2012학년도 대학수학능력시험 대비

2011학년도 3월 고3 전국연합학력평가 정답 및 해설

• 수리 영역 •

수리'가'형 정답

1	④	*2*	②	*3*	⑤	*4*	③	*5*	③
6	①	*7*	⑤	*8*	④	*9*	②	*10*	②
11	⑤	*12*	④	*13*	⑤	*14*	②	*15*	④
16	③	*17*	⑤	*18*	③	*19*	①	*20*	①
21	②	*22*	32	*23*	49	*24*	6	*25*	90
26	8	*27*	17	*28*	120	*29*	9	*30*	6

해 설

1. [출제의도] 로그의 계산을 할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$\log_3 12 - \log_3 \frac{4}{27} = \log_3\left(12 \times \frac{27}{4}\right)$

$= \log_3 81 = 4$

2. [출제의도] 행렬의 계산을 할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$X = B - AB$

$= (E - A)B$

$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

따라서 모든 성분의 합은 2이다.

[다른 풀이]

행렬 $E-A$에 행렬 B를 곱하면 행렬 $E-A$의 1열과 2열이 바뀌므로 행렬의 성분의 합에는 영향을 주지 않는다. 따라서 행렬 X의 성분의 합은 행렬 $E-A$의 성분의 합과 같다.

3. [출제의도] 함수의 극한값을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 3x}{\sqrt{x+1} - 2}$

$= \lim_{x \to 3} \frac{x(x-3)(\sqrt{x+1}+2)}{x-3}$

$= \lim_{x \to 3} x(\sqrt{x+1}+2)$

$= 3(\sqrt{3+1}+2)$

$= 3 \cdot 4 = 12$

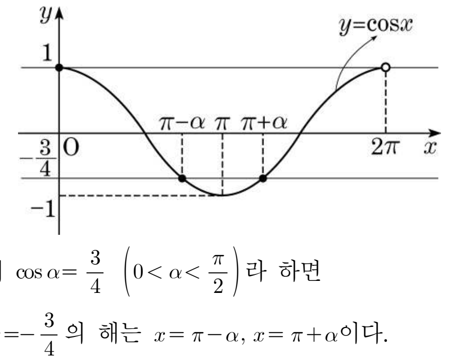
4. [출제의도] 삼각방정식의 해를 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$2(2\cos^2 x - 1) = 1 + \cos x$

$4\cos^2 x - \cos x - 3 = 0$

$(4\cos x + 3)(\cos x - 1) = 0$

$\therefore \ \cos x = -\frac{3}{4}, \ \cos x = 1$



이때 $\cos\alpha = \frac{3}{4} \ \left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$라 하면

$\cos x = -\frac{3}{4}$의 해는 $x = \pi - \alpha, \ x = \pi + \alpha$이다.

$\cos x = 1$의 해는 $x = 0$

따라서 모든 x의 값의 합은 2π이다.

5. [출제의도] 고차부등식의 계수를 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

i) $a < 0$일 때,

$a^2 - 2a < a^2 - 4a < a^2 - 6a$이므로 해는

$a^2 - 2a < x < a^2 - 4a, \ x > a^2 - 6a$

$a^2 - 2a = 8, \ a^2 - 4a = 12, \ a^2 - 6a = 16$이다.

따라서 연립방정식을 만족하는 $a = -2$이다.

ii) $a = 0$일 때,

$x^3 > 0$

따라서 $x > 0$이므로 조건에 맞지 않는다.

iii) $a > 0$일 때,

$a^2 - 2a > a^2 - 4a > a^2 - 6a$이므로 해는

$a^2 - 6a < x < a^2 - 4a, \ x > a^2 - 2a$

$a^2 - 2a = 16, \ a^2 - 4a = 12, \ a^2 - 6a = 8$이다.

따라서 연립방정식을 만족하는 상수 a는 존재하지 않는다.

i), ii), iii)에 의하여 $a = -2$

[다른 풀이]

$a \neq 0$일 때 세 수 $a^2 - 2a, \ a^2 - 4a, \ a^2 - 6a$ 중 크기가 작은 수부터 두 번째 수는 $a^2 - 4a$이다. 그러므로

$a^2 - 4a = 12, \ (a+2)(a-6) = 0$

$\therefore a = -2$ 또는 $a = 6$

그런데 $a = 6$인 경우는 주어진 해의 범위를 만족하지 않는다.

$\therefore a = -2$

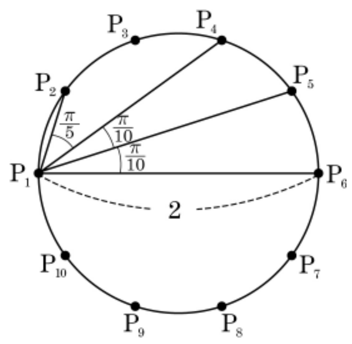
6. [출제의도] 역함수의 접선의 기울기를 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$f'(x) = e^x + (x-1)e^x = xe^x$

$g'(x) = \frac{1}{f'(y)}$이므로

$g'(e^2) = \frac{1}{f'(2)} = \frac{1}{2e^2}$

7. [출제의도] 삼각함수의 배각 공식을 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.



$\overline{P_1P_2} = \overline{P_5P_6} = 2\sin\frac{\pi}{10}, \ \overline{P_1P_4} = 2\cos\frac{\pi}{5}, \ \overline{P_1P_5} = 2\cos\frac{\pi}{10}$

$\overline{P_1P_2} \cdot \overline{P_1P_4} \cdot \overline{P_1P_5} = 8\sin\frac{\pi}{10}\cos\frac{\pi}{5}\cos\frac{\pi}{10}$

$= 4\sin\frac{\pi}{5}\cos\frac{\pi}{5}$

$= 2\sin\frac{2}{5}\pi$

[다른 풀이]

$\overline{P_1P_2} = 2\cos\frac{2}{5}\pi, \ \overline{P_1P_4} = 2\cos\frac{\pi}{5}, \ \overline{P_1P_5} = 2\cos\frac{\pi}{10}$

$S = \overline{P_1P_2} \times \overline{P_1P_4} \times \overline{P_1P_5}$라고 하면

$\sin\frac{\pi}{10} S = \sin\frac{\pi}{10} \cdot 2\cos\frac{2}{5}\pi \cdot 2\cos\frac{\pi}{5} \cdot 2\cos\frac{\pi}{10}$

$= \sin\frac{\pi}{10} \cdot 2\cos\frac{\pi}{10} \cdot 2\cos\frac{\pi}{5} \cdot 2\cos\frac{2}{5}\pi$

$= \sin\frac{\pi}{5} \cdot 2\cos\frac{\pi}{5} \cdot 2\cos\frac{2}{5}\pi$

$= \sin\frac{2}{5}\pi \cdot 2\cos\frac{2}{5}\pi$

$= \sin\frac{4}{5}\pi$이므로

$S = \dfrac{\sin\frac{4}{5}\pi}{\sin\frac{\pi}{10}} = \dfrac{\sin\frac{\pi}{5}}{\sin\frac{\pi}{10}}$

$= \dfrac{2\sin\frac{\pi}{10}\cos\frac{\pi}{10}}{\sin\frac{\pi}{10}}$

$= 2\cos\frac{\pi}{10}$

$= 2\sin\frac{2\pi}{5}$

8. [출제의도] 주기함수와 연속함수의 정의를 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.

i) 함수 $f(x)$가 $x = 1$에서 연속이므로

$\lim_{x \to 1-0}(2x + a) = \lim_{x \to 1+0}(x^2 + bx + 3)$

$2 + a = 1 + b + 3$

따라서 $a - b = 2$

ii) $f(x+5) = f(x)$이므로

$f(3) = f(-2)$

$3^2 + 3b + 3 = 2 \times (-2) + a$

따라서 $a - 3b = 16$

i), ii)에 의하여 $a = -5, \ b = -7$

$\therefore \ f(x) = \begin{cases} 2x - 5 & (-2 \le x < 1) \\ x^2 - 7x + 3 & (1 \le x \le 3) \end{cases}$

$f(2011) = f(402 \times 5 + 1)$

$= f(1) = 1 - 7 + 3 = -3$

9. [출제의도] 상용로그의 지표와 가수의 성질을 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.

(가)에서 3은 한 자리의 양의 정수이므로 $f(3) = 0$, 2011은 네 자리의 양의 정수이므로 $f(2011) = 3$

$f(n) = 1$ 또는 $f(n) = 2$이다.

(나)에서 주어진 식의 좌변을 인수분해하면

$\{g(n) - \log 2\}\{g(n) - \log 5\} < 0$

$\therefore \ \log 2 < g(n) < \log 5$

이때 $\log n = f(n) + g(n)$이므로

i) $f(n) = 1$일 때 $1 + \log 2 < f(n) + g(n) < 1 + \log 5$

$\therefore \ \log 20 < \log n < \log 50$

따라서 양의 정수 n은 $21, 22, \cdots, 49$로 29개다.

ii) $f(n) = 2$일 때 $2 + \log 2 < f(n) + g(n) < 2 + \log 5$

$\therefore \ \log 200 < \log n < \log 500$

따라서 양의 정수 n은 $201, 202, \cdots, 499$로 299개다.

i), ii)에 의하여 양의 정수 n의 개수는 $29 + 299 = 328$이다.

10. [출제의도] 로그방정식의 해를 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

로그의 진수조건에 의하여

$x > 0, \ y > 3$

그런데 행렬 A의 역행렬이 존재하지 않으므로

$\log_2(x+1) + \log_2(y-3) = 0$

$\log_2(x+1)(y-3) = 0$

$(x+1)(y-3) = 1$

$\therefore xy - 3x + y - 4 = 0 \quad \cdots$ ㉠

또, 행렬 B의 역행렬이 존재하지 않으므로

$(1 + \log_3 x) - \log_3 y = 0$

$\log_3 \frac{3x}{y} = 0$

$\therefore \ \frac{3x}{y} = 1$

$\therefore \ y = 3x \quad \cdots$ ㉡

㉠과 ㉡을 연립하면

$\therefore \ xy = 4$

11. [출제의도] 행렬의 연산에 대한 성질을 이용하여 계산할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$A(-B)=E$ 이므로 $A^{-1}=-B$

$BA=-A^{-1}A=-E=AB$

ㄱ. $A^2+B^2=(A+B)^2-AB-BA$

$=3E$ (참)

ㄴ. 모든 자연수 n 에 대하여

$A^{n+2}+B^{n+2}$

$=(A^{n+1}+B^{n+1})(A+B)-A^{n+1}B-B^{n+1}A$

$=A^{n+1}+B^{n+1}-A^nAB-B^nBA$

$=A^{n+1}+B^{n+1}+A^n+B^n$ (참)

ㄷ. ㄴ을 이용해서

$A^3+B^3=A^2+B^2+A+B=3E+E=4E$

$A^4+B^4=A^3+B^3+A^2+B^2=4E+3E=7E$

$A^5+B^5=A^4+B^4+A^3+B^3=7E+4E=11E$

$\vdots$

$A^9+B^9=A^8+B^8+A^7+B^7=76E$ (참)

[다른 풀이]

ㄱ. $B=E-A$ 이므로

$AB=A(E-A)=A-A^2=-E$ 에서

$A^2=A+E$ … ㉠

같은 방법으로

$B^2=B+E$ … ㉡

그러므로

$A^2+B^2=A+E+B+E$

$=(A+B)+2E=3E$

ㄴ. ㉠의 양변에 A^n을 곱하면

$A^{n+2}=A^{n+1}+A^n$ … ㉢

㉡의 양변에 B^n을 곱하면

$B^{n+2}=B^{n+1}+B^n$ … ㉣

㉢과 ㉣에서

$A^{n+2}+B^{n+2}=A^{n+1}+B^{n+1}+A^n+B^n$

12. [출제의도] 분수방정식의 근을 구하는 과정을 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.

$\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}=\frac{a}{2x^2}$ 의 양변에

분모의 최소공배수 $2x^2(x-1)(x+1)$을 곱하면

$2x^2(x+1)-2x^2(x-1)=a(x^2-1)$

$4x^2=ax^2-a$

$(a-4)x^2=a$

ⅰ) $a=4$인 경우

$0\cdot x^2=4$이므로 해가 존재하지 않는다.

ⅱ) $a\neq 4$인 경우

$x^2=\frac{a}{a-4}$ … ㉠

(1) $\frac{a}{a-4}\geq 0$이면 실근이 존재하지만

이 해가 모두 무연근이어야 하므로

㉠에서 $x=0$이면 $a=0$

㉠에서 $x=-1$ 또는 $x=1$이면 $a-4=a$이므로

실수 a가 존재하지 않는다.

(2) $\frac{a}{a-4}<0$이면 실근이 존재하지 않으므로

$a(a-4)<0$

$0<a<4$

따라서 정수 a는 $1, 2, 3$이다.

ⅰ), ⅱ)에서 정수 a는 $0, 1, 2, 3, 4$로 5개다.

13. [출제의도] 로그함수를 이용하여 실생활 문제를 해결할 수 있는가를 묻는 문제이다.

ㄱ. $T=0$ 일 때 $P=4.8$ 이므로 $a+\frac{b}{c}=\log 4.8$ 이다.

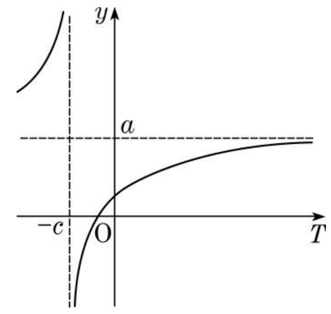
그런데 $\log 4<\log 4.8<\log 5$ 에서

$2\log 2<\log 4.8<1-\log 2$ 이므로

$0.602<a+\frac{b}{c}<0.699$ (참)

ㄴ. $y=\log P$ 라 하면 $y=a+\frac{b}{c+T}$ 의 그래프는 점근선이 $T=-c$, $y=a$ 이다. 그런데 주어진 표를 이용하면 T 의 값이 증가할 때 y의 값도 증가하므로 분수함수의 그래프는 그림과 같아야 한다.

$\therefore\ b<0$ (참)



ㄷ. ㄴ의 $y=a+\frac{b}{c+T}$ 의 그래프에서 $T>-c$ 인 모든 실수 T에 대하여 $y<a$이다.

$\therefore\ \log P<a$

따라서 $P<10^a$ 이다. (참)

14. [출제의도] 지수함수를 이해하고 지수방정식의 해를 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$\mathrm{P}(k, a^k)$, $\mathrm{Q}(k, a^{2k})$, $\mathrm{R}(k, k)$ 라 하면

$k=2$ 일 때 $a^{2k}=k$ 이므로 $a^4=2$

$\therefore\ a=\sqrt[4]{2}$ ($\because\ a>1$)

$\therefore\ a^x=2^{\frac{x}{4}}$, $a^{2x}=2^{\frac{x}{2}}$

ㄱ. $k=4$ 이면 $(\sqrt[4]{2})^8=4$ 이므로 $a^{2k}=k$ 이다.

따라서 점 Q와 점 R는 일치한다. (참)

ㄴ. $\overline{\mathrm{PQ}}=\left|2^{\frac{k}{2}}-2^{\frac{k}{4}}\right|=12$ 이다.

이때 $2^{\frac{k}{4}}=t\ (t>0)$라 하면

$t^2-t=12$ 또는 $t^2-t=-12$ 이다.

ⅰ) $t^2-t=12$ 인 경우 $(t-4)(t+3)=0$ 에서

$t>0$이므로 $t=4$

$\therefore\ 2^{\frac{k}{4}}=4$

$\therefore\ \frac{k}{4}=2$

$\therefore\ k=8$

ⅱ) $t^2-t=-12$ 인 경우 $t^2-t+12=0$ 의 판별식이 음수이므로 $t>0$ 조건을 만족시키는 실수 t 가 존재하지 않는다. 따라서, k도 존재하지 않는다.

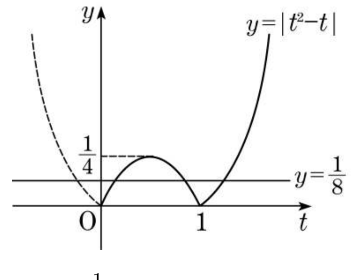
ⅰ), ⅱ)에 의하여 $k=8$ 이므로 $\mathrm{Q}(8, 16)$, $\mathrm{R}(8, 8)$

$\therefore\ \overline{\mathrm{QR}}=8$ (참)

ㄷ. $\overline{\mathrm{PQ}}=\left|2^{\frac{k}{2}}-2^{\frac{k}{4}}\right|$ 에서 $2^{\frac{k}{4}}=t\ (t>0)$라 하면

$\overline{\mathrm{PQ}}=|t^2-t|$ 이다.

이때 $y=|t^2-t|=\left|\left(t-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}\right|$의 그래프는 다음과 같다.



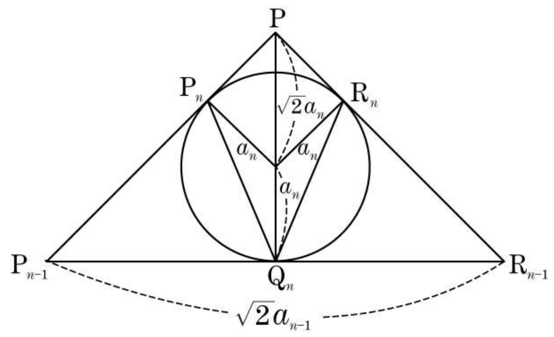
따라서 $\overline{\mathrm{PQ}}=\frac{1}{8}$ 을 만족시키는 양의 실수 t의 값은 3개이므로 실수 k 의 값도 3 개이다. (거짓)

15. [출제의도] 무한등비급수를 활용하여 수학내적문제를 해결할 수 있는가를 묻는 문제이다.

삼각형 PQR 의 내접원의 반지름을 a_1이라 하면

$\sqrt{2}a_1+a_1=\sqrt{2}$ 에서 $a_1=2-\sqrt{2}$ 이고

$S_1=\frac{1}{2}\times(2\sqrt{2}-2)\times 1=\sqrt{2}-1$



삼각형 $\mathrm{PP}_{n-1}\mathrm{R}_{n-1}$의 내접원의 반지름을 a_n이라 하면

$\sqrt{2}a_n+a_n=\frac{\sqrt{2}a_{n-1}}{2}$

$\therefore\ a_n=\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}a_{n-1}$

따라서 수열 $\{a_n\}$ 이 공비가 $\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}$인 등비수열을 이루므로 수열 $\{S_n\}$은 공비가 $\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}\right)^2=\frac{3-2\sqrt{2}}{2}$ 인 등비수열을 이룬다.

$\therefore\ \sum_{n=1}^{\infty}S_n=\frac{\sqrt{2}-1}{1-\frac{3-2\sqrt{2}}{2}}=\frac{6-2\sqrt{2}}{7}$

$\therefore\ p+q=\frac{4}{7}$

16. [출제의도] 함수의 연속의 정의를 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.

ㄱ. $\lim_{x\to -0}f(x)=-1$ (참)

ㄴ. $\lim_{x\to 1-0}\{f(x)+g(x)\}=(-1)+1=0$이고

$\lim_{x\to 1+0}\{f(x)+g(x)\}=1+(-1)=0$이므로

$\lim_{x\to 1}\{f(x)+g(x)\}=0$이다.

$x=1$에서 함숫값 $f(1)+g(1)=0$이다.

$\lim_{x\to 1}\{f(x)+g(x)\}=f(1)+g(1)$이므로

$f(x)+g(x)$는 $x=1$에서 연속이다. (참)

ㄷ. (반례) $\lim_{x\to 1-0}(f\circ g)(x)=\lim_{x\to 1-0}f(x)=-1$이고

$\lim_{x\to 1+0}(f\circ g)(x)=\lim_{x\to -1+0}f(x)=-1$이므로

$\lim_{x\to 1}(f\circ g)(x)=-1$,

$(f\circ g)(1)=f(g(1))=f(0)=0$이다.

따라서 $\lim_{x\to 1}(f\circ g)(x)\neq(f\circ g)(1)$이므로

함수 $(f\circ g)(x)$는 $x=1$에서 불연속이다. (거짓)

17. [출제의도] 수학적 귀납법을 이용한 증명을 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.

$\sum_{i=1}^{2k+1}(i+k^2)$

$=\sum_{i=1}^{2k-1}(i+k^2)+\sum_{i=2k}^{2k+1}(i+k^2)$

$=\sum_{i=1}^{2k-1}(i+k^2)+(2k+k^2)+(2k+1+k^2)$

$=\sum_{i=1}^{2k-1}\{i+(k-1)^2+(2k-1)\}+(2k^2+4k+1)$

$=\sum_{i=1}^{2k-1}\{i+(k-1)^2\}+\sum_{i=1}^{2k-1}(2k-1)+(2k^2+4k+1)$

이므로 $f(k)=2k^2+4k+1$이다.

한편

$\sum_{i=1}^{2k-1}\{i+(k-1)^2\}+\sum_{i=1}^{2k-1}(2k-1)+(2k^2+4k+1)$

$=(k-1)^3+k^3+\sum_{i=1}^{2k-1}(2k-1)+(2k^2+4k+1)$

$=(k-1)^3+k^3+(2k-1)^2+(2k^2+4k+1)$

$=k^3-3k^2+3k-1+k^3+4k^2-4k+1+2k^2+4k+1$

$= k^3+k^3+3k^2+3k+1$

$= k^3+(k+1)^3$

그러므로 $g(k)=k^3+(k+1)^3$이다.

$\therefore \ \dfrac{g(4)}{f(4)}=\dfrac{189}{49}=\dfrac{27}{7}$

18. [출제의도] 함수에서 접선의 뜻을 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.

두 접점의 좌표를

$\mathrm{P}(\alpha,\ \alpha^3-3\alpha^2+2\alpha)$, $\mathrm{Q}(\beta,\ \beta^3-3\beta^2+2\beta)$라 하면

ㄱ. $y'=3x^2-6x+2$이므로 기울기가 m인 접선의 두 접점의 x좌표는 $3x^2-6x+2-m=0$을 만족하므로 $\alpha+\beta=2$이다. (참)

ㄴ. 기울기가 m인 접선의 두 접점이 존재하므로 α, β는 서로 다른 실수이다.

$3x^2-6x+2-m=0$ 이 서로 다른 실근을 가지므로

$3^2-3(2-m)>0$

$\therefore\ m>-1$ (참)

ㄷ. 두 접선은 평행하므로 두 접선 사이의 거리가 $\overline{\mathrm{PQ}}$가 되기 위해서는 두 접점 P, Q를 지나는 직선과 접선이 수직이어야 한다. 즉, 기울기의 곱은 -1이다.

$m\times\dfrac{(\alpha^3-3\alpha^2+2\alpha)-(\beta^3-3\beta^2+2\beta)}{\alpha-\beta}=-1$

$m\{\alpha^2+\beta^2+\alpha\beta-3(\alpha+\beta)+2\}=-1$

$m\{(\alpha+\beta)^2-\alpha\beta-3(\alpha+\beta)+2\}=-1$

그런데, α, β는 $3x^2-6x+2-m=0$ 의 두 근이므로 근과 계수와의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=2$, $\alpha\beta=\dfrac{2-m}{3}$

$\therefore\ m\left(\dfrac{2-m}{3}\right)=1$

$\therefore\ m^2-2m+3=0$

판별식 $\dfrac{D}{4}=1^2-3=-2<0$이므로 실수 m이 존재하지 않는다.

따라서 두 접선 사이의 거리와 $\overline{\mathrm{PQ}}$가 같아지는 실수 m은 존재하지 않는다. (거짓)

19. [출제의도] 수열의 규칙성을 찾고 수열의 극한을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

n 행에 있는 유리수들은

$$\frac{1}{2^n},\ \frac{3}{2^n},\ \frac{5}{2^n},\ \cdots,\ \frac{2^n-1}{2^n}$$

이고, 분자를 나열한 수열이 첫째항이 1 이고 공차가 2 인 등차수열이므로 n 행의 총 항수를 k 라 하면 $2k-1=2^n-1$에서 $k=2^{n-1}$ 이다.

$\therefore\ a_n=\dfrac{2^n-1}{2^n}$

$\therefore\ b_n=\dfrac{1}{2^n}\times\dfrac{2^{n-1}\{1+(2^n-1)\}}{2}=\dfrac{2^n}{4}$

$\therefore\ \displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{(2^n+1)a_n}$

$=\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2^n}{4}}{(2^n+1)\frac{2^n-1}{2^n}}$

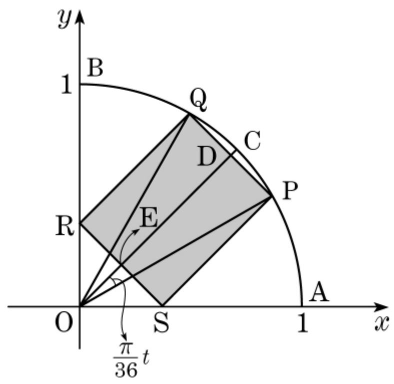
$=\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2^n\times2^n}{4(2^n+1)(2^n-1)}$

$=\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{4^n}{4(4^n-1)}$

$=\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{4\left\{1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right\}}=\frac{1}{4}$

20. [출제의도] 도형의 넓이의 순간변화율을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

내접하는 사각형의 x축, y축 위의 두 꼭짓점을 각각 S, R라 하고 선분 OC와 선분 PQ, 선분 RS의 교점을 각각 D, E라 하자.



삼각형 DOP에서

$\overline{\mathrm{DP}}=\overline{\mathrm{OP}}\sin\dfrac{\pi}{36}t=\sin\dfrac{\pi}{36}t$

$\overline{\mathrm{OD}}=\overline{\mathrm{OP}}\cos\dfrac{\pi}{36}t=\cos\dfrac{\pi}{36}t$

$\angle\mathrm{EOS}=\dfrac{\pi}{4}$이므로 $\overline{\mathrm{OE}}=\overline{\mathrm{ES}}\,(=\overline{\mathrm{DP}})$

이다. 그러므로 □PQRS의 넓이 $S(t)$는

$S(t)=\overline{\mathrm{PQ}}\cdot\overline{\mathrm{PS}}$

$=2\overline{\mathrm{DP}}\cdot(\overline{\mathrm{OD}}-\overline{\mathrm{OE}})$

$=2\sin\dfrac{\pi}{36}t\left(\cos\dfrac{\pi}{36}t-\sin\dfrac{\pi}{36}t\right)$

$=2\sin\dfrac{\pi}{36}t\cos\dfrac{\pi}{36}t-2\sin^2\dfrac{\pi}{36}t$

$=\sin\dfrac{\pi}{18}t-2\sin^2\dfrac{\pi}{36}t$

$S'(t)=\dfrac{\pi}{18}\left(\cos\dfrac{\pi}{18}t-2\sin\dfrac{\pi}{36}t\cos\dfrac{\pi}{36}t\right)$

$=\dfrac{\pi}{18}\left(\cos\dfrac{\pi}{18}t-\sin\dfrac{\pi}{18}t\right)$

$S'(6)=\dfrac{\pi}{18}\left(\cos\dfrac{\pi}{3}-\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$

$=\dfrac{1-\sqrt{3}}{36}\pi$

21. [출제의도] 수열의 일반항을 추론할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$a_n=\overline{\mathrm{OP}_n}$이라 하자.

$y_n=a_n\sin\dfrac{n-1}{3}\pi$에서

$y_1=0$, $y_2>0$, $y_3>0$, $y_4=0$, $y_5<0$, $y_6<0$, $y_7=0$, $\cdots$ 으로 y_n의 부호가 주기적으로 바뀐다.

따라서 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 몇 개의 항을 구하면

$a_1=1$ $\quad a_2=1$ $\quad a_3=\dfrac{1}{2}$

$a_4=\left(\dfrac{1}{2}\right)^2$ $\quad a_5=\left(\dfrac{1}{2}\right)^2$ $\quad a_6=\left(\dfrac{1}{2}\right)^2\left(\dfrac{4}{3}\right)$

$a_7=\left(\dfrac{1}{2}\right)^2\left(\dfrac{4}{3}\right)^2$ $\quad a_8=\left(\dfrac{1}{2}\right)^2\left(\dfrac{4}{3}\right)^2$ $\quad\cdots$

으로 동경 OP_1에서 동경 OP_7까지 동경이 2π만큼 회전하면 a_7은 a_1의 $\left(\dfrac{1}{2}\right)^2\left(\dfrac{4}{3}\right)^2$배이다.

즉, 2π만큼씩 회전할 때마다 그 이전 길이의 $\left(\dfrac{1}{2}\right)^2\left(\dfrac{4}{3}\right)^2=\left(\dfrac{2}{3}\right)^2$배가 된다.

$a_{n+6}=\left(\dfrac{2}{3}\right)^2a_n$인 관계가 성립하므로

$a_{50}=\left(\dfrac{2}{3}\right)^2a_{44}=\cdots=\left(\dfrac{2}{3}\right)^{16}a_2=\left(\dfrac{2}{3}\right)^{16}$

22. [출제의도] 거듭제곱근의 계산을 할 수 있는가를 묻는 문제이다.

(좌변)$=\sqrt[n]{2}\times\sqrt[n]{8}=\sqrt[n]{16}$

(우변)$=\sqrt[8]{2}=\sqrt[8\times4]{2^4}=\sqrt[32]{16}$

따라서 $n=32$이다.

[다른 풀이]

$2^{\frac{1}{n}}\times2^{\frac{3}{n}}=2^{\frac{4}{n}}=2^{\frac{1}{8}}$

따라서 $\dfrac{4}{n}=\dfrac{1}{8}$이므로 $n=32$이다.

23. [출제의도] 무리방정식의 해를 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$3^x=t\,(t>0)$라 하면 $t-\sqrt{t+2}=4$

$\therefore\ t-4=\sqrt{t+2}\ \ (t>4)$

양변을 제곱하여 정리하면

$t^2-9t+14=0$

$(t-2)(t-7)=0$, $t=2,\ 7$

$\therefore t=7\ \ (\because t>4)$

$3^\alpha=7$

$\therefore 9^\alpha=(3^\alpha)^2=49$

24. [출제의도] 삼각함수의 합성을 이용하여 최댓값을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$\sin\alpha+\cos\alpha+\sin\beta+\cos\beta$

$=\sqrt{2}\sin\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)+\sqrt{2}\sin\left(\beta+\dfrac{\pi}{4}\right)$

$=\sqrt{2}\left\{\sin\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)+\sin\left(\beta+\dfrac{\pi}{4}\right)\right\}$

$=2\sqrt{2}\sin\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)\cos\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right)$

$=2\sqrt{2}\sin\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)\cos\dfrac{\pi}{6}$

$=\sqrt{6}\sin\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)$

그러므로 $\sin\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)=1$일 때

최댓값 $M=\sqrt{6}$이고, $M^2=6$

[참고]

$\alpha=\dfrac{5}{12}\pi$이고 $\beta=\dfrac{\pi}{12}$일 때

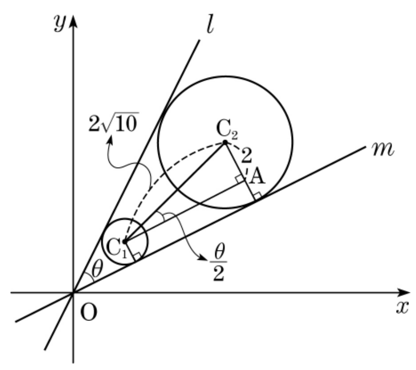
두 식 $\dfrac{\alpha+\beta}{2}=\dfrac{\pi}{4}$과 $\dfrac{\alpha-\beta}{2}=\dfrac{\pi}{6}$를 만족시킨다.

25. [출제의도] 삼각함수와 관련된 수학내적문제를 해결할 수 있는가를 묻는 문제이다.

그림에서 $\overline{\mathrm{AC_2}}=2$, $\overline{\mathrm{C_1C_2}}=2\sqrt{10}$이므로

$\overline{\mathrm{AC_1}}=\sqrt{(2\sqrt{10})^2-2^2}=\sqrt{36}=6$

$\angle\mathrm{C_2C_1A}=\dfrac{\theta}{2}$이므로 $\tan\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{2}{6}=\dfrac{1}{3}$



$\tan\theta=\dfrac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}$

$=\dfrac{\frac{2}{3}}{1-\frac{1}{9}}=\dfrac{3}{4}$

$\therefore 120\tan\theta=90$

26. [출제의도] 미분계수의 정의를 이용하여 미분계수를 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$y=0$ 을 대입하면

$f(x)=f(x)f(0)+4f(x)+4f(0)+12$

$\{f(x)+4\}\{f(0)+3\}=0$

$f(0)=-3$

$f'(x)=\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$=\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{f(x)f(h)+4f(x)+4f(h)+12-f(x)}{h}$

$=\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{f(x)f(h)+3f(x)+4f(h)+12}{h}$

$=\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{\{f(x)+4\}\{f(h)+3\}}{h}$

$=\{f(x)+4\}\lim_{h\to 0}\frac{f(h)+3}{h}$

$=\{f(x)+4\}\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}$

$=\{f(x)+4\}f'(0)$

$=2\{f(x)+4\}$

$\therefore f'(\ln 2)=2\{f(\ln 2)+4\}=8$

[다른 풀이]

(가)에서 양변에 4를 더하여 인수분해하면

$f(x+y)+4=\{f(x)+4\}\{f(y)+4\}$

$f(x)+4=g(x)$라 하면

$g(x+y)=g(x)g(y)$ …㉠

㉠에서 $y=0$이라 하면

$g(x)=g(x)g(0)$

$g(x)\{1-g(0)\}=0$

$g(0)=1$

$f'(x)=g'(x)$

$=\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{g(x)g(h)-g(x)}{h}$

$=g(x)\lim_{h\to 0}\frac{g(h)-1}{h}$

$=g(x)\lim_{h\to 0}\frac{g(h)-g(0)}{h}$

$=g(x)\,g'(0)$ ($\because g'(0)=f'(0)=2$)

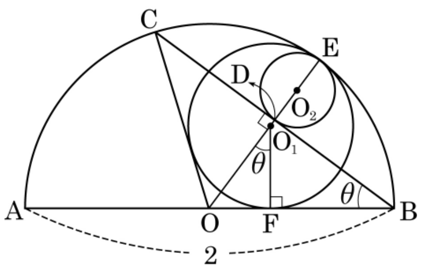
$=2g(x)=2\{f(x)+4\}$

따라서

$f'(\ln 2)=2\{f(\ln 2)+4\}=2\times 4=8$

27. [출제의도] 삼각함수의 극한값을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

점 O_1에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 F, 직선 O_1O_2와 현 BC, 호 BC의 교점을 각각 D, E라 하자.



$\overline{O_1F}=\overline{O_1E}=f(\theta)$, $\angle OO_1F=\theta$

$\overline{OE}=\overline{OO_1}+\overline{O_1E}=\frac{f(\theta)}{\cos\theta}+f(\theta)=1$

$f(\theta)=\frac{\cos\theta}{1+\cos\theta}$

$\overline{OD}=\sin\theta$, $\overline{ED}=1-\sin\theta$ 이므로

$g(\theta)=\frac{1-\sin\theta}{2}$

$$\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}-0}\frac{g(\theta)}{\{f(\theta)\}^2}=\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}-0}\frac{\frac{1-\sin\theta}{2}}{\left(\frac{\cos\theta}{1+\cos\theta}\right)^2}$$

$$=\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}-0}\frac{(1-\sin\theta)(1+\cos\theta)^2}{2\cos^2\theta}$$

$\frac{\pi}{2}-\theta=t$라 하면, $\theta=\frac{\pi}{2}-t$이고

$\sin\theta=\sin\left(\frac{\pi}{2}-t\right)=\cos t$, $\cos\theta=\cos\left(\frac{\pi}{2}-t\right)=\sin t$

$\theta\to\frac{\pi}{2}-0$일때 $t\to+0$이다.

(주어진 식) $=\lim_{t\to+0}\frac{(1-\cos t)(1+\sin t)^2}{2\sin^2 t}$

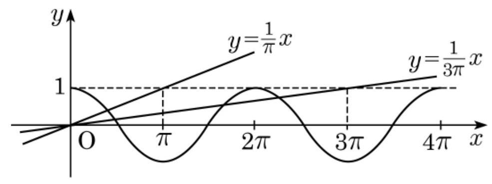
$=\lim_{t\to+0}\frac{(1-\cos t)(1+\sin t)^2}{2(1-\cos^2 t)}$

$=\lim_{t\to+0}\frac{(1+\sin t)^2}{2(1+\cos t)}$

$=\frac{1}{4}=\frac{q}{p}$

따라서 $p=4$, $q=1$ 이므로 $p^2+q^2=17$이다.

28. [출제의도] 무한급수의 합을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.



그림에서 $a_n=2n-1(n\geq 1)$

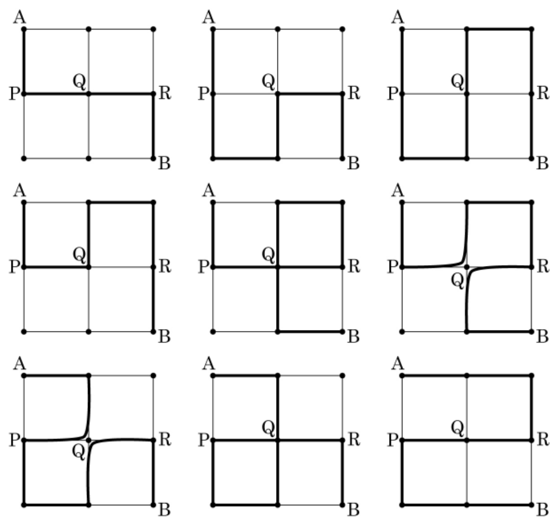
$\sum_{n=1}^{24}\frac{500}{(a_n+1)(a_n+3)}=\sum_{n=1}^{24}\frac{500}{2n(2n+2)}$

$=\sum_{n=1}^{24}\frac{125}{n(n+1)}$

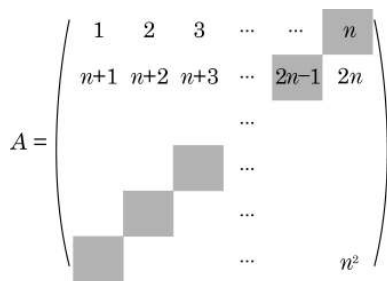
$=125\sum_{n=1}^{24}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=120$

29. [출제의도] 그래프의 경로를 이해하는가를 묻는 문제이다.

그림과 같이 P,Q,R 순으로 지나는 경로가 4개, P,Q,R,Q 순으로 지나는 경로가 2개, Q,P,Q,R 순으로 지나는 경로가 2개, R,Q,P 순으로 지나는 경로가 1개로 모두 9개다.



30. [출제의도] 수열의 규칙성을 찾아 수열의 극한값을 계산할 수 있는가를 묻는 문제이다.



$f(k)=(k-1)n+n-k+1$

$=(n-1)k+1$

이므로

$\sum_{k=1}^{n}f(k)=\sum_{k=1}^{n}\{(n-1)k+1\}$

$=(n-1)\frac{n(n+1)}{2}+n$

$=\frac{1}{2}n(n^2+1)$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{12\sum_{k=1}^{n}f(k)}{n^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{6n(n^2+1)}{n^3}=6$$

수리'나'형 정답

1	④	2	②	3	①	4	④	5	①
6	⑤	7	③	8	①	9	②	10	②
11	⑤	12	③	13	⑤	14	②	15	④
16	④	17	⑤	18	③	19	①	20	③
21	②	22	32	23	105	24	97	25	65
26	5	27	570	28	120	29	9	30	6

해 설

1~2. '가'형과 동일

3. [출제의도] 수열의 극한을 계산할 수 있는가를 묻는 문제이다.

모든 자연수 n에 대하여 $\cos n\pi=(-1)^n$ 이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+n\cos n\pi}{n^2+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n}\cos n\pi}{1+\frac{1}{n^2}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{(-1)^n}{n}}{1+\frac{1}{n^2}}=1$$

[다른 풀이]

모든 자연수 n에 대하여 $-1\leq\cos n\pi\leq 1$ 이므로

$-\frac{n}{n^2+1}\leq\frac{n}{n^2+1}\cos n\pi\leq\frac{n}{n^2+1}$

그런데 $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n^2+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n^2}}=0$ 이므로

$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n^2+1}\cos n\pi=0$

또, $\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{n^2}}=1$

$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{n(n+\cos n\pi)}{n^2+1}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2+1}+\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n^2+1}\cos n\pi$

$=1$

4. [출제의도] 지수법칙을 이해하여 주어진 식의 값을 계산할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$3^x=t$ 라 하면 $t>0$ 이고

$3^{1-x}=\frac{3}{3^x}=\frac{3}{t}$, $9^x=3^{2x}=t^2$, $9^{1-x}=\frac{9}{9^x}=\frac{9}{t^2}$

$\therefore\ 9^x+9^{1-x}=t^2+\frac{9}{t^2}=\left(t+\frac{3}{t}\right)^2-2\cdot t\cdot\frac{3}{t}$

$=10^2-6=94$

[참고]

산술평균과 기하평균 사이의 관계에 의해

모든 실수 x에 대하여

$3^x+3^{1-x}\geq 2\sqrt{3^{x+(1-x)}}=2\sqrt{3}$

5. [출제의도] 그래프를 행렬로 나타낼 수 있는가를 묻는 문제이다.

그래프의 꼭짓점 사이의 연결 관계를 행렬로 나타내었을 때, 행렬의 모든 성분의 합은 그래프의 변의 개수의 2배이다. 주어진 그래프의 변의 개수가 7이므로 성분의 합은 14이다.

[다른 풀이]

구하는 행렬은

$$\begin{pmatrix}0&0&1&1&1\\0&0&1&1&1\\1&1&0&1&0\\1&1&1&0&0\\1&1&0&0&0\end{pmatrix}$$

이므로 모든 성분의 합은 14이다.

6. **[출제의도] 로그의 성질을 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.**

$\log_a 2 = \log_b 5 = \log_c 10 = \log_{abc} x = \dfrac{1}{k}$ 이라고 하면,

$\log_2 a = \log_5 b = \log_{10} c = \log_x abc = k$ 이다. 따라서,

$a = 2^k$, $b = 5^k$, $c = 10^k$ 이므로 $ab = c$ 이다.

$\therefore\ k = \log_x abc = \log_x c^2$

이때, $k = \log_x c^2 = \log_x 10^{2k} = k\log_x 100$ 이므로

$x = 100$

[다른 풀이]

$\dfrac{\log 2}{\log a} = \dfrac{\log 5}{\log b} = \dfrac{\log 10}{\log c} = \dfrac{\log 2 + \log 5 + \log 10}{\log a + \log b + \log c}$

$= \dfrac{\log 100}{\log abc} = \log_{abc} 100$

$\therefore\ x = 100$

7. **[출제의도] 행렬을 이용하여 연립일차방정식의 해를 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.**

$\begin{pmatrix}5&2\\2&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}k&0\\0&k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$를 정리하면

$\begin{pmatrix}5-k&2\\2&5-k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

행렬 $\begin{pmatrix}5-k&2\\2&5-k\end{pmatrix}$의 역행렬이 존재하지 않으므로

$(5-k)^2 - 2^2 = 0 \qquad \therefore\ k = 3,\ 7$

따라서 모든 상수 k의 합은 10이다.

8. **[출제의도] 로그의 성질을 이용하여 수의 대소를 비교할 수 있는가를 묻는 문제이다.**

$c = \dfrac{x+1}{x}$이라 하면 $\log_a c > \log_b c > 0$이다.

$\dfrac{1}{\log_c a} > \dfrac{1}{\log_c b} > 0$이므로 $0 < \log_c a < \log_c b$이다.

그런데 $c > 1$이므로 $1 < a < b$이다.

9~11. '가'형과 동일

12. **[출제의도] 무한등비급수의 합을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.**

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r라 하면

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{1}{1-r} = 3$이므로 $r = \dfrac{2}{3}$이다.

수열 $\{a_{3n-2}\}$는 첫째항이 1이고 공비가 $\dfrac{8}{27}$인 등비수열이고

수열 $\{a_{3n-1}\}$은 첫째항이 $\dfrac{2}{3}$이고 공비가 $\dfrac{8}{27}$인 등비수열이다. 따라서

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_{3n-2} - a_{3n-1}) = \frac{1}{1-\frac{8}{27}} - \frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{8}{27}} = \frac{9}{19}$$

13~15. '가'형과 동일

16. **[출제의도] 수열의 규칙성을 찾고 수열의 극한값을 계산할 수 있는가를 묻는 문제이다.**

$a_n = \overline{\mathrm{OA}_n}$, $b_n = \overline{\mathrm{OB}_n}$이라 하면

$a_n = 1 + (n-1)a$, $b_n = 1 + (n-1)b$이므로

$S_n = \dfrac{1}{2}a_n b_n \sin\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{4}(an+1-a)(bn+1-b)$

이다. 그런데

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{3}}{4}\left(a + \frac{1-a}{n}\right)\left(b + \frac{1-b}{n}\right)$

$= \dfrac{\sqrt{3}}{4}ab = 5\sqrt{3}$

이므로 $ab = 20$이다. 따라서 양의 정수 a, b의 순서쌍 (a, b)의 개수는 6이다.

17. '가'형과 동일

18. **[출제의도] 수열의 귀납적 정의를 이해하여 수열의 합을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.**

$a_n = 3^{n-1}$, $b_n = n(n-1)\cdot\cdots\cdot 2\cdot 1 = n!$

$1 \le n \le 4$ 일 때 $a_n \ge b_n$이므로 $c_n = b_n$

$n \ge 5$일 때 $a_n < b_n$이므로 $c_n = a_n$

n	1	2	3	4	5	$\cdots$
a_n	1	3	9	27	81	$\cdots$
b_n	1	2	6	24	120	$\cdots$
c_n	1	2	6	24	81	$\cdots$

$\displaystyle\therefore \sum_{n=1}^{50} 2c_n = 2\left(\sum_{n=1}^{4} n! + \sum_{n=5}^{50} 3^{n-1}\right)$

$= 2\left\{1+2+6+24+\dfrac{3^4(3^{46}-1)}{3-1}\right\}$

$= 3^{50} - 15$

19. '가'형과 동일

20. **[출제의도] 수열을 귀납적인 방법을 이용하여 항의 값을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.**

$a_1 = 1$, $b_1 = 1$ 이고,

$a_{n+1} = a_n + b_n$, $b_{n+1} = a_n$ 이므로

$a_2 = 2$, $b_2 = 1$

$a_3 = 3$, $b_3 = 2$

$a_4 = 5$, $b_4 = 3$

$a_5 = 8$, $b_5 = 5$

$a_6 = 13$, $b_6 = 8$

$a_7 = 21$, $b_7 = 13$

$\therefore a_7 + b_7 = 34$

[다른 풀이]

$a_1 = 1$, $b_1 = 1$ 이고, $a_{n+1} = a_n + b_n$, $b_{n+1} = a_n$ 이므로

$\begin{pmatrix}a_{n+1}\\b_{n+1}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_n\\b_n\end{pmatrix}$로 나타낼 수 있다. 이 때,

$A = \begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}$ 이라 하면,

$A^2 = \begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix}$, $A^3 = \begin{pmatrix}3&2\\2&1\end{pmatrix}$, $A^4 = \begin{pmatrix}5&3\\3&2\end{pmatrix}$,

$A^5 = \begin{pmatrix}8&5\\5&3\end{pmatrix}$, $A^6 = \begin{pmatrix}13&8\\8&5\end{pmatrix}$이므로

$\begin{pmatrix}a_7\\b_7\end{pmatrix} = A^6\begin{pmatrix}a_1\\b_1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}13&8\\8&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}21\\13\end{pmatrix}$

$\therefore a_7 + b_7 = 34$

21~22. '가'형과 동일

23. **[출제의도] 등비수열을 이용하여 등차수열의 합을 계산할 수 있는가를 묻는 문제이다.**

$a_n = 5^n$이므로

$\displaystyle\sum_{n=1}^{20}\log_{25} a_n = \sum_{n=1}^{20}\log_{25} 5^n$

$\displaystyle= \sum_{n=1}^{20}\frac{n}{2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{20(20+1)}{2} = 105$

24. **[출제의도] 계차수열을 이용하여 수열의 극한값을 계산할 수 있는가를 묻는 문제이다.**

$b_n = \dfrac{4}{n(n+2)} = 2\left(\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+2}\right)$

$\displaystyle a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k$

$\displaystyle= a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} 2\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2}\right)$

$= a_1 + 2\left\{\left(1-\dfrac{1}{3}\right) + \left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\dfrac{1}{n-1} - \dfrac{1}{n+1}\right)\right\}$

$= a_1 + 2\left(1 + \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}\right)$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left\{a_1 + 2\left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)\right\}$

$= a_1 + 3 = 100$

이므로 $a_1 = 97$이다.

25. **[출제의도] 수열의 합을 이용하여 수열의 일반항을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.**

$S_n = {}_{n+2}\mathrm{C}_3 = \dfrac{(n+2)(n+1)n}{6}$이다.

$n = 1$일 때, $a_1 = S_1 = 1$이고

$n \ge 2$일 때,

$a_n = S_n - S_{n-1}$

$= \dfrac{(n+2)(n+1)n}{6} - \dfrac{(n+1)n(n-1)}{6}$

$= \dfrac{n(n+1)}{2}$

이므로

$n \ge 1$일 때, $a_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$이다.

$\displaystyle\therefore \sum_{k=1}^{10}(a_{k+1} - a_k)$

$= (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + \cdots + (a_{11} - a_{10})$

$= a_{11} - a_1$

$= 66 - 1 = 65$

[다른 풀이]

$\displaystyle\sum_{k=1}^{10}(a_{k+1} - a_k) = \sum_{k=1}^{10} a_{k+1} - \sum_{k=1}^{10} a_k$

$\displaystyle= \sum_{k=1}^{11} a_k - \sum_{k=1}^{10} a_k - a_1$

$= S_{11} - S_{10} - S_1$

$= {}_{13}\mathrm{C}_3 - {}_{12}\mathrm{C}_3 - {}_3\mathrm{C}_3$

$= {}_{12}\mathrm{C}_2 - {}_3\mathrm{C}_3 = 65$

[참고]

$n \ge 1$이고 $1 \le k \le n$일 때,

${}_{n+1}\mathrm{C}_k = {}_n\mathrm{C}_k + {}_n\mathrm{C}_{k-1}$

26. **[출제의도] 수열의 극한값을 계산할 수 있는가를 묻는 문제이다.**

$A_n = \dfrac{6n(1+6n)}{2} = 3n(6n+1)$

$\displaystyle B_n = A_n - \sum_{k=1}^{2n} 3k$

$= 3n(6n+1) - 3n(2n+1) = 12n^2$

이므로

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{A_n}{B_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{3n(6n+1)}{12n^2} = \frac{3}{2}$

$\therefore p + q = 5$

27. **[출제의도] 수열의 규칙성을 찾고 수열의 합을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.**

$a_n = k$(k는 자연수)라 하면

$k - \dfrac{1}{2} < \sqrt{n} < k + \dfrac{1}{2}$

$k^2 - k + \dfrac{1}{4} < n < k^2 + k + \dfrac{1}{4}$

그런데 n은 자연수이므로 $a_n = k$을 만족하는 n은 $k^2 - k + 1$부터 $k^2 + k$까지 모두 $2k$개다. 즉,

$a_1 = a_2 = 1$

$a_3 = a_4 = a_5 = a_6 = 2$

$a_7 = a_8 = a_9 = a_{10} = a_{11} = a_{12} = 3$

$\vdots$

$a_{73} = a_{74} = \cdots = a_{90} = 9$

$\displaystyle\sum_{n=1}^{90} a_n = 1\cdot 2 + 2\cdot 4 + 3\cdot 6 + \cdots + 9\cdot 18$

$\displaystyle= \sum_{k=1}^{9} k\cdot 2k = 2\sum_{k=1}^{9} k^2$

$= 2\times\dfrac{9\cdot 10\cdot 19}{6} = 570$

[참고]

두 정수 a, b $(a < b)$에 대하여

$a < n < b$을 만족시키는 정수 n의 개수는 $b - a - 1$

$a \le n < b$을 만족시키는 정수 n의 개수는 $b - a$

$a < n \le b$을 만족시키는 정수 n의 개수는 $b - a$

$a \le n \le b$을 만족시키는 정수 n의 개수는 $b - a + 1$

28~30. '가'형과 동일