공통

1. $0 < x < 2\pi$일 때, 방정식 $2\cos^2 x - \sin(\pi + x) - 2 = 0$의 모든 해의 합은? 〔2021년 4월 11〕

① π ② $\frac{3}{2}\pi$ ③ 2π ④ $\frac{5}{2}\pi$ ⑤ 3π

1. 정답 ③ 〔2021년 4월 11〕

1) 각 변환

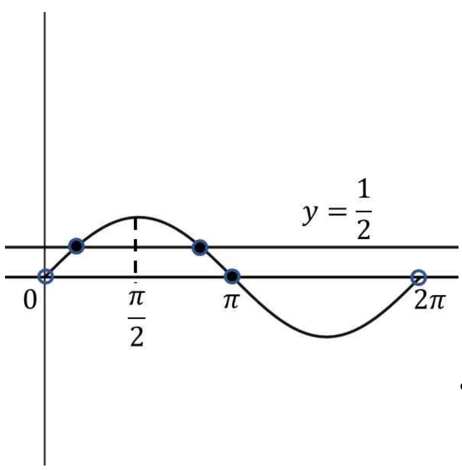
$0 < x < 2\pi$일 때 $2\cos^2 x - \sin(\pi + x) - 2 = 0$의 모든 해의 합을 구하라네요. 일단 사인 안에 $\pi + x$가 있으니까 각 변환부터 해줘야겠죠?

사인 안에 π가 있으니까 $x < 0$인 x축을 축으로 설정하구요, 사인을 그대로 사인으로 유지해줍시다. 그리고 $\pi + x$이니까 예각만큼 반시계방향으로 움직이면 사인값은 y값이니 음수가 되네요. 따라서 $\sin(\pi + x) = -\sin x$입니다.

$2\cos^2 x + \sin x - 2 = 0$인데.... 아직도 변수가 하나로 정리가 안 되네요. 사인으로 통일하거나 코사인으로 통일해야 할 것 같은데... 그러고 보니 $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$이잖아요? $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$이고 정리하면 $-2\sin^2 x + \sin x = 0$이고 $2\sin^2 x - \sin x = \sin x(2\sin x - 1) = 0$입니다. $\sin x = 0$ 또는 $\sin x = \frac{1}{2}$이네요.

이제 $0 < x < 2\pi$에서 $\sin x = 0$ 또는 $\sin x = \frac{1}{2}$가 되는 x가 몇 개인지 확인해봅시다. 그래프를 그려야겠네요.

2) 함수 보이면 관찰 → 그래프 그리기

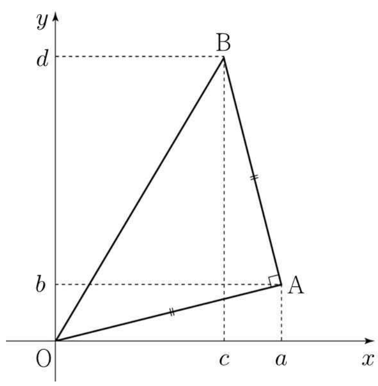


이렇게 3개의 점에서 만나네요. 일단 한 점은 $x = \pi$이구요, 나머지 두 점은 $x = \frac{\pi}{2}$라는 축에 대하여 대칭이네요. $\sin x$가 $x = \frac{\pi}{2}$축에 대하여 대칭이니까 x축에 평행한 직선과 $\sin x$가 만나는 두 점은 $x = \frac{\pi}{2}$축에 대하여 대칭이 되죠. 중점의 x좌표가 $\frac{\pi}{2}$이니까 그 둘을 더하면 π가 되겠죠? 따라서 모든 해의 합은 2π입니다. 답은 ③번이네요.

2. 4 이상의 자연수 n에 대하여 다음 조건을 만족시키는 n 이하의 네 자연수 a, b, c, d가 있다.

> ◦ $a > b$
> ◦ 좌표평면 위의 두 점 $\mathrm{A}(a,\ b)$, $\mathrm{B}(c,\ d)$와 원점 O에 대하여
> 삼각형 OAB는 $\angle \mathrm{A} = \frac{\pi}{2}$인 직각이등변삼각형이다.

다음은 a, b, c, d의 모든 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d)$의 개수를 T_n이라 할 때, $\sum_{n=4}^{20} T_n$의 값을 구하는 과정이다.



점 $\mathrm{A}(a,\ b)$에 대하여
점 $\mathrm{B}(c,\ d)$가 $\overline{\mathrm{OA}} \perp \overline{\mathrm{AB}}$, $\overline{\mathrm{OA}} = \overline{\mathrm{AB}}$를 만족시키려면
$c = a - b$, $d = a + b$이어야 한다.

이때, $a > b$이고 d가 n 이하의 자연수이므로 $b < \frac{n}{2}$이다.

$\frac{n}{2}$ 미만의 자연수 k에 대하여
$b = k$일 때, $a + b \le n$을 만족시키는 자연수 a의 개수는
$n - 2k$이다.
2 이상의 자연수 m에 대하여
(i) $n = 2m$인 경우
b가 될 수 있는 자연수는 1부터 $\boxed{\text{(가)}}$까지이므로
$$T_{2m} = \sum_{k=1}^{\boxed{\text{(가)}}} (2m - 2k) = \boxed{\text{(나)}}$$
(ii) $n = 2m + 1$인 경우
$$T_{2m+1} = \boxed{\text{(다)}}$$
(i), (ii)에 의해 $\sum_{n=4}^{20} T_n = 614$

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 식을 각각 $f(m)$, $g(m)$, $h(m)$이라 할 때, $f(5) + g(6) + h(7)$의 값은? 〔2021년 4월 14〕

① 71 ② 74 ③ 77 ④ 80 ⑤ 83

2. 정답 ⑤ 〔2021년 4월 14〕

1) 그림 있으면 그림 보면서

n이 4 이상의 자연수인데 $a > b$이고 삼각형 OAB는 $\angle \mathrm{A} = \frac{\pi}{2}$인 직각이등변삼각형이랍니다. 그림에 모두 표시되어 있네요.

쭈루룩 읽어보면 $c = a - b$, $d = a + b$이고, $a > b$, $b < \frac{n}{2}$인데 $b = k$일 때 $a + b \le n$를 만족시키는 자연수 a의 개수는 $n - 2k$라고 합니다. 왜 $c = a - b$, $d = a + b$가 나왔는지 등을 알면 더욱 좋지만 설명에서 별다른 언급이 없었다면 문제를 푸는 데 중요하지 않다는 뜻이에요. 그냥 그런가보다 하고 넘어가시면 됩니다.

지금 우리는 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d)$의 개수를 구하는데 $c = a - b$, $d = a + b$라고 줬잖아요? c, d는 a, b가 정해지면 자동적으로 정해집니다. 따라서 사실상 $(a,\ b)$의 개수를 구하는 것이 되네요.

$n = 2m$이라면 $b < \frac{n}{2} = m$이어야 하죠. 따라서 b는 1부터 $m-1$까지 가능하죠. (가)$= f(m) = m - 1$입니다.

$T_{2m} = \sum_{k=1}^{m-1} (2m - 2k) = \boxed{\text{(나)}}$인데 시그마를 분리하면

$\sum_{k=1}^{m-1} 2m - \sum_{k=1}^{m-1} 2k = 2m(m-1) - m(m-1) = m(m-1)$가 됩니다. (나)$= g(m) = m(m-1)$이네요.

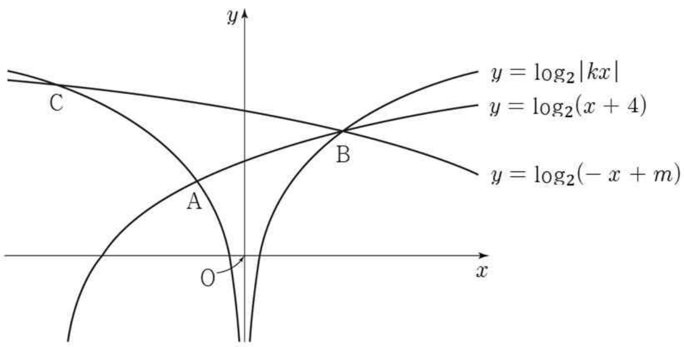
$n = 2m + 1$이라면... 하고 아무것도 없네요. 위와 같은 방법으로 풀라는 거겠죠? 지금 보면 $b = k$라고 고정시킬 때 a의 개수는 $n - 2k$가 나왔죠? 그리고 시그마로 k를 1부터 가능한 끝부분까지 다 더했구요. 이게 순서쌍 $(a,\ b)$를 구하는 거예요. b가 1일 때 a는 몇 개, 2일 때 몇 개, $\cdots$ 가능한 끝부분일 때 몇 개해서 모두 더한 거죠. 따라서 시그마 안에는 a의 개수를 집어 넣으면 됩니다.

따라서 $n = 2m + 1$이라면 $b < \frac{2m+1}{2} = m + \frac{1}{2}$이니까 b는 1부터 m까지 가능합니다. 그러니까

$T_{2m+1} = \sum_{k=1}^{m} (2m + 1 - 2k) = m(2m+1) - m(m+1) = m^2$이네요. (다)$= h(m) = m^2$입니다.

따라서 $f(5) + g(6) + h(7) = 4 + 30 + 49 = 83$이네요. 답은 ⑤번입니다.

3. 그림과 같이 1보다 큰 실수 k에 대하여 두 곡선 $y=\log_2|kx|$와 $y=\log_2(x+4)$가 만나는 서로 다른 두 점을 A, B라 하고, 점 B를 지나는 곡선 $y=\log_2(-x+m)$이 곡선 $y=\log_2|kx|$와 만나는 점 중 B가 아닌 점을 C라 하자. 세 점 A, B, C의 x좌표를 각각 x_1, x_2, x_3이라 할 때, 〈보기〉에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, $x_1<x_2$이고, m은 실수이다.) 〔2021년 4월 15〕



<보 기>

ㄱ. $x_2=-2x_1$이면 $k=3$이다.

ㄴ. ${x_2}^2=x_1x_3$

ㄷ. 직선 AB의 기울기와 직선 AC의 기울기의 합이 0일 때, $m+k^2=19$이다.

① ㄱ　② ㄷ　③ ㄱ, ㄴ

④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

3. 정답 ③ 〔2021년 4월 15〕

1) 문제해석, 그림 있으면 그림 보면서

쭈루룩 읽어보면 결국 점 A에서는 $y=\log_2(x+4)$와 $y=\log_2 -kx$가 만나고, 점 B에서는 $y=\log_2(x+4)$, $y=\log_2 kx$, $y=\log_2(-x+m)$가 만나고, 점 C에서는 $y=\log_2 -kx$, $y=\log_2(-x+m)$이 만나는 거잖아요? 그림에도 모두 표시가 되어 있구요. 그리고 A, B, C의 x좌표가 각각 x_1, x_2, x_3이라네요.

일단 $y=\log_2(x+4)$와 $y=\log_2 -kx$가 점 A에서 만나니까 $\log_2(x_1+4)=\log_2 -kx_1$이죠? 밑이 같으니까 $x_1+4=-kx_1$이고 $x_1=-\dfrac{4}{k+1}$입니다.

다음으로 $y=\log_2(x+4)$, $y=\log_2 kx$, $y=\log_2(-x+m)$가 모두 점 B에서 만나니까 $\log_2(x_2+4)=\log_2 kx_2=\log_2(-x_2+m)$인데 밑이 모두 같으니까 $x_2+4=kx_2=-x_2+m$이네요.

정리해보면 $x_2=\dfrac{4}{k-1}=\dfrac{m-4}{2}$입니다.

마지막으로 점 C에서 $y=\log_2 -kx$, $y=\log_2(-x+m)$가 만나니까 $\log_2 -kx_3=\log_2(-x_3+m)$이고 이것도 역시 밑이 같으니까 $-kx_3=-x_3+m$입니다. $x_3=-\dfrac{m}{k-1}$이네요.

ㄱ을 볼게요. $x_2=-2x_1$이면 $k=3$이냐고 물어보네요. 그대로 해봅시다. 일단 $x_1=-\dfrac{4}{k+1}$인데 이왕이면 같은 문자로 놓는 게 좋겠죠? $x_2=\dfrac{4}{k-1}$이니까 $\dfrac{4}{k-1}=\dfrac{8}{k+1}$이고 $4k+4=8k-8$이니까 정리하면 $4k=12$, $k=3$입니다. 맞네요!

ㄴ에서 ${x_2}^2=x_1x_3$이냐고 물어보네요. 그럼 곱해보면 되죠. 이것도 역시 같은 문자로 정리해줍시다.

$x_1=-\dfrac{4}{k+1}$이었고, $x_2=\dfrac{4}{k-1}$인데 $x_3=-\dfrac{m}{k-1}$에는 문자 두 개가 있네요? 어..... 일단은 곱해줄게요.

$\dfrac{16}{(k-1)^2}=\dfrac{4m}{(k+1)(k-1)}$입니다. 정리하면 $\dfrac{4}{k-1}=\dfrac{m}{k+1}$인데.... 이걸 어떻게 알까요?

아까 k와 m의 관계식 하나 구한 거 있었잖아요. $x_2=\dfrac{4}{k-1}=\dfrac{m-4}{2}$이었죠. 따라서 $8=(k-1)(m-4)$이고

$(k-1)$을 양변에 나눠주면 $\frac{8}{k-1}=m-4$입니다. 양변에 4를 더하면 $m=\frac{8}{k-1}+4=\frac{4k+4}{k-1}=\frac{4(k+1)}{k-1}$이 되죠.

$m=\frac{4(k+1)}{k-1}$을 $\frac{4}{k-1}=\frac{m}{k+1}$에 그대로 넣어보세요. 맞죠? ㄴ도 맞습니다.

${x_2}^2=x_1x_3$라고 하니까 생각나는 게 하나 있죠? 등비수열 말이에요. ${x_2}^2=x_1x_3$가 의미하는 건 $x_1,$ x_2, x_3이 순서대로 등비수열을 이룬다는 거로 해석할 수 있겠네요.

2) ㄱㄴㄷ 유기성, 등비수열 $a_n=ar^{n-1}$ (a는 첫항, r는 공비)로 놓기

ㄷ에서 직선 AB의 기울기와 직선 AC의 기울기의 합이 0일 때 $m+k^2=19$이냐고 물어봤어요. 일단 각각 구해볼까요?

그런데 기울기를 구할 때 어떤 함수의 함숫값을 구할 지가 고민이네요. 이거 근데 A, B, C가 모두 $y=\log_2|kx|$위의 점이니까 이 함수의 함숫값을 이용해봅시다.

직선 AB의 기울기는 $\frac{\log_2 kx_2-\log_2 -kx_1}{x_2-x_1}=\frac{\log_2 -\frac{x_2}{x_1}}{x_2-x_1}$입니다. 직선 AC의 기울기는 $\frac{\log_2 -kx_1-\log_2 -kx_3}{x_1-x_3}=\frac{\log_2 \frac{x_1}{x_3}}{x_1-x_3}$이네요. 이 둘을 더한 것이 0이라고 하니까 더하면 $\frac{\log_2 -\frac{x_2}{x_1}}{x_2-x_1}+\frac{\log_2 \frac{x_1}{x_3}}{x_1-x_3}=0$이 됩니다.

여기서 어쩌죠? 음.... 근데 $\frac{\log_2 -\frac{x_2}{x_1}}{x_2-x_1}+\frac{\log_2 \frac{x_1}{x_3}}{x_1-x_3}=0$의 분자의 모양을 잘 보세요. x_2가 x_1로 나눠졌고 x_1이 x_3으로 나눠졌어요. 이거 뭔가 등비수열하고 비슷하지 않나요? 그러고 보니 아까 $x_1,$ x_2, x_3가 등비수열을 이룬다고 했었잖아요? 그러면 x_1, $x_2=rx_1$, $x_3=r^2x_1$라고 해볼게요. r은 음수이구요. 다 넣으면 $\frac{\log_2 -r}{rx_1-x_1}+\frac{\log_2 \frac{1}{r^2}}{x_1-r^2x_1}=0$입니다. 여기서 $\log_2 \frac{1}{r^2}=-2\log_2 -r$이잖아요? r은 음수니까 제곱을 벗겨내면

$-r$이 되죠. 그리고 $rx_1 - x_1 = x_1(r-1)$, $x_1 - r^2x_1 = x_1(1-r^2)$이니까 양변을 $x_1(r-1)$로 나눌 수도 있겠네요. 따라서 $\log_2 - r + \dfrac{2\log_2 - r}{r+1} = 0$입니다. 양변을 $2\log_2 - r$로 나누면 $1 + \dfrac{2}{r+1} = 0$이고 정리하면 $r = -3$입니다. $x_2 = -3x_1$, $x_3 = 9x_1$이네요.

이제 저거 다 넣어봅시다. $x_1 = -\dfrac{4}{k+1}$, $x_2 = \dfrac{4}{k-1} = \dfrac{m-4}{2}$, $x_3 = -\dfrac{m}{k-1}$에 넣어볼게요.

먼저 $\dfrac{4}{k-1} = \dfrac{m-4}{2} = \dfrac{12}{k+1}$입니다. 따라서 $4k+4 = 12k-12$이고 $k=2$입니다. $m=12$이네요.

따라서 $m+k^2 = 16$입니다. 19가 아니네요? ㄷ은 아닙니다. 따라서 구하는 건 ㄱ, ㄴ이고 답은 ③번이네요.

4. $\overline{AB} : \overline{BC} : \overline{CA} = 1 : 2 : \sqrt{2}$ 인 삼각형 ABC가 있다.
삼각형 ABC의 외접원의 넓이가 28π일 때, 선분 CA의 길이를 구하시오. 〔2021년 4월 20〕

4. 정답 7 〔2021년 4월 20〕

1) 내부 : 삼각형은 정해져 있다 - 세 변의 길이, 외부

$\overline{\mathrm{AB}}:\overline{\mathrm{BC}}:\overline{\mathrm{CA}}=1:2:\sqrt{2}$ 인 삼각형 ABC가 있다네요. 일단 $\overline{\mathrm{AB}}=k$라 하면 $\overline{\mathrm{BC}}=2k$, $\overline{\mathrm{CA}}=k\sqrt{2}$ 이죠?

삼각형의 세 변의 길이가 나왔네요? 그러면 자연스럽게 코사인법칙을 사용할 생각을 가지고 있어야겠죠? 어느 변을 잡든지 상관없으니까 지금은 일단 보류해둡시다.

그리고는 삼각형 ABC의 외접원의 넓이가 28π랍니다. 외접원의 넓이를 알려면 반지름의 길이를 알아야 하잖아요? 관련된 공식은 사인법칙이죠. 이왕이면 구하고자 하는 선분 CA의 길이로 표현해볼게요. 외접원의 반지름의 길이를 r이라 하면 $\dfrac{\overline{\mathrm{CA}}}{\sin \mathrm{B}}=2r$인데 $\pi r^2=28\pi$이니까 $r^2=28$이죠. 반지름은 양수니까 $r=\sqrt{28}=2\sqrt{7}$ 이네요.

근데 사인값을 어떻게 구할까요? 그러고 보니 아까 보류해뒀던 코사인법칙을 지금 사용해봅시다.

$\cos \mathrm{B}=\dfrac{k^2+(2k)^2-(k\sqrt{2})^2}{2\times k\times 2k}=\dfrac{3}{4}$이네요. 이러면 사인값을 구할 수 있죠. $\sin^2\mathrm{B}+\cos^2\mathrm{B}=1$이잖아요.

$\sin^2\mathrm{B}=\dfrac{7}{16}$ 인데 $0<\angle B<\pi$이니까 $\sin \mathrm{B}=\dfrac{\sqrt{7}}{4}$ 입니다. $\dfrac{\overline{\mathrm{CA}}}{\sin \mathrm{B}}=2r$에 모두 넣으면 $\overline{\mathrm{CA}}=7$이네요.

5. 첫째항이 자연수인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1} = \begin{cases} a_n - 2 & (a_n \geq 0) \\ a_n + 5 & (a_n < 0) \end{cases}$$

을 만족시킨다. $a_{15} < 0$이 되도록 하는 a_1의 최솟값을 구하시오.

〔2021년 4월 21〕

5. 정답 5 〔2021년 4월 21〕

1) 자연수 보이면 숫자 넣기

첫째항인 a_1이 자연수인데 모든 자연수 n에 대하여 $a_{n+1}=\begin{cases} a_n-2 & (a_n \geq 0) \\ a_n+5 & (a_n < 0) \end{cases}$랍니다.

그리고는 $a_{15}<0$이 되도록 하는 a_1의 최솟값을 구하래요. 어……

일단 주어진 조건은 a_1과 a_{15}인데 이거 간격이 너무 먼데요? 이 사이에 13개 항이나 있어요. 이걸 미지수로 잡는다면...? 어우 끔찍하네요.

그러면 어쩌죠? 뭘 어떡해요. 그냥 자연수 넣어야죠.

2) 케이스 분류

$a_1=1$이라면 1 -1 4 2 0 -2 3 1 -1 4 $\cdots$가 되죠. 잘 보면 숫자가 반복되는 거 보이시나요?
1 -1 4 2 0 -2 3이 반복되죠. 지금 주기가 7이잖아요? 따라서 a_{14}까지 저 숫자들이 반복되고 a_{15}는 반복되는 숫자들의 첫 번째 숫자인 1이 될 거예요. $a_{15}=1$

$a_1=2$라면 2 0 -2 3 1 -1 4 2 0 -2 3 1 $-1\cdots$가 됩니다. 2 0 -2 3 1 -1 4가 반복되네요. 따라서 $a_{15}=2$입니다.

$a_1=3$이라면 3 1 -1 4 2 0 -2 3 1 -1 4$\cdots$가 됩니다. 이것도 역시 3 1 -1 4 2 0 -2이 반복되네요. 그리고 잘 보면 반복되는 숫자들이 똑같아요. 단지 순서만 바뀔 뿐이네요. $a_{15}=3$입니다. 뭔가 $a_1=4$일 때도 비슷한 결과가 나올 것 같은 기분이 들죠..?

$a_1=4$라면 4 2 0 -2 3 1 -1 4 2 0 $\cdots$가 되네요. 마찬가지로 반복되니까 $a_{15}=4$입니다.

$a_1=5$라면... 첫 시작이 5네요? 이건 반복되는 숫자들에 없었는데... 일단 가봅시다.
5 3 1 -1 4 2 0 -2 3 1 -1 $\cdots$이 됩니다. 이거 반복되긴 하는데 5는 반복되는 숫자에 포함이 안 돼요. 반복되는 건 특정 숫자들만 반복이 됩니다. 이거는 끝까지 확인해보긴 해야겠네요. a_{15}까지 나열해봅시다.
5 3 1 -1 4 2 0 -2 3 1 -1 4 2 0 -2로 $a_{15}=-2$가 됩니다. $a_{15}<0$이네요! 따라서 a_1의 최솟값은 5입니다.

6. 실수 a에 대하여 두 함수 $f(x)$, $g(x)$를

$$f(x)=3x+a,\ \ g(x)=\int_{2}^{x}(t+a)f(t)dt$$

라 하자. 함수 $h(x)=f(x)g(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $h(-1)$의 최솟값은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.
(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) 〔2021년 4월 22〕

(가) $y=h(x)$ 위의 어떤 점에서의 접선이 x축이다. (나) 곡선 $y=\lvert h(x)\rvert$가 x축에 평행한 직선과 만나는 서로 다른 점의 개수의 최댓값은 4이다.

6. 정답 251 〔2021년 4월 22〕

1) 정적분의 위끝 또는 아래끝에 변수가 있는 경우

$f(x)=3x+a$, $g(x)=\int_{2}^{x}(t+a)f(t)dt$가 있는데 $h(x)=f(x)g(x)$랍니다. 일단 $g(x)$가 정적분의 위끝에 변수가 있네요. 위끝과 아래끝이 같아지는 $x=2$를 넣으면 $g(2)=0$이 됩니다. 미분까지 하고 싶은데 곱한 함수 $h(x)=f(x)g(x)$가 있으니까 이건 패스할게요.

곱한 함수 식을 한 번 써볼게요. 일단 $g(x)$ 안에 $f(t)$가 있으니까 넣어보면 $g(x)=\int_{2}^{x}(t+a)(3t+a)dt$입니다. $g(x)$는 이차함수를 적분한 거니까 삼차함수죠? 최고차항의 계수가 3인 이차함수를 적분했으니까 최고차항의 계수는 1이구요. 따라서 $h(x)=(3x+a)\int_{2}^{x}(t+a)(3t+a)dt$는 최고차항의 계수가 양수인 사차함수입니다.

2) 조건해석

(가)조건에서 $y=h(x)$ 위의 어떤 점에서의 접선이 x축이라고 합니다. 어떤 점에서의 접선이 x축이라는 건? 일단 접선과 $h(x)$가 만나는 점이 x축 위라는 거고 그 점에서의 접선의 기울기가 0이라는 거죠?

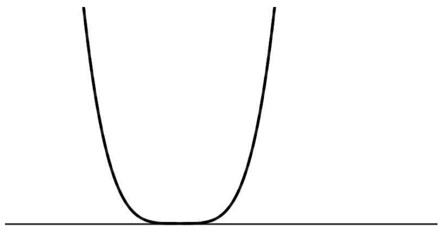
이걸 다시 표현하면 어떤 점에서 x축에 접한다는 거예요. $x=a$에서 $h(x)$와 x축이 접한다면 $h(a)=0$, $h'(a)=0$이 되겠죠. 인수정리가 쓰고 싶어지는데요? $h(x)$는 $(x-a)$라는 인수를 적어도 두 개 가져야 합니다.

(나)조건에서 $y=|h(x)|$가 x축에 평행한 직선, 즉 $y=k$라는 직선과 만나는 서로 다른 점의 개수의 최댓값이 4라고 합니다. 이건 그래프를 그려봐야겠네요.

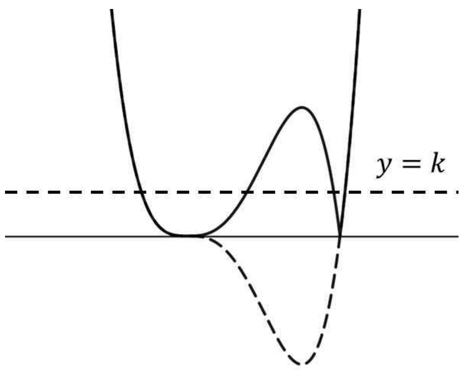
3) 함수 보이면 관찰 → 그래프 그리기, 절댓값 함수

일단 x축에 접하는 그래프부터 생각해야 해요. 그러면서 접어 올렸을 때 $y=k$라는 x축에 평행한 직선과 4개의 점에서 만나고, 그게 최댓값인 그래프를 찾아야 합니다.

일단

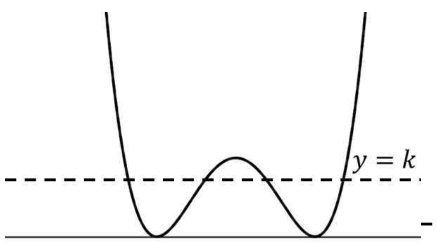


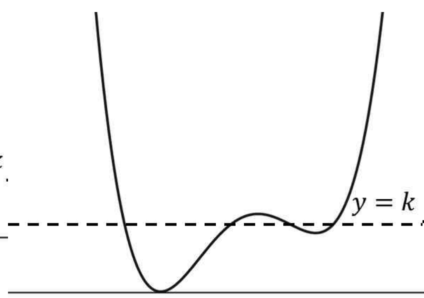
이런 그래프는 안 됩니다. 2개의 점에서 만나죠?

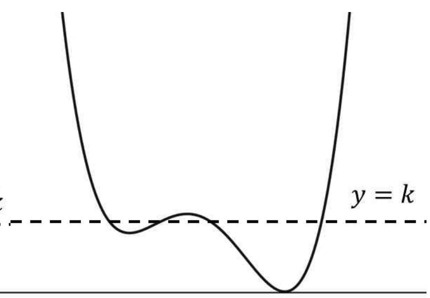


이런 그래프는 되겠네요. 변곡점이 오른쪽으로 가서 개형의 좌우가 뒤바뀌어도 괜찮아요.

W모양의 그래프 중에서는



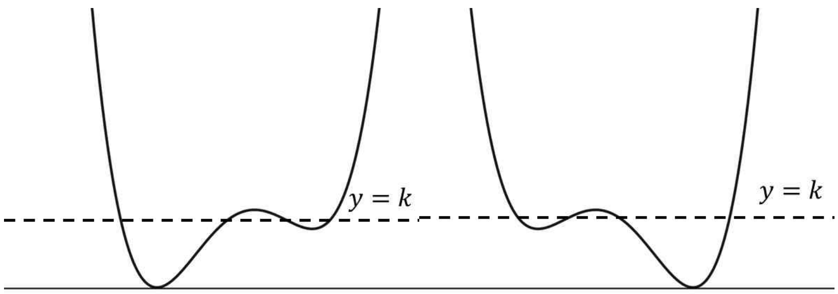




이정도가 되겠네요.

$h(x)$는 지금 $x=-\frac{a}{3}$, $x=2$에서 x축과 만나고 있죠. 두 개가 같은지 다른지는 모르겠지만요. 근데 개형

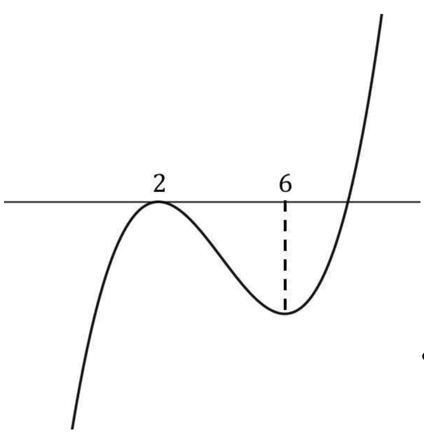
중에서 x축과 딱 한 개의 점에서만 만나는 것이 있죠.



이 두 개 말이에요. x축에 접하고 있으니까 $h(x)$는 같은 인수를 두 개 가져야 합니다. 마침 두 개가 있네요. $x = -\frac{a}{3}$, $x = 2$이죠. 이 두 개가 같아야 같은 인수가 되겠죠? 따라서 $a = -6$이고

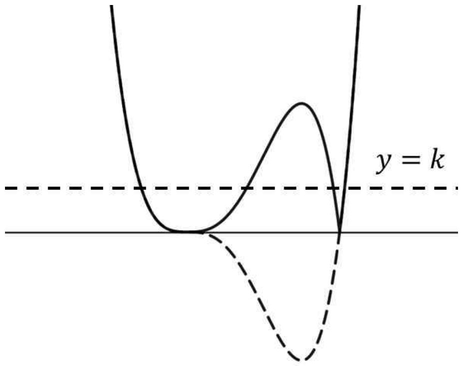
$h(x) = 3(x-2)\int_2^x (t-6)(3t-6)dt$입니다.

그런데 이 두 개형은 문제가 있어요. $3(x-2)(x-6)$를 적분하고 $x = 2$에서 함숫값이 0인 함수를 그려보세요. $x = 2$에서 극대, $x = 6$에서 극소가 되니까

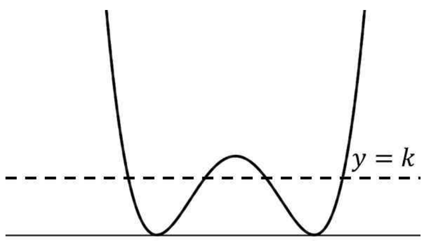


이렇게 됩니다. 일단 변곡점의 x좌표는 2와 6의 중점인 $x = 4$이구요, x축과 만나는 $x = 2$가 아닌 점의 x좌표를 k라 하면 삼차함수의 비율관계에 의하여 2와 k의 $1:2$ 내분점의 x좌표는 $x = 4$가 됩니다. $\frac{4+k}{1+2} = 4$이고 $k = 8$이네요. 따라서 $\int_2^x (t-6)(3t-6)dt$는 $(x-2)$라는 인수를 두 개, $(x-8)$이라는 인수를 하나 갖습니다.

그렇다면 $h(x) = 3(x-2)\int_2^x (t-6)(3t-6)dt$는 $(x-2)$라는 인수를 총 세 개 가지게 되는 거잖아요? $3(x-2)$가 추가로 곱해져 있으니까요. 그러면 저 개형이 나올 수 없죠. $(x-2)$라는 인수를 총 세 개 가지면



와 같은 개형이 나올 테니까요.



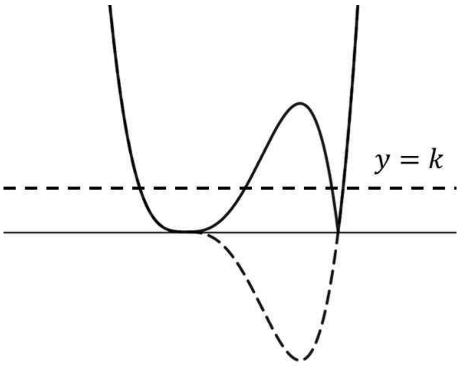
그럼 이런 개형은 어떨까요?

$h(x)=(3x+a)\int_2^x (t+a)(3t+a)dt$에서 방금과 같이 $x=-\dfrac{a}{3}$, $x=2$가 같다면 $h(x)$는 $(x-2)$라는 인수를 세 개 가지게 될 거예요. 따라서 바로 위와 같은 개형이 나오려면 $x=-\dfrac{a}{3}$, $x=2$는 달라야 합니다.

그러면 결국 $\int_2^x (t+a)(3t+a)dt$는 $\left(x+\dfrac{a}{3}\right)$라는 인수 하나, $(x-2)$라는 인수 두 개를 가져야겠어요. 곱해져 있던 $(3x+a)$라는 인수까지 더해져서 $\left(x+\dfrac{a}{3}\right)$ 두 개, $(x-2)$ 두 개가 나오죠.

그런데 이것도 문제가 있어요. $\int_2^x (t+a)(3t+a)dt$를 미분하면 $(x+a)(3x+a)$가 되잖아요. $x=-\dfrac{a}{3}$에서 극대 또는 극소가 된다는 건데 $\int_2^x (t+a)(3t+a)dt$는 $x=-\dfrac{a}{3}$에서 만나기만 해야 하잖아요? 접하면 인수가 두 개가 될 테니까요. 그런데 극대 또는 극소점이 x축에 있다면? 그건 접했다는 거죠. 조건에 맞지 않게 됩니다.

따라서 가능한 개형은



이거네요.

만약 $x=-\dfrac{a}{3}$, $x=2$가 같다면 $a=-6$입니다. $h(x)=3(x-2)\int_2^x(t-6)(3t-6)dt$인데 아까 살펴봤듯이

$\int_2^x(t-6)(3t-6)dt$는 $(x-2)$라는 인수 두 개, $(x-8)$라는 인수 하나를 가지니까

$\int_2^x(t-6)(3t-6)dt=(x-2)^2(x-8)$입니다. $h(x)=3(x-2)^3(x-8)$이네요. $h(-1)=729$입니다. 일단 하나 구했어요!

이번엔 $x=-\dfrac{a}{3}$, $x=2$가 다르다고 해봅시다. 그러면 $(x-2)$라는 인수를 세 개 가질 것인가, 아니면 $\left(x+\dfrac{a}{3}\right)$라는 인수를 세 개 가질 것인가가 나뉘죠?

만약 $(x-2)$라는 인수를 세 개 가진다고 해봅시다. $h(x)=(3x+a)\int_2^x(t+a)(3t+a)dt$에서 이미 $\left(x+\dfrac{a}{3}\right)$이라는 인수는 $(3x+a)$로 곱해져 있으니까 결국 $\int_2^x(t+a)(3t+a)dt$는 $(x-2)$라는 인수를 세 개 가져야 합니다.

그런데 이건 불가능하죠. $\int_2^x(t+a)(3t+a)dt$가 $(x-2)$라는 인수를 세 개 가져서

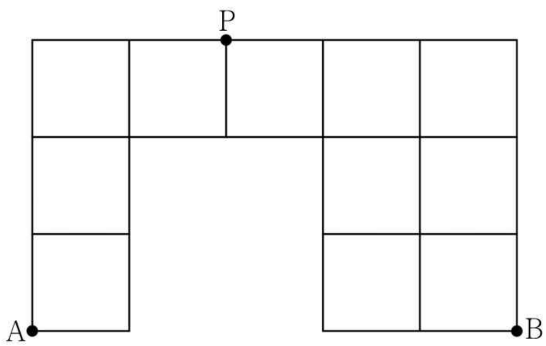
$\int_2^x(t+a)(3t+a)dt=(x-2)^3$이 된다면 미분했을 때 $(x+a)(3x+a)=3(x-2)^2$이어야 하는데 지금 $(x+a)$라는 인수와 $(3x+a)$라는 인수는 같지 않잖아요.

$\left(x+\frac{a}{3}\right)$라는 인수를 세 개 가졌을 때는 $\int_2^x (t+a)(3t+a)dt$가 $(x-2)$라는 인수 하나, $\left(x+\frac{a}{3}\right)$라는 인수 두 개를 가져야 합니다. $\int_2^x (t+a)(3t+a)dt = (x-2)\left(x+\frac{a}{3}\right)^2$가 되는 거죠. 항등식이니까 뭘 해도 같아야 합니다. 일단 $x=2$를 넣으면 $0=0$으로 같네요. 미분하면 $3(x+a)\left(x+\frac{a}{3}\right)=3\left(x+\frac{a}{3}\right)\left(x+\frac{a}{9}-\frac{4}{3}\right)$가 되네요. 따라서 $a=\frac{a}{9}-\frac{4}{3}$이고 $a=-\frac{3}{2}$가 됩니다. $h(x)=(3x+a)\int_2^x (t+a)(3t+a)dt$는 $\left(x+\frac{a}{3}\right)$라는 인수 세 개에 $(x-2)$라는 인수 하나를 가진다고 했었죠? 따라서 $h(x)=3\left(x-\frac{1}{2}\right)^3(x-2)$이구요, $h(-1)=\frac{243}{8}$입니다.

$p=8$, $q=243$이니까 $p+q=251$이네요.

확통

7. 그림과 같이 직사각형 모양으로 연결된 도로망이 있다. 이 도로망을 따라 A지점에서 출발하여 P지점을 지나 B지점으로 갈 때, 한 번 지난 도로는 다시 지나지 않으면서 최단거리로 가는 경우의 수는? 〔2021년 4월 확통 28〕



① 78 ② 82 ③ 86 ④ 90 ⑤ 94

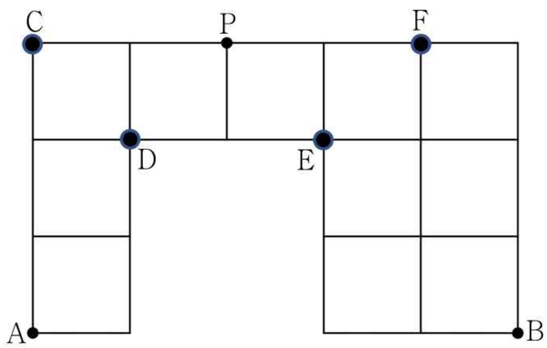
7. 정답 94 〔2021년 4월 확통 28〕

1) 확통은 상황이해 후 기준 잡고 분류, 그림 있으면 그림 보면서

그림과 같은 상황에서 A → P → B 순으로 가야 하고 한 번 지난 도로는 다시 지나지 않으면서 최단거리로 가야 한다고 합니다.

일단 A → P랑 P → B 둘로 나눠서 볼게요.

먼저 A → P의 경우를 해봅시다. 이 경우 가능한 경우는 두 가지에요.



이런 그림에서 A → C → P이거나 A → D → P인 경우이죠.

A → C → P의 경우는 A부터 C까지 경우의 수가 1, C부터 P까지 경우의 수가 1이니까 $1\times1=1$입니다.

다음으로 A → D → P의 경우를 해볼게요. A부터 D까지 경우의 수는 위로 두 번, 오른쪽으로 한 번을 나열하는 경우의 수와 같잖아요? 따라서 $\frac{3!}{2!}=3$입니다. D부터 P까지의 경우의 수는 위로 한 번, 오른쪽으로 한 번을 나열하는 경우의 수와 같으니까 $2!=2$이구요. 따라서 $3\times2=6$입니다. 따라서 A → P인 경우의 수는 $1+6=7$입니다.

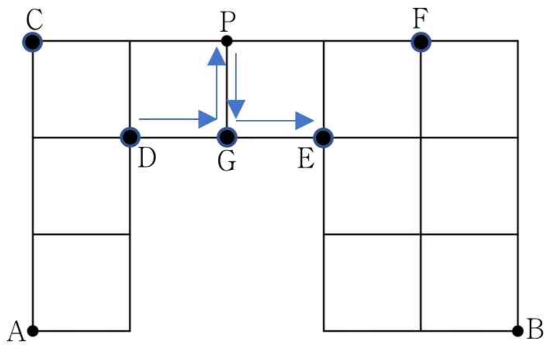
이번엔 P → B인 경우를 해봅시다. 이 경우는 그림에서와 같이 P → F → B와 P → E → B인 두 경우가 있어요.

P → F → B인 경우는 P부터 F까지 경우의 수가 1이고 F부터 B까지의 경우의 수가 오른쪽으로 한 번, 아래로 3번 나열하는 것과 같으니까 $\frac{4!}{3!}=4$입니다. 따라서 $1\times4=4$이네요.

P → E → B인 경우를 해봅시다. P부터 E까지 경우의 수는 오른쪽 한 번, 아래로 한 번을 나열하는 것과 같으니까 $2!=2$이구요, E부터 B까지의 경우의 수는 오른쪽 두 번, 아래로 두 번을 나열하는 것과 같으니까 $\frac{4!}{2!\times2!}=6$입니다. 따라서 $2\times6=12$이네요. 총 $4+12=16$입니다.

이제 모든 경우의 수를 구해봅시다. $7\times16=112$이네요.... 라고 풀면 틀립니다.

왜냐하면 한 번 지난 도로는 다시 지나지 말아야 하는데



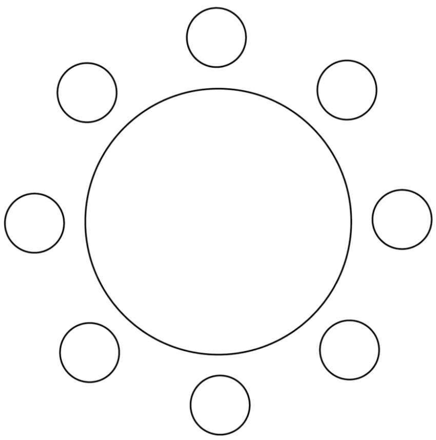
이렇게 가면 같은 도로를 두 번 지나게 되거든요. 이 경우를 빼줘야죠.

A부터 D까지 경우의 수는 $\frac{3!}{2!}=3$이고 E부터 B까지의 경우의 수는 $\frac{4!}{2!\times2!}=6$이었으니까 $3\times6=18$입니다.

이걸 빼주면 구하는 경우의 수는 $112-18=94$이네요.

8. 두 남학생 A, B를 포함한 4명의 남학생과 여학생 C를 포함한 4명의 여학생이 있다. 이 8명의 학생이 일정한 간격을 두고 원 모양의 탁자에 다음 조건을 만족시키도록 모두 둘러앉는 경우의 수를 구하시오. (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.) 〔2021년 4월 확통 29〕

(가) A와 B는 이웃한다. (나) C는 여학생과 이웃하지 않는다.



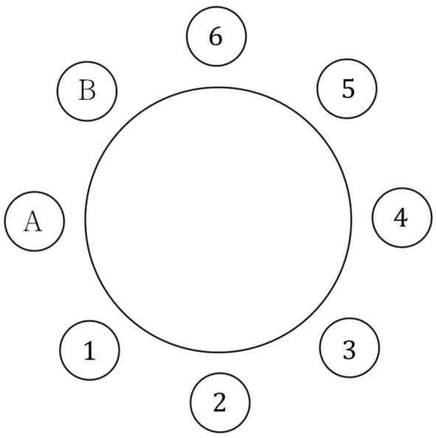
8. 정답 228 〔2021년 4월 확통 29〕

1) 확통은 상황이해 후 기준 잡고 분류

남학생은 A, B를 포함하여 4명이 있고 여학생은 C를 포함하여 4명이 있답니다. 이때 A, B는 이웃하고 C는 이웃하지 않도록 배열하는 경우의 수를 구하라네요.

일단 A, B가 이웃해야 하니까 하나로 묶어줍시다. 묶음 안에서 자리를 바꿀 수 있으니까 경우의 수는 2이구요. 다음으로 C는 여학생과 이웃하면 안 되잖아요? 음....

그러면 일단 A, B를 먼저 배열해줍시다. 일단 먼저 구해놨던 경우의 수 2를 취소하고 다시 할게요. A를 먼저 배열하면 경우의 수는 1이구요, 그 이후에 양 옆에 B를 배열하면 경우의 수는 2입니다.



이렇게 배열했다고 가정할게요.

C가 만약 1의 자리에 있다면 여학생 3명은 3, 4, 5, 6번 자리에 갈 수 있습니다. 경우의 수는 ${}_4P_3=24$입니다.

2의 자리에 있다면 여학생 3명은 4, 5, 6번 자리에 갈 수 있습니다. 경우의 수는 ${}_3P_3=6$입니다.

3의 자리에 있다면 여학생 3명은 1, 5, 6번 자리에 갈 수 있습니다. 경우의 수는 ${}_3P_3=6$입니다.

4의 자리에 있다면 여학생 3명은 1, 2, 6번 자리에 갈 수 있습니다. 경우의 수는 ${}_3P_3=6$입니다.

5의 자리에 있다면 여학생 3명은 1, 2, 3번 자리에 갈 수 있습니다. 경우의 수는 ${}_3P_3=6$입니다.

6의 자리에 있다면 여학생 3명은 1, 2, 3, 4번 자리에 갈 수 있습니다. 경우의 수는 ${}_4P_3=24$입니다.

총 $24+6+6+6+6+24=72$이네요.

이후에는 그냥 남학생 2명을 배열해주면 됩니다. 경우의 수는 2이네요. 따라서 구하는 경우의 수는 $2\times72\times2=228$입니다.

9. 다음 조건을 만족시키는 14 이하의 네 자연수 x_1, x_2, x_3, x_4의 모든 순서쌍 $(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4)$의 개수를 구하시오.
〔2021년 4월 확통 30〕

(가) $x_1+x_2+x_3+x_4=34$
(나) x_1과 x_3은 홀수이고 x_2와 x_4는 짝수이다.

9. 정답 206 〔2021년 4월 확통 30〕

1) 확통은 상황이해 후 기준 잡고 분류

x_1과 x_3은 홀수이고 x_2와 x_4는 짝수인데 $x_1+x_2+x_3+x_4=34$라고 합니다.
일단 x_1과 x_3은 홀수니까 $x_1=2x_1{}'+1$, $x_3=2x_3{}'+1$($x_1{}'$, $x_3{}'$는 음이 아닌 정수)로 바꿀 수 있죠?

그리고 x_2와 x_4는 짝수니까 $x_2=2x_2{}'+2$, $x_4=2x_4{}'+2$ ($x_2{}'$, $x_4{}'$는 음이 아닌 정수)로 바꿀 수 있어요.

이걸 모두 집어 넣으면 $x_1{}'+x_2{}'+x_3{}'+x_4{}'=14$가 되죠. $x_1{}'$, $x_2{}'$, $x_3{}'$, $x_4{}'$는 모두 음이 아닌 정수니까 그냥 하면 되겠네요.

그런데 x_1, x_2, x_3, x_4는 14이하의 자연수에요. x_1과 x_3은 홀수니까 13이하, x_2와 x_4는 짝수니까 14이하이죠.

$x_1=2x_1{}'+1$, $x_3=2x_3{}'+1$이니까 $x_1{}'$, $x_3{}'$는 6 이하, $x_2=2x_2{}'+2$, $x_4=2x_4{}'+2$이니까 $x_2{}'$, $x_4{}'$ 역시 6 이하죠. $x_1{}'$, $x_2{}'$, $x_3{}'$, $x_4{}'$는 6 이하의 음이 아닌 정수입니다.

이 상태에서 $x_1{}'+x_2{}'+x_3{}'+x_4{}'=14$를 바로 계산하면 틀리게 됩니다. 왜냐하면 이걸 지금 서로 다른 상자 $x_1{}'$, $x_2{}'$, $x_3{}'$, $x_4{}'$에 같은 공을 14번 집어 넣는 상황으로 파악해서 선택종류 4개 선택횟수 14로 ${}_4H_{14}={}_{17}C_{14}={}_{17}C_3=\dfrac{17\times16\times15}{6}=680$로 계산하면 $x_1{}'$, $x_2{}'$, $x_3{}'$, $x_4{}'$ 중에서 7이 넘는 경우도 포함해버리잖아요. 따라서 전체 경우의 수인 680에서 7이 넘는 경우의 수를 빼줘야 합니다.

다행히도 하나의 숫자가 7을 제외하고 8(9, 10, 11, 12, 13, 14)을 넘어버리면 나머지 숫자는 8(9, 10, 11, 12, 13, 14)을 넘을 수가 없는 구조에요. 7은 안타깝게도 $7+7=14$가 가능해서 겹치는 경우를 빼줘야 합니다.

일단 7부터 가봅시다. 하나의 숫자가 7이라면 나머지 숫자들은 다 더해서 7이 되어야 합니다. 그 하나의 숫자를 고르는 경우의 수가 4네요. 그리고 선택종류 3개 선택횟수 7로 ${}_3H_7={}_9C_7={}_9C_2=36$입니다. 총 $4\times36=144$입니다.

그런데 이거는 7을 두 번 고르는 경우를 두 번 계산하게 돼요. 나머지 숫자들을 다 더해서 7이 될 때 또 다른 하나의 숫자가 7이 나올 수도 있는 거잖아요. 따라서 7을 두 번 고르는 경우를 한 번 빼줘야 합니다.
${}_4C_2=6$이네요. 따라서 $144-6=138$입니다.

하나의 숫자가 8이상인 경우도 해봅시다. 이러면 하나의 숫자는 8이상, 나머지는 0이상의 숫자들이에요. 그러면 그 하나의 숫자에서 8을 빼버려서 나머지랑 똑같이 0이상으로 바꿔주면 계산이 쉽겠죠? 하나의 숫자를 구하는 경우의 수는 4입니다.

그리고 ${x_1}' + {x_2}' + {x_3}' + {x_4}' = 14$이라고 할 때 그 하나의 숫자를 ${x_1}'$이라 하고 ${x_1}' = {x_1}'' + 8$(${x_1}''$은 음이 아닌 정수)라 하면 ${x_1}'' + {x_2}' + {x_3}' + {x_4}' = 6$이 됩니다. 모두 음이 아닌 정수이구요. 선택종류 4가지에 선택횟수 6번이니까 ${}_4H_6 = {}_9C_6 = {}_9C_3 = 84$이네요. $4 \times 84 = 336$입니다.

따라서 구하는 경우의 수는 $680 - 138 - 336 = 206$입니다.