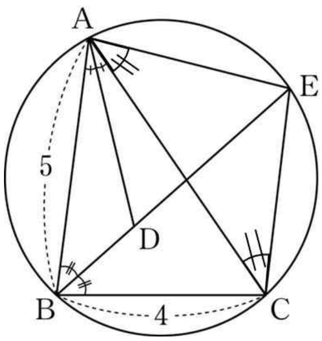
① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ

④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

6. 정답 ② 〔2021년 3월 15〕

1) 그림 있으면 그림 보면서, 외부 확인

거의 다 표시되어 있는 것 같아요. 여기에 같은 호에 대한 원주각도 표시해줍시다.



이렇게 표시해줄 수 있죠? 삼각형 ACE가 이등변삼각형이라는 건 알 수 있겠네요.

또한 지금 보면 원에 사각형이 내접하고 있는 형태잖아요? $\angle \mathrm{ABE} = a$라 하면 마주보고 있는 각의 합은 180°이니까 $\angle \mathrm{AEC} = \pi - 2a$이죠? 기억은 해두자구요.

2) 내부 : 삼각형은 정해져 있다 - 두 변의 길이와 한 각

지금 삼각형 ABC에서 두 변의 길이와 한 각이 나와 있죠? 시작할 때부터

$\overline{\mathrm{AB}} = 5$, $\overline{\mathrm{BC}} = 4$, $\cos(\angle \mathrm{ABC}) = \dfrac{1}{8}$이렇게 다 줬잖아요. 그럼 자연스럽게 나머지를 구할 수 있겠어요.

코사인법칙을 활용해서 나머지 한 변의 길이를 구해봅시다. $\cos(\angle \mathrm{ABC}) = \dfrac{5^2 + 4^2 - \overline{\mathrm{AC}}^2}{2 \times 5 \times 4} = \dfrac{1}{8}$이니까

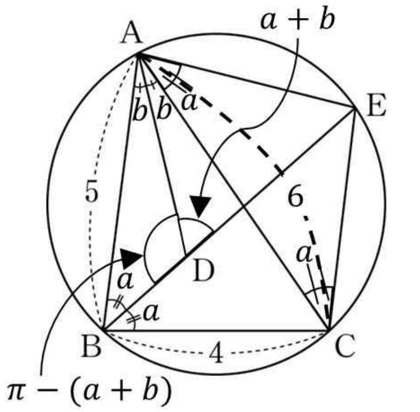
$\overline{\mathrm{AC}}^2 = 36$이고 $\overline{\mathrm{AC}} = 6$이네요. ㄱ은 맞네요?

ㄴ에서 $\overline{\mathrm{EA}} = \overline{\mathrm{EC}}$이냐고 물어보네요. 이거 방금 삼각형 ACE가 이등변삼각형이라고 하지 않았었나요? 그럼 당연히 $\overline{\mathrm{EA}} = \overline{\mathrm{EC}}$이죠. ㄴ도 맞습니다.

3) ㄱㄴㄷ 유기성, 각 변환, 내부 : 삼각형은 정해져 있다 - 두 변의 길이와 한 각

ㄷ에서 $\overline{\mathrm{ED}} = \dfrac{31}{8}$이냐고 물어보네요. 갑자기 $\overline{\mathrm{ED}}$는 왜 물어보는 걸까요? 음...

일단 나머지 각부터 표시해봅시다. $\angle \mathrm{BAD} = b$라 할게요. 그러면



이렇게 되죠? 삼각형 ADE도 이등변삼각형이네요? 그렇다는 건 $\overline{EA}=\overline{EC}=\overline{ED}$라는 거죠?

거기에 아까 $\cos(\angle ABC)=\dfrac{1}{8}$인데 $\angle ABC=2a$이고 $\angle AEC=\pi-2a$라고 했었잖아요? $\cos(2a)=\dfrac{1}{8}$이고 $\cos(\angle AEC)=\cos(\pi-2a)$입니다.

cos 안에 π가 있죠? 그러면 축을 설정해봅시다. 원에서 $x<0$ 부분에 있는 x축이에요. 이 축에서부터 예각만큼 시계방향으로 움직여봅시다. cos은 x값이니까 음수가 나오죠? 따라서 $\cos(\angle AEC)=\cos(\pi-2a)=-\dfrac{1}{8}$입니다.

여기서도 코사인법칙을 사용하면 $\cos(\angle AEC)=\dfrac{2\overline{EA}^2-36}{2\overline{EA}^2}=-\dfrac{1}{8}$가 됩니다. 정리하면 $\overline{EA}^2=16$이고 $\overline{EA}=\overline{EC}=\overline{ED}=4$가 되죠. ㄷ은 아니네요. 따라서 맞는 건 ㄱ, ㄴ이고 답은 ②번입니다.

7. 실수 m에 대하여 직선 $y=mx$와 함수

$$f(x)=2x+3+|x-1|$$

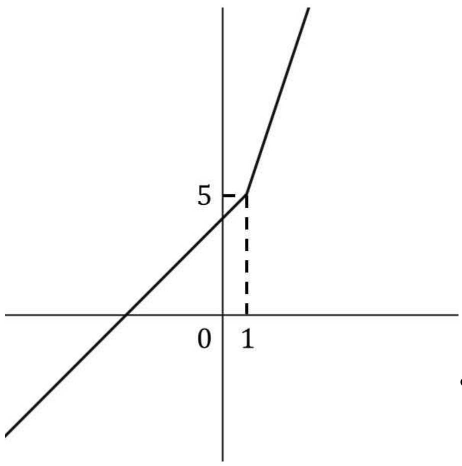
의 그래프의 교점의 개수를 $g(m)$이라 하자. 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $h(x)$에 대하여 함수 $g(x)h(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, $h(5)$의 값을 구하시오.〔2021년 3월 20〕

7. 정답 8 〔2021년 3월 20〕

1) 절댓값은 범위 나누고 풀기, 함수 보이면 관찰 → 그래프 그리기

$f(x)=2x+3+|x-1|$가 있는데 $y=mx$와의 교점의 개수를 $g(m)$이라고 합니다. 일단 범위 나누고 그래프를 그려봐야 알겠죠?

일단 $x=1$을 기준으로 풀어봅시다. $f(x)=\begin{cases} x+4 & (x<1) \\ 3x+2 & (x \geq 1) \end{cases}$가 되겠네요. 그래프를 그려볼까요?



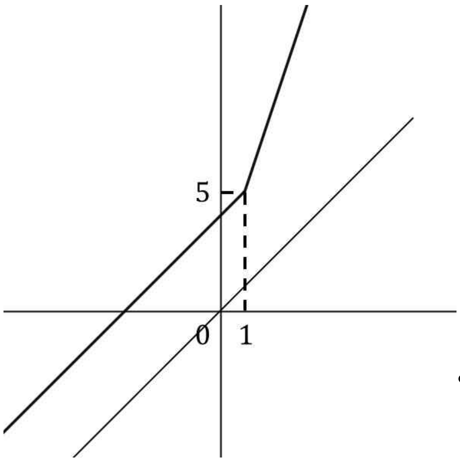
이렇게 되겠어요.

이 그래프가 원점을 지나고 기울기가 m인 직선 $y=mx$와 만나는 점의 개수가 $g(m)$이랍니다. 그리고 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $h(x)$가 있는데 $g(x)h(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이랍니다. 곱한 함수가 연속이 된다... 이건 뭔가 $g(x)$가 불연속인 곳이 있다는 말 아닐까요?

2) 연속은 좌극한 우극한 함숫값 확인

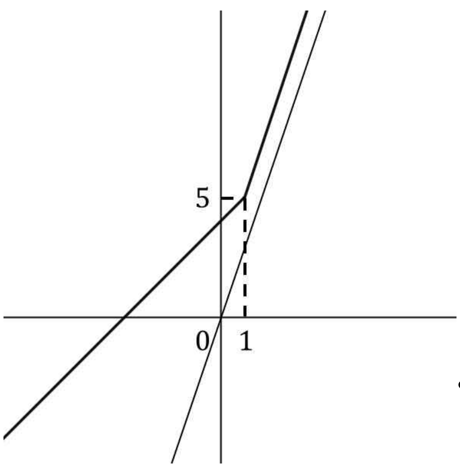
일단 그래프를 잘 관찰해봅시다. 먼저 $g(m)$은 $y=f(x)$과 $y=mx$가 만나는 점의 개수잖아요? 기울기를 천천히 증가시켜 보면서 불연속인 곳이 있는지 확인해보면 되겠네요.

기울기가 어어어어어엄청 작을 때는 1개의 점에서 만나요. 그러다가...



이렇게 기울기가 1이 되면 만나는 점이 없게 되죠. 불연속이죠? 따라서 $g(m)$은 $m=1$일 때 불연속입니다.

당분간 기울기를 증가시키더라도 계속 만나지 않습니다. 언제까지일까요?



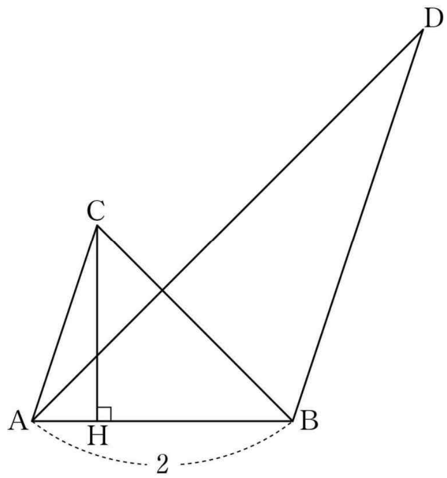
이렇게 기울기가 3이 될 때까지이죠. 기울기가 3보다 약간 커지면 $x \geq 1$에서 $f(x)$와 언젠가는 만날 테니까요. 기울기가 더 큰 $y=mx$가 더 빠른 속도로 증가하잖아요. 따라서 $g(m)$은 $m=3$일 때도 불연속입니다.

$h(x)$는 다항함수이죠? $x=1$, $x=3$에서 불연속인 $g(x)$와 곱해서 연속이 될 수 있는 방법은 함숫값이 0이 되는 방법뿐이죠. 따라서 $h(1)=h(3)=0$입니다.

3) 함수 구하기 - 인수정리

$h(1)=h(3)=0$이니까 인수정리에 의하여 $h(x)=(x-1)(x-3)$입니다. $h(5)=8$이네요.

8. 그림과 같이 $\overline{\mathrm{AB}}=2$, $\overline{\mathrm{AC}}//\overline{\mathrm{BD}}$, $\overline{\mathrm{AC}}:\overline{\mathrm{BD}}=1:2$인 두 삼각형 ABC, ABD가 있다. 점 C에서 선분 AB에 내린 수선의 발 H는 선분 AB를 $1:3$으로 내분한다.



두 삼각형 ABC, ABD의 외접원의 반지름의 길이를 각각 r, R라 할 때, $4\left(R^2-r^2\right)\times\sin^2(\angle\mathrm{CAB})=51$이다. $\overline{\mathrm{AC}}^2$의 값을 구하시오. (단, $\angle\mathrm{CAB}<\frac{\pi}{2}$) 〔2021년 3월 21〕

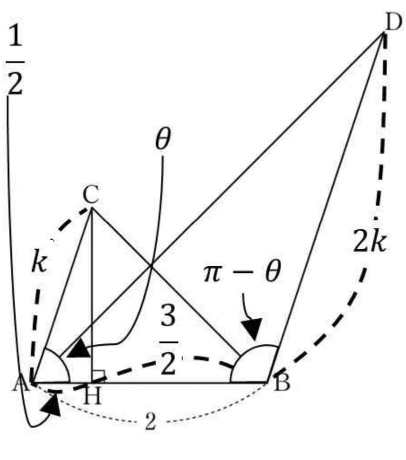
8. 정답 15 〔2021년 3월 21〕

1) 그림 있으면 그림 보면서,

그림이 있네요. 그리고 $\overline{AB}=2$, $\overline{AC}//\overline{BD}$, $\overline{AC}:\overline{BD}=1:2$이라고 합니다. 거기에 점 C에서 선분 AB에 내린 수선의 발 H는 선분 AB를 $1:3$으로 내분한다고 합니다. 이거 다 표시좀 해볼까요?

일단 H가 선분 AB를 $1:3$으로 내분한다고 하니까 $\overline{AH}=\frac{1}{2}$, $\overline{HB}=\frac{3}{2}$입니다. 그리고 $\overline{AC}:\overline{BD}=1:2$이니까 $\overline{AC}=k$라 하면 $\overline{BD}=2k$입니다.

거기에 AC와 BD가 평행하잖아요? 그러면 $\angle CAB$와 $\angle ABD$을 합치면 π가 되겠네요. $\angle CAB=\theta$라 하면 $\angle ABD=\pi-\theta$입니다.



이렇게 되겠네요.

2) 외부

그리고 두 삼각형 ABC, ABD의 외접원의 반지름의 길이를 각각 r, R라 할 때, $4(R^2-r^2)\times\sin^2(\angle CAB)=51$이라고 합니다. 외접원의 반지름의 길이라고 하니까 사인법칙이 생각나죠?

그런데 우리가 알고 있는 각은 $\angle CAB$와 $\angle ABD$이에요. 이걸로 표현해야겠죠? 사인법칙에 의해 $\frac{\overline{BC}}{\sin\theta}=2r$, $\frac{\overline{AD}}{\sin(\pi-\theta)}=2R$입니다. 각 변환을 할 수 있겠네요?

$\sin(\pi-\theta)$에서 π가 있으니까 축은 $x<0$ 부분의 x축을 설정하구요, 축으로부터 예각인 θ만큼 시계방향으로 움직이면 사인값은 y값인데 양수가 나오죠. 따라서 $\sin(\pi-\theta)=\sin\theta$입니다.

$R^2=\frac{\overline{AD}^2}{4\sin^2\theta}$, $r^2=\frac{\overline{BC}^2}{4\sin^2\theta}$가 되겠네요. $4(R^2-r^2)\times\sin^2(\angle CAB)=51$에 다 넣어보면 $\overline{AD}^2-\overline{BC}^2=51$가 됩니다.

사인값이 각 변환되는 것을 보니 코사인값도 각 변환이 될 것 같은데요? 가봅시다. $\cos(\pi-\theta)$에서 π가 있으니까 축은 $x<0$ 부분의 x축을 설정하구요, 축으로부터 예각인 θ만큼 시계방향으로 움직이면 코사인값은 x값인데 음수가 나오네요. 따라서 $\cos(\pi-\theta)=-\cos\theta$입니다.

코사인값이 나왔으니까 코사인법칙까지 사용하면 되겠네요.

$\cos\theta=\dfrac{k^2+4-\overline{\mathrm{BC}}^2}{4k}$, $\cos(\pi-\theta)=\dfrac{4k^2+4-\overline{\mathrm{AD}}^2}{8k}=-\cos\theta$입니다. 그런데 지금 그림을 보면

$\cos\theta=\dfrac{\overline{\mathrm{AH}}}{\overline{\mathrm{AC}}}=\dfrac{1}{2k}$이잖아요? 따라서 $\overline{\mathrm{BC}}^2=k^2+2$, $\overline{\mathrm{AD}}^2=4k^2+8$입니다. $\overline{\mathrm{AD}}^2-\overline{\mathrm{BC}}^2=51$에 넣으면

$k^2=15$가 나오네요. $\overline{\mathrm{AC}}=k$라고 했잖아요? 따라서 $k^2=\overline{\mathrm{AC}}^2=15$입니다.

9. 양수 a와 일차함수 $f(x)$에 대하여 실수 전체의 집합에서 정의된 함수

$$g(x)=\int_0^x (t^2-4)\{|f(t)|-a\}dt$$

가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $g(x)$는 극값을 갖지 않는다.
(나) $g(2)=5$

$g(0)-g(-4)$의 값을 구하시오. 〔2021년 3월 22〕

9. 정답 16 〔2021년 3월 22〕

1) 정적분의 위끝 또는 아래끝에 변수가 있는 경우,

a가 양수이고 $f(x)$가 일차함수인데 $g(x)=\int_0^x (t^2-4)\{|f(t)|-a\}dt$라고 합니다. 일단 위끝과 아래끝이 같아지는 $x=0$을 넣으면 $g(0)=0$이네요.

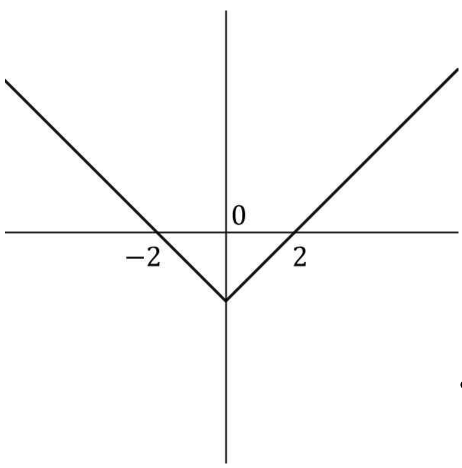
그리고 미분하면 $g'(x)=(x+2)(x-2)(|f(x)|-a)$입니다.

2) 조건해석, 함수 보이면 관찰 → 그래프 그리기

(가)조건에서 $g(x)$가 극값을 갖지 않는다고 합니다. 극값을 갖지 않는다는 건 도함수의 부호의 변화가 없다는 거죠? 일시적으로 접선의 기울기가 0이 될 수는 있지만(도함수가 x축과 만날 수는 있지만) 도함수가 x축을 가로지르는 건 안 된다는 말이에요. 도함수가 x축에 있지 않다면 계속 양수이거나 계속 음수이면 되구요, x축과 만났다면 반드시 접해야 합니다. 그래야 방향을 바꾸어 부호의 변화가 일어나지 않게 되죠. 이건 다시 말해서 $g'(x)$의 인수는 없거나 짝수 개여야 한다는 말이죠.

그런데 방금 미분했었잖아요? $g'(x)=(x+2)(x-2)(|f(x)|-a)$였죠. 이미 $x=-2$, $x=2$에서 값이 0이 되네요? 만약 인수가 하나만 있으면 그대로 x축을 가로지르게 될 거예요. 이러면 부호의 변화가 생기죠. $y=x-2$, $y=x+2$의 그래프를 생각해보세요. 인수가 하나만 있다면 그 근방에서는 일차함수처럼 지나가잖아요.

따라서 $|f(2)|=|f(-2)|=a$여야 합니다. $f(x)$는 일차함수이죠? 거기에 절댓값을 씌운 함수가 $|f(x)|$이에요. V자 모양의 함수이죠. 이 함수가 $x=-2$, $x=2$에서의 함숫값이 같다는 건?



이런 그래프가 나와야 한다는 거죠. 일단 $|f(x)|$는 $x=0$을 중심으로 꺾여야 합니다. $f(0)=0$입니다. 그런데 기울기는 아직 모르죠. k라고 둡시다. $|f(x)|=|kx|$가 되는 거죠.

그리고 $|f(2)|=|f(-2)|=a$여야 하잖아요? 따라서 $|2k|=|-2k|=a$입니다. $k=\frac{a}{2}$이거나 $k=-\frac{a}{2}$입니다.

부호가 큰 의미는 없어요. 어차피 절댓값을 씌우면 $|f(x)|=\left|\frac{a}{2}x\right|-a$가 되는 건 같으니까요. $|x|$나 $|-x|$나 결국 같은 함수잖아요?

$g'(x)=(x+2)(x-2)\left(\left|\frac{a}{2}x\right|-a\right)$입니다. $x=0$을 기준으로 절댓값을 풀면

$g'(x)=\begin{cases}-\frac{a}{2}(x+2)^2(x-2) & (x<0)\\ \frac{a}{2}(x+2)(x-2)^2 & (x\geq 0)\end{cases}$ 가 되겠네요.

(나)조건에서 $g(2)=5$라고 합니다. 그러고 보니 아까 $g(0)=0$이라고 했었죠? 그냥 $\int_0^2 g'(x)dx=5$로 구하면 되겠어요. 따라서 $\int_0^2 g'(x)dx=\int_0^2 \frac{a}{2}(x+2)(x-2)^2dx=\frac{a}{2}\left[\frac{x^4}{4}-\frac{2x^3}{3}-2x^2+8x\right]_0^2=\frac{10}{3}a=5$이고 $a=\frac{3}{2}$입니다. $g'(x)=\begin{cases}-\frac{3}{4}(x+2)^2(x-2) & (x<0)\\ \frac{3}{4}(x+2)(x-2)^2 & (x\geq 0)\end{cases}$ 이네요.

마지막으로 $g(0)-g(-4)$를 구하랍니다. 이거도 마찬가지로 구해봅시다. $\int_{-4}^0 g'(x)dx$로 구하면 되겠죠?

$\int_{-4}^0 g'(x)dx=\int_{-4}^0 -\frac{3}{4}(x+2)^2(x-2)dx=-\frac{3}{4}\left[\frac{x^4}{4}+\frac{2x^3}{3}-2x^2-8x\right]_{-4}^0=16$이네요.