1. $4^{\frac{3}{2}} \times \log_3 \sqrt{3}$의 값은? [2점]

① 5　　② 4　　③ 3　　④ 2　　⑤ 1

1번 문제부터 보도록 하겠습니다.

$4^{\frac{3}{2}} = 8$ / $\log_3 \sqrt{3} = \frac{1}{2}$

$\rightarrow 8 \times \frac{1}{2} = 4$

그러므로 답은 4 입니다.

2. 두 행렬 $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$에 대하여 행렬 $A(A+B)$의 모든 성분의 합은? [2점]

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

2번문제 입니다.

$A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$　　$A+B=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$

$\Rightarrow\quad A(A+B)=\begin{pmatrix}2 & -2\\ 2 & 2\end{pmatrix}$

그러므로 모든 성분의 합은 4 입니다.

3. $\lim_{n\to\infty}\dfrac{a\times 6^{n+1}-5^n}{6^n+5^n}=4$ 일 때, 상수 a의 값은? [2점]

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{2}{3}$ ④ $\frac{4}{3}$ ⑤ $\frac{3}{2}$

3번문제 입니다.

$$\lim_{n\to\infty}\boxed{\frac{a\times 6^{n+1}-5^n}{6^n+5^n}}=4$$

이부분에서 분자와 분모에 각각 $\frac{1}{6^n}$을 곱해주면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{6a-\left(\frac{5}{6}\right)^n}{1+\left(\frac{5}{6}\right)^n}=4 \Rightarrow 6a=4 \quad a=\frac{2}{3}$$

그러므로 답은 $\boxed{\frac{2}{3}}$ 입니다

4. 지수부등식 $(3^x-5)(3^x-100)<0$을 만족시키는 모든 자연수 x의 값의 합은? [3점]

① 5 ② 7 ③ 9 ④ 11 ⑤ 13

4번문제 입니다

$(3^x-5)(3^x-100)<0$

$\Rightarrow 5<3^x<100$

x는 2, 3, 4 일때 성립합니다. x의합은 $\boxed{9}$ 입니다

5. 두 사건 A와 B는 서로 독립이고,

$$\mathrm{P}(A)=\frac{2}{3},\ \mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)-\mathrm{P}(B)$$

일 때, $\mathrm{P}(B)$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{10}$ ② $\frac{1}{5}$ ③ $\frac{3}{10}$ ④ $\frac{2}{5}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

5번문제 입니다.

A와 B는 독립입니다

그러므로 $P(A)\times P(B)=P(A\cap B)$을 만족해야 합니다.

$P(A\cap B)=P(A)-P(B)$

$\Rightarrow P(A)\times P(B)=P(A)-P(B)$

이때 $P(A)=\frac{2}{3}$ 이므로 $\frac{2}{3}\times P(B)=\frac{2}{3}-P(B)$

$\Rightarrow \frac{5}{3}P(B)=\frac{2}{3}$ $\therefore P(B)=\boxed{\frac{2}{5}}$ 입니다

6. 어느 행사장에는 현수막을 1개씩 설치할 수 있는 장소가 5곳이 있다. 현수막은 A, B, C 세 종류가 있고, A는 1개, B는 4개, C는 2개가 있다. 다음 조건을 만족시키도록 현수막 5개를 택하여 5곳에 설치할 때, 그 결과로 나타날 수 있는 경우의 수는? (단, 같은 종류의 현수막끼리는 구분하지 않는다.)

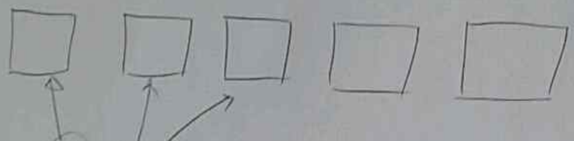
[3점]

(가) A는 반드시 설치한다. (나) B는 2곳 이상 설치한다.

① 55　　② 65　　③ 75　　④ 85　　⑤ 95

6번문제 입니다

문제의 상황을 그림으로 나타내봅시다



A (BBBB, CC

이 네개의 현수막 중에서 2개를 택하여 2장소에 설치 할것입니다

B, B / C, C / B, C 를 설치하는 경우가 있습니다

결국 ① A, B, B, B, B

② A, B, B, C, C ⇒ 이 세가지의 현수막을 택하는 방법이 있습니다

③ A, B, B, B, C

이제 현수막을 5가지 장소에 배열하는 경우를 생각하겠습니다

이때 같은 현수막 끼리는 구분하지 않는 조건이 있음을 유념해야 합니다

⇒ ① $\frac{5!}{4!}$ ② $\frac{5!}{2!\times2!}$ ③ $\frac{5!}{3!}$

⇒ $5+30+20=55$

답은 $\boxed{55}$ 입니다

7. 어느 디자인 공모 대회에 철수가 참가하였다. 참가자는 두 항목에서 점수를 받으며, 각 항목에서 받을 수 있는 점수는 표와 같이 3가지 중 하나이다. 철수가 각 항목에서 점수 A를 받을 확률은 $\frac{1}{2}$, 점수 B를 받을 확률은 $\frac{1}{3}$, 점수 C를 받을 확률은 $\frac{1}{6}$이다. 관람객 투표 점수를 받는 사건과 심사 위원 점수를 받는 사건이 서로 독립일 때, 철수가 받는 두 점수의 합이 70일 확률은? [3점]

항목 \ 점수	점수 A	점수 B	점수 C
관람객 투표	40	30	20
심사 위원	50	40	30

① $\frac{1}{3}$　② $\frac{11}{36}$　③ $\frac{5}{18}$　④ $\frac{1}{4}$　⑤ $\frac{2}{9}$

7번 문제 입니다.

우선 철수가 받는 점수의 합이 70일 경우를 생각해봅시다

우선,

항목 \ 점수	점수 A	점수 B	점수 C
관람객투표	A_1	B_1	C_1
심사위원	A_2	B_2	C_2

라고 가정합시다

점수의 합이 70일 때에는

A_1, C_2 / B_1, B_2 / C_1, A_2 일때 입니다

위에 확률을 구해봅시다.

i) $P(A_1 \cap C_2) = P(A_1) \times P(C_2) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$　ii) $P(B_1 \cap B_2) = P(B_1) \times P(B_2) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$

iii) $P(C_1 \cap A_2) = P(C_1) \times P(A_2) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{12}$　(관람객 투표나 심사위원의 경우는 독립입니다)

$\Rightarrow \frac{1}{12} + \frac{1}{9} + \frac{1}{12} = \frac{5}{18}$　답은 $\boxed{\frac{5}{18}}$ 입니다

8. 확률변수 X의 확률분포표는 다음과 같다.

X	-1	0	1	2	계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{3-a}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3+a}{8}$	$\frac{1}{8}$	1

$\mathrm{P}(0 \leqq X \leqq 2)=\frac{7}{8}$ 일 때, 확률변수 X의 평균 $\mathrm{E}(X)$의 값은?

[3점]

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{3}{8}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{5}{8}$ ⑤ $\frac{3}{4}$

8번 문제입니다.

$$p(0 \le x \le 2) = p(y=0)+p(X=1)+p(X=2) = \frac{7}{8}$$

$$= \frac{1}{8} + \frac{3+a}{8} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$

$$\Rightarrow \frac{5+a}{8} = \frac{7}{8}$$ $\therefore$ $a=2$ 입니다.

평균 $E(X)$의 값은

$$-1\times\frac{1}{8} + 1\times\frac{5}{8} + 2\times\frac{1}{8} = \frac{3}{4}$$

답은 $\boxed{\frac{3}{4}}$ 입니다.

9. 지반의 상대밀도를 구하기 위하여 지반에 시험기를 넣어 조사하는 방법이 있다. 지반의 유효수직응력을 S, 시험기가 지반에 들어가면서 받는 저항력을 R라 할 때, 지반의 상대밀도 D(%)는 다음과 같이 구할 수 있다고 한다.

$$D = -98 + 66\log\frac{R}{\sqrt{S}}$$

(단, S와 R의 단위는 metric ton/m^2이다.)
지반 A의 유효수직응력은 지반 B의 유효수직응력의 1.44배이고, 시험기가 지반 A에 들어가면서 받는 저항력은 시험기가 지반 B에 들어가면서 받는 저항력의 1.5배이다.
지반 B의 상대밀도가 65(%)일 때, 지반 A의 상대밀도(%)는?
(단, $\log 2 = 0.3$으로 계산한다.) [3점]

① 81.5　② 78.2　③ 74.9　④ 71.6　⑤ 68.3

9번문제 입니다.

$S_A = 1.44 S_B$

$R_A = 1.5 R_B$

$D_B = 65$　이 세가지 조건이 주어졌습니다. 여기서 저는 D_A를 구해야 합니다.

$D = -98 + 66\log\frac{R}{\sqrt{S}}$ 에 대입해 봅시다.

우선 B의 상대밀도가 주어졌으므로 B먼저 대입하면 $65 = -98 + 66\log\frac{R_B}{\sqrt{S_B}}$

$\Rightarrow 163 = 66\log\frac{R_B}{\sqrt{S_B}}$ … ①

A로 대입하면 $D_A = -98 + 66\log\frac{R_A}{\sqrt{S_A}}$ $\Rightarrow D_A = -98 + 66\log\frac{1.5R_B}{1.2\sqrt{S_B}}$

$= -98 + 66\log(\frac{5}{4} \times \frac{R_B}{\sqrt{S}})$

$= -98 + 66\log\frac{5}{4} + 66\log\frac{R_B}{\sqrt{S}}$ … ②

$\Rightarrow$ ①을 ②에 대입하면

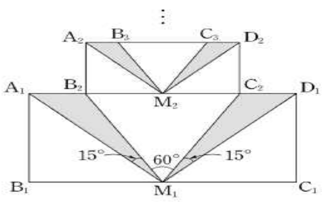
$D_A = -98 + 163 + 66\log\frac{5}{4}$

이때 $\log\frac{5}{4} = \log 5 - \log 4$

$= 1 - 3\log 2$

$= 0.1$　　$\therefore D_A = 71.6$　답은 71.6 입니다

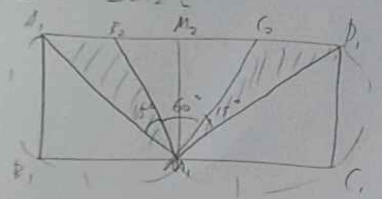
10. $\overline{A_1B_1}=1$, $\overline{B_1C_1}=2$인 직사각형 $A_1B_1C_1D_1$이 있다. 그림과 같이 선분 B_1C_1의 중점을 M_1이라 하고, 선분 A_1D_1 위에 $\angle A_1M_1B_2 = \angle C_2M_1D_1 = 15°$, $\angle B_2M_1C_2 = 60°$가 되도록 두 점 B_2, C_2를 정한다. 삼각형 $A_1M_1B_2$의 넓이와 삼각형 $C_2M_1D_1$의 넓이의 합을 S_1이라 하자.
사각형 $A_2B_2C_2D_2$가 $\overline{B_2C_2} = 2\overline{A_2B_2}$인 직사각형이 되도록 그림과 같이 두 점 A_2, D_2를 정한다. 선분 B_2C_2의 중점을 M_2라 하고, 선분 A_2D_2 위에 $\angle A_2M_2B_3 = \angle C_3M_2D_2 = 15°$, $\angle B_3M_2C_3 = 60°$가 되도록 두 점 B_3, C_3을 정한다. 삼각형 $A_2M_2B_3$의 넓이와 삼각형 $C_3M_2D_2$의 넓이의 합을 S_2라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 얻은 S_n에 대하여 $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 값은? [4점]



① $\frac{2+\sqrt{3}}{6}$　② $\frac{3-\sqrt{3}}{2}$　③ $\frac{4+\sqrt{3}}{9}$　④ $\frac{5-\sqrt{3}}{5}$　⑤ $\frac{7-\sqrt{3}}{8}$

10번문제 입니다

그림으로 그려보면



저는 B_1C_1과 B_2C_2의 관계로 공비를 찾을 것이고
S_1을 구해서 무한등비급수 공식 $\frac{S_1}{1-a}$을 사용 할거입니다

여기서 $\square A_1B_1M_1M_2$와 $\square M_2M_1C_1D_1$는 좌우 대칭입니다.

그러므로 $\angle M_2M_1B_2 = 30°$ / $\angle M_2M_1C_2 = 30°$ 입니다

$\triangle A_1B_2M_1$을 구하기 위해선 밑변 $\overline{A_1B_2}$와 높이 $\overline{M_2M_1}$을 알아야 합니다.
$\overline{A_1M_2}=1$이고 $\overline{B_2M_2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$이므로 $\overline{A_1B_2} = 1-\frac{\sqrt{3}}{3}$, 또 $\overline{M_2M_1}=1$ 입니다.
$\therefore \triangle A_1B_2M_1 = \left(1-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\times 1 \times \frac{1}{2}$

그러므로 $S_1 = 1-\frac{\sqrt{3}}{3}$

공비를 구하면 $(\overline{B_1C_1})^2 : (\overline{B_2C_2})^2 = 2^2 : \left(\frac{2}{3}\sqrt{3}\right)^2$
$= 4 : \frac{12}{9}$
$\Rightarrow r = \frac{1}{3}$

$\therefore \frac{S_1}{1-r} = \boxed{\frac{3-\sqrt{3}}{2}}$

11. 좌표평면에서 지수함수 $y=a^x$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동시킨 후, x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동시킨 그래프가 점 $(1,\ 4)$를 지난다. 양수 a의 값은? [3점]

① $\sqrt{2}$ ② 2 ③ $2\sqrt{2}$ ④ 4 ⑤ $4\sqrt{2}$

11번문제 입니다.

$y=a^x$ 그래프를 y축에 대칭이동시키면

$y=a^{-x}$, 평행이동 시키면 $\underline{y=a^{-(x-3)}+2}$

점$(1,4)$를 지나므로 $4=a^2+2$

$\therefore$ 양수 $a=\boxed{\sqrt{2}}$ 입니다.

12. 1×2행렬을 원소로 갖는 집합 S와 2×1행렬을 원소로 갖는 집합 T가 다음과 같다.

$$S=\{(a\ b)\mid a+b\neq0\},\quad T=\left\{\begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix}\middle|\ pq\neq0\right\}$$

집합 S의 원소 A에 대하여 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. 집합 T의 원소 P에 대하여 PA는 역행렬을 갖지 않는다.

ㄴ. 집합 S의 원소 B와 집합 T의 원소 P에 대하여 $PA=PB$이면 $A=B$이다.

ㄷ. 집합 T의 원소 중에는 $PA\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$을 만족하는 P가 있다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

12번문제입니다.

ㄱ. $P=\begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix}$, $A=(a\ b)$라고 하면 $PA=\begin{pmatrix}pa & pb\\ qa & qb\end{pmatrix} \Rightarrow \dfrac{1}{paqb-paqb}=0$

그러므로 역행렬은 존재하지 않습니다.

ㄴ. $B=(c\ d)$라고 가정하면

$PA=PB \Rightarrow \begin{pmatrix}pa & pb\\ qa & qb\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}pc & pd\\ qc & qd\end{pmatrix}$

$\Rightarrow pa=pc\ /\ pb=pd$ 이때 $p\neq0$ 이므로 $a=c\ /\ b=d$

$\therefore A=B$ (참)

ㄷ. $PA\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}pa & pb\\ qa & qb\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{matrix}pa+pb=1 \to p(a+b)=1\\ qa+qb=1 \to q(a+b)=1\end{matrix}\right]$ 두식을 빼주면

$(p-q)(a+b)=0$, 이때 $a+b\neq0$ 이므로 $p=q$

그러므로 P가 $\begin{pmatrix}p\\p\end{pmatrix}$ 꼴 일때 만족합니다 (참)

13. 어느 재래시장을 이용하는 고객의 집에서 시장까지의 거리는 평균이 1740 m, 표준편차가 500 m 인 정규분포를 따른다고 한다. 집에서 시장까지의 거리가 2000 m 이상인 고객 중에서 15%, 2000 m 미만인 고객 중에서 5%는 자가용을 이용하여 시장에 온다고 한다. 자가용을 이용하여 시장에 온 고객 중에서 임의로 1명을 선택할 때, 이 고객의 집에서 시장까지의 거리가 2000 m 미만일 확률은? (단, Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때, $\mathrm{P}(0 \leqq Z \leqq 0.52) = 0.2$로 계산한다.) [3점]

① $\frac{3}{8}$　② $\frac{7}{16}$　③ $\frac{1}{2}$　④ $\frac{9}{16}$　⑤ $\frac{5}{8}$

13번 문제 입니다.

집에서 시장까지의 거리는 $N(1740, 500^2)$을 따릅니다.

$$P(X \geq 2000) = P\left(\frac{X-1740}{500} \geq 0.52\right)$$
$$= P(Z \geq 0.52) = 0.3$$

$$P(X < 2000) = P(Z < 0.52) = 0.7$$

전체 재래시장에 온 손님중에서
자가용을 이용하여 시장에 온 고객은

2000m 이상 고객의 15% 이고 2000m 미만 고객의 5% 입니다

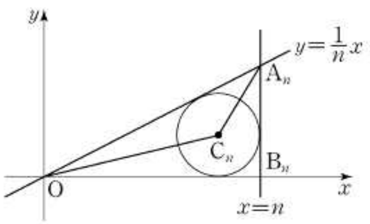
그러므로 각각 $\frac{3}{10} \times \frac{15}{100}$, $\frac{7}{10} \times \frac{5}{100}$ $\Rightarrow \frac{16}{200}$ 입니다.

이 고객중에서 2000m 미만 고객을 선택할 확률은

$$\frac{\frac{7}{200}}{\frac{16}{200}} \Rightarrow \frac{7}{16}$$

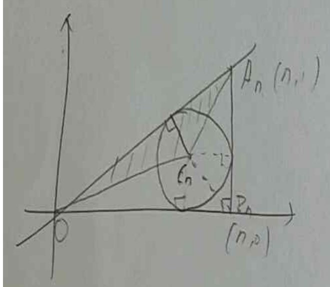
답은 $\boxed{\frac{7}{16}}$ 입니다

14. 좌표평면에서 자연수 n에 대하여 두 직선 $y=\frac{1}{n}x$ 와 $x=n$ 이 만나는 점을 A_n, 직선 $x=n$과 x축이 만나는 점을 B_n이라 하자. 삼각형 A_nOB_n에 내접하는 원의 중심을 C_n이라 하고, 삼각형 A_nOC_n의 넓이를 S_n이라 하자.
$\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n}$ 의 값은? [4점]



① $\frac{1}{12}$ ② $\frac{1}{6}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{5}{12}$

14번 문제 입니다.



S_n을 구하긴 위해선 원의 반지름 r과 $\overline{OA_n}$ 의 길이를 구해야 합니다.

$\overline{OA_n}$ 의 길이는 $\sqrt{n^2+1}$ 입니다

r을 구하기 위해선

$\triangle OC_nB_n + \triangle OB_nA_n + \triangle OC_nA_n = \triangle OA_nB_n$ 을 이용하여 구할수 있습니다.

$\Rightarrow \frac{1}{2}\times n\times r + \frac{1}{2}\times 1\times r + \frac{1}{2}\times\sqrt{n^2+1}\times r = \frac{n}{2}$

$\Rightarrow r = \frac{n+1}{\sqrt{n^2+1}+n+1}$ 입니다 $S_n = \frac{(n+1)(\sqrt{n^2+1})}{\sqrt{n^2+1}+n+1}\times\frac{1}{2}$ $\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)(\sqrt{n^2+1})}{n\sqrt{n^2+1}+n^2+n}\times\frac{1}{2} = \boxed{\frac{1}{4}}$ 입니다.

15. 수열 $\{a_n\}$은 $a_1 = 1$이고,

$$a_{n+1} = n+1+\frac{(n-1)!}{a_1 a_2 \cdots a_n} \quad (n \geqq 1)$$

을 만족시킨다. 다음은 일반항 a_n을 구하는 과정의 일부이다.

> 모든 자연수 n에 대하여
>
> $$a_1 a_2 \cdots a_n a_{n+1} = a_1 a_2 \cdots a_n \times (n+1) + (n-1)!$$
>
> 이다. $b_n = \dfrac{a_1 a_2 \cdots a_n}{n!}$이라 하면, $b_1 = 1$이고
>
> $$b_{n+1} = b_n + \boxed{(가)}$$
>
> 이다. 수열 $\{b_n\}$의 일반항을 구하면
>
> $b_n = \boxed{(나)}$이므로 $\dfrac{a_1 a_2 \cdots a_n}{n!} = \boxed{(나)}$이다.
>
> ⋮
>
> 따라서 $a_1 = 1$이고, $a_n = \dfrac{(n-1)(2n-1)}{2n-3}$ $(n \geqq 2)$이다.

위의 (가)에 알맞은 식을 $f(n)$, (나)에 알맞은 식을 $g(n)$이라 할 때, $f(13) \times g(7)$의 값은? [4점]

① $\frac{1}{70}$ ② $\frac{1}{77}$ ③ $\frac{1}{84}$ ④ $\frac{1}{91}$ ⑤ $\frac{1}{98}$

15번 문제입니다.

$b_{n+1} = b_n + \boxed{가}$

$\Rightarrow \dfrac{a_1 a_2 \cdots a_{n+1}}{(n+1)!} = \dfrac{a_1 \times a_2 \times \cdots a_n}{n!} + \boxed{가}$ 이것은 위에 $a_1 a_2 \cdots a_{n+1} = a_1 a_2 \cdots a_n + (n-1)!$ 식에 $\frac{1}{(n+1)!}$을 곱한것 입니다.

$\Rightarrow \boxed{가} = \dfrac{(n-1)!}{(n+1)!} = \dfrac{1}{n(n+1)}$

그러므로 $b_{n+1} = b_n + \dfrac{1}{n(n+1)}$

$\Rightarrow b_n$의 일반항을 구하면

$b_2 - b_1 = 1 - \frac{1}{2}$

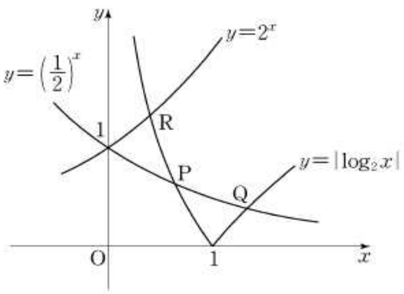
$b_3 - b_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$

⋮

$b_n - b_{n-1} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$ $\Rightarrow b_n = 2 - \frac{1}{n}$ $(b_1 = 1)$. (나) $= 2 - \frac{1}{n}$ 입니다

그러므로 $f(13) \times g(7) = \frac{1}{98}$ 입니다 답: $\boxed{\frac{1}{98}}$

16. 좌표평면에서 두 곡선 $y=|\log_2 x|$와 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$이 만나는 두 점을 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$, $\mathrm{Q}(x_2,\ y_2)$ $(x_1 < x_2)$라 하고, 두 곡선 $y=|\log_2 x|$와 $y=2^x$이 만나는 점을 $\mathrm{R}(x_3,\ y_3)$이라 하자. 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [4점]



<보 기>

ㄱ. $\frac{1}{2} < x_1 < 1$

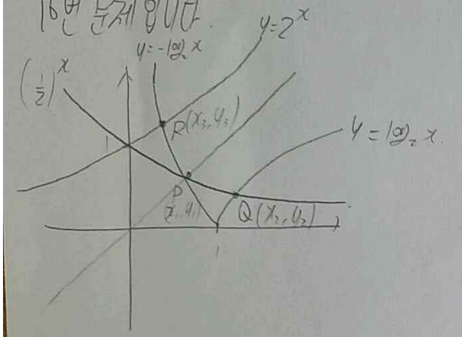
ㄴ. $x_2 y_2 - x_3 y_3 = 0$

ㄷ. $x_2(x_1-1) > y_1(y_2-1)$

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ

④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

16번 문제입니다.



ㄱ. x_1의 위치를 판단하기 위해선 $\frac{1}{2}$이 어느 정도에 있는지 가늠해야 합니다.

$y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$의 그래프에 $\frac{1}{2}$을 대입하면 $\left(\frac{1}{2}, \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\right)$이고 이때 $\frac{1}{2} < \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$ 입니다.

점 P는 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 와 $y=-\log_2 x$ 의 그래프의 교점이고, 둘은 역함수 관계 이므로 $x_1=\left(\frac{1}{2}\right)^{x_1}$ 입니다. 그리고 $x<a$ 인 a를 가정하면 $a>\left(\frac{1}{2}\right)^a$ 입니다.

즉 x_1을 기점으로 x와 $\left(\frac{1}{2}\right)^x$의 대소 관계가 변합니다.

$\therefore \frac{1}{2} < x_1 < 1$ (참)

ㄴ. $\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 와 $-\log_2 x$는 대칭입니다.

또한 2^x와 $\log_2 x$는 대칭입니다.

즉 위의 함수들은 모두 $y=x$에 대칭입니다.

$\therefore x_2 = y_3$ / $x_3 = y_2$ $\therefore x_2 y_2 = x_3 y_3$ (참)

ㄷ. $x_2(x_1 - 1) > y_1(y_2 - 1)$

$\Rightarrow \frac{x_2}{y_2 - 1} > \frac{y_1}{x_1 - 1} \Rightarrow \frac{y_3}{x_3 - 1} > \frac{y_1}{x_1 - 1}$

이때 $\frac{y_3}{x_3 - 1}$은 (x_3, y_3)와 $(1, 0)$의 기울기를 뜻합니다.

$\frac{y_1}{x_1 - 1}$은 (x_1, y_1)와 $(1, 0)$의 기울기를 뜻합니다

$\Rightarrow$ 하지만 실제는 $\frac{y_3}{x_3 - 1} < \frac{y_1}{x_1 - 1}$ ($x_3 < x_1$, $y_3 > y_1$) 이므로 (거짓)

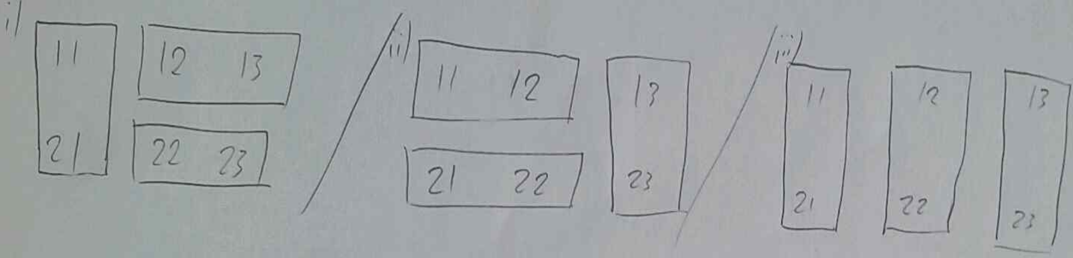
17. 한국, 중국, 일본 학생이 2명씩 있다. 이 6명이 그림과 같이 좌석 번호가 지정된 6개의 좌석 중 임의로 1개씩 선택하여 앉을 때, 같은 나라의 두 학생끼리는 좌석 번호의 차가 1 또는 10이 되도록 앉게 될 확률은? [4점]

11	12	13
21	22	23

① $\frac{1}{20}$ ② $\frac{1}{10}$ ③ $\frac{3}{20}$ ④ $\frac{1}{5}$ ⑤ $\frac{1}{4}$

17번 문제 입니다.

여기서 같은 나라 학생끼리의 좌석번호의 차가 1 or 10이 되게 앉히게 하기 위해선



위에 세가지 방법이 있습니다.

i)의 경우에서 $\boxed{}$안에 세나라가 차례로 배열된다고 생각하면 $3!$

그리고 각 □안에 학생들이 자리를 바꾸는 경우를 생각하면 2^3

나머지 경우에도 똑같이 적용되므로 다 곱해주면 $3! \times 2^3 \times 3 = 144$

그리고 전체 경우의 수는 학생들을 각각의 자리에 배열하는 경우이므로 $6!$

그러므로 구하고자 하는 확률은 $\frac{144}{6!} = \frac{1}{5}$ 그러므로 답은 $\boxed{\frac{1}{5}}$ 입니다

18. 등식 $2\times{}_{n}\mathrm{C}_{3}=3\times{}_{n}\mathrm{P}_{2}$를 만족시키는 자연수 n의 값을 구하시오. [3점]

18번 문제입니다.

$2\times {}_nC_3 = 2\times \frac{n(n-1)(n-2)}{3\times 2}$ / $3\times {}_nP_2 = 3\times n(n-1)$

$\Rightarrow \frac{n(n-1)(n-2)}{3} = 3\times n(n-1)$

$\Rightarrow n-2=9 \quad \therefore n=11$

답은 $\boxed{11}$ 입니다

19. 로그방정식 $\log_3(x-4)=\log_9(5x+4)$의 근을 α라 할 때, α의 값을 구하시오. [3점]

19번 문제입니다.

$\log_3(x-4)=\log_9(5x+4)$ $(x-4>0,\ 5x+4>0)$

$\Rightarrow \log_3(x-4)=\frac{1}{2}\log_3(5x+4)$

$\Rightarrow (x-4)^2=5x+4$

$\Rightarrow x^2-8x+16=5x+4$

$\Rightarrow (x-1)(x-12)=0$

$\Rightarrow x=1$ or 12 입니다 이때 $x>4$ 이므로 $x=12$, 답은 $\boxed{12}$입니다

20. 서로 다른 6개의 공을 두 바구니 A, B에 3개씩 담을 때, 그 결과로 나올 수 있는 경우의 수를 구하시오. [3점]

20번 문제입니다

서로다른 6개의 공을 A, B의 바구니에 3개씩 담은것입니다

이때 A에 담을 공 3개를 택하면 B에 담을 공이 자동으로 결정됩니다

그러므로 A에 담을 공 3개를 택하는 경우의 수는 ${}_6C_3$.

답은 $\boxed{20}$ 입니다.

21. 동전 2개를 동시에 던지는 시행을 10회 반복할 때, 동전 2개 모두 앞면이 나오는 횟수를 확률변수 X라고 하자. 확률변수 $4X+1$의 분산 $V(4X+1)$의 값을 구하시오. [3점]

21번 문제입니다.

동전 2개가 모두 앞면이 나오는 경우의 수는 $\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$ 입니다

그렇다면, 확률변수 X는 이항분포 $B(10, \frac{1}{4})$을 따릅니다

그러므로 $V(x) = 10\times\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}$

$= \frac{15}{8}$ 입니다.

$V(4x+1) = 16\times V(x)$

$= 30$ 답은 $\boxed{30}$ 입니다

22. 공차가 0이 아닌 등차수열 $\{a_n\}$의 세 항 a_2, a_4, a_9가 이 순서대로 공비 r인 등비수열을 이룰 때, $6r$의 값을 구하시오. [4점]

22번 문제 입니다

a_n은 등차수열 입니다. 첫째항을 a, 등차를 d라하면

$a_2 = a+d$, $a_4 = a+3d$, $a_9 = a+8d$ 입니다.

이것이 공비 r인 등비수열을 이루므로

$a_2 \times a_9 = (a_4)^2$

$\Rightarrow (a+d)(a+8d) = (a+3d)^2$

$\Rightarrow 3ad = d^2$

$\Rightarrow 3a = d$ 입니다. 그러므로 $a_2 = 4a$ / $a_4 = 10a$ / $a_9 = 25a$ 이고

각각은 공비가 $\frac{5}{2}$인 등비수열을 이룹니다

$\therefore r = \frac{5}{2}$ 이고 $6r = 15$ 입니다.

답은 $\boxed{15}$

23. 2 이상의 자연수 n에 대하여 집합

$$\{3^{2k-1} \mid k\text{는 자연수, } 1 \leq k \leq n\}$$

의 서로 다른 두 원소를 곱하여 나올 수 있는 모든 값만을 원소로 하는 집합을 S라 하고, S의 원소의 개수를 $f(n)$이라 하자. 예를 들어, $f(4)=5$이다. 이때, $\sum_{n=2}^{11} f(n)$의 값을 구하시오. [4점]

23번 문제 입니다

저는 $\sum_{n=2}^{11} f(n)$의 값을 구할 것입니다

$\sum_{n=2}^{11} f(n) = f(2)+f(3)+\cdots+f(11)$ 입니다

이때 저는 $f(2), f(3), \ldots$의 값을 직접 구해보면서 규칙을 구할것입니다

다른 더 효율적인 방법이 있을 수도 있겠지만 실전에선 그것을 생각할 시간에 직접 해서 규칙성을 찾는 게 빠를 것이라 생각해서 직접 구하겠습니다.

$f(2) \Rightarrow [3^{2k-1} \mid k$는 자연수, $1 \leq k \leq 2]$

$\Rightarrow [3, 3^3] \rightarrow S=\{3^4\}$ 그러므로 $f(2)=1$ 입니다

$f(3) \Rightarrow [3^{2k-1} \mid k$는 자연수, $1 \leq k \leq 3]$

$\Rightarrow [3, 3^3, 3^5] \rightarrow S=\{3^4, 3^6, 3^8\}$ 그러므로 $f(3)=3$ 입니다

$f(4) \Rightarrow [3^{2k-1} \mid k$는 자연수 $1 \leq k \leq 4]$

$\Rightarrow \{3, 3^3, 3^5, 3^7\} \rightarrow S=[3^4, 3^6, 3^8, 3^{10}, 3^{12}]$ $f(4)=5$ 입니다.

여기까지 살펴보면 $f(2), f(3), f(4)$는 공차가 2인 등차수열을 보이고 있습니다

$\rightarrow f(2)+f(3)+\cdots+f(11) = 1+3+5+\cdots+19$

$\Rightarrow \sum_{n=2}^{11} f(n) = 100$

답은 $\boxed{100}$ 입니다

24. 자연수 A에 대하여 $\log A$의 지표를 n, 가수를 α라 할 때, $n \leqq 2\alpha$가 성립하도록 하는 A의 개수를 구하시오.
(단, $3.1 < \sqrt{10} < 3.2$) [4점]

24번 문제입니다

$\log A = n + \alpha \quad (0 \le \alpha < 1)$

일때 $n \le 2\alpha$이 성립하는 A의 개수를 구할 것입니다.

이때 $0 \le 2\alpha < 2$ 이므로 n이 될수 있는 수는 0, 1입니다

i) $n=0$ 일때

$1 \le A < 10 \Rightarrow \log A = \alpha \Rightarrow 0 \le 2\log A$ 그러므로 $1 \le A < 10$ 에서 모두 성립합니다

ii) $n=1$ 일때

$10 \le A < 100 \Rightarrow \log A = 1+\alpha \Rightarrow 1 \le 2(\log A - 1)$

$\Rightarrow \frac{1}{2} \le \log \frac{A}{10}$

$\Rightarrow \sqrt{10} \le \frac{A}{10}$

$\Rightarrow 10\sqrt{10} \le A$ 입니다 이때, $31 < 10\sqrt{10} < 32$ 이므로

$32 \le A < 100$ 가 성립합니다

그러므로 A의 개수는 $9 + 68 = 77$ 입니다 답은 $\boxed{77}$ 입니다

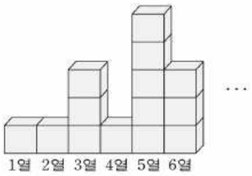
25. 자연수 m에 대하여 크기가 같은 정육면체 모양의 블록이 1열에 1개, 2열에 2개, 3열에 3개, $\cdots$, m열에 m개 쌓여 있다. 블록의 개수가 짝수인 열이 남아 있지 않을 때까지 다음 시행을 반복한다.

블록의 개수가 짝수인 각 열에 대하여 그 열에 있는 블록의 개수의 $\frac{1}{2}$만큼의 블록을 그 열에서 들어낸다.

블록을 들어내는 시행을 모두 마쳤을 때, 1열부터 m열까지 남아 있는 블록의 개수의 합을 $f(m)$이라 하자.
예를 들어, $f(2)=2$, $f(3)=5$, $f(4)=6$이다.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(2^{n+1})-f(2^n)}{f(2^{n+2})}=\frac{q}{p}$$

일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



25번 문제 입니다

이문제도 역시 일일이 해봐서 규칙성을 구하겠습니다

그리고 제가 우선 구해야 할것은 $f(2^n)$ 입니다.

$f(2^n)$은 $f(2), f(4), f(8) \cdots$ 이므로 이것을 구하겠습니다.

우선 1열부터 8열까지의 블록의 개수는 1, 1, 3, 1, 5, 3, 7, 1 입니다.

그러므로 $f(2)=2$

$f(4)=6$ 입니다. 그리고 이것은 $\underbrace{2 \quad 6}_{4} \quad \underbrace{\quad 22}_{16} \cdots$ 이런식으로 계차가 4^n인 계차수열을 이룹니다.

$f(8)=22$

$$\therefore f(2^n) = 2+\sum_{k=1}^{n-1}4^k = 2+\frac{4(4^{n-1}-1)}{3}+2$$

$$=\frac{4^n+2}{3}$$ 입니다.

그러므로 $f(2^{n+1})=\frac{4^{n+1}+2}{3}$ / $f(2^n)=\frac{4^n+2}{3}$ / $f(2^{n+2})=\frac{4^{n+2}+2}{3}$ 이고

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(2^{n+1})-f(2^n)}{f(2^{n+2})}=\lim_{n\to\infty}\frac{3\times4^n}{4^{n+2}+2}=\frac{3}{16}$$

그러므로 답은 $\boxed{19}$ 입니다.

26. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$2a_{n+1} = a_n + a_{n+2}$$

를 만족시킨다. $a_2 = -1$, $a_3 = 2$일 때, 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제10항까지의 합은? [3점]

① 95 ② 90 ③ 85 ④ 80 ⑤ 75

26번 문제 입니다.

$2a_{n+1} = a_n + a_{n+2}$ 를 보면 a_n은 등차수열임을 알수있습니다.

a_n의 첫째항을 a, 등차를 d 라고 하면

$a_2 = a + d = -1$ / $a_3 = a + 2d = 2$

$\therefore a = -4$, $d = 3$ 입니다.

$\Rightarrow a_n = 3n - 7$

$\rightarrow \sum_{k=1}^{10} 3k - 7 = 95$ 답은 $\boxed{95}$ 입니다

27. 어느 도시에서 공용 자전거의 1회 이용 시간은 평균이 60분, 표준편차가 10분인 정규분포를 따른다고 한다. 공용 자전거를 이용한 25회를 임의추출하여 조사할 때, 25회 이용 시간의 총합이 1450분 이상일 확률을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은? [3점]

z	$\mathrm{P}(0 \leq Z \leq z)$
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772
2.5	0.4938

① 0.8351 ② 0.8413 ③ 0.9332
④ 0.9772 ⑤ 0.9938

27번 문제 입니다.

공용자전거 1회 이용시간을 X라 할때

정규분포 $N(60, 10^2)$을 따릅니다

그리고 25회를 추출한 총합은 1450분 이상이면

즉 $X_1+X_2+X_3+\cdots+X_{25} \geq 1450$ 입니다

이때, 양변을 25로 나눠주면 $\dfrac{X_1+X_2+\cdots+X_{25}}{25} \geq 58$

$\dfrac{X_1+X_2+\cdots+X_{25}}{25}$는 25회 추출한것의 평균이고 $\overline{X}$이라 칭하면

$\overline{X}$는 정규분포 $N\left(60, \dfrac{10^2}{25}\right)$을 따릅니다

그러므로 $P(\overline{X} \geq 58) = P(Z \geq -1)$. 문제에 표준정규분포표를 이용하면

$P(Z \geq -1) = 0.8413$ 답은 $\boxed{0.8413}$ 입니다.

28. 어느 회사에서는 응시자의 추론능력시험과 공간지각능력시험의 원점수를 변환하여 사용한다. 추론능력시험의 원점수가 x, 공간지각능력시험의 원점수가 y일 때, 두 가지 변환점수 p와 q는 다음과 같다.

$$\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

응시자 A, B, C의 각 변환점수가 표와 같을 때, 응시자 A, B, C의 추론능력시험의 원점수를 각각 a, b, c라 하자. a, b, c의 대소 관계를 바르게 나타낸 것은? [4점]

변환점수 \ 응시자	A	B	C
p	45	50	45
q	40	50	50

① $a > b > c$　② $a > c > b$　③ $b > a > c$
④ $b > c > a$　⑤ $c > b > a$

28번 문제 입니다

문제에선 A, B, C의 추론능력시험의 원점수를 묻고 있습니다

$$\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

그러므로 추론능력시험의 원점수는 $\frac{3}{5}p - \frac{2}{5}q$ 입니다

그러므로 $a = 27 - 16 = 11$

$b = 30 - 20 = 10$

$c = 27 - 20 = 7$

$\Rightarrow$ 대소관계는 $\boxed{a > b > c}$ 입니다.

29. 이차정사각행렬 A의 $(i,\ j)$성분 a_{ij}가

$$a_{ij} = i - j \quad (i = 1,\ 2,\ j = 1,\ 2)$$

이다. 행렬 $A + A^2 + A^3 + \cdots + A^{2010}$의 $(2,\ 1)$성분은? [4점]

① -2010 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2010

29번 문제 입니다.

이차정사각행렬 A 라고 했죠. 그러면 A는 $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$일 것 입니다.

이때 $a_{11} = 0$, $a_{12} = -1$, $a_{21} = 1$, $a_{22} = 0$ 이므로

$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ 입니다

저는 여기서 문제를 좀더 간편하게 풀 방법을 생각하기 보다는 그 시간에 주어진 대로 구하는 방법을 선호합니다.

$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$A^3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

$A^4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$A^5 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ $A \sim A^4 \,/\, A^5 \sim A^8 \cdots$ 이런식으로 반복되는것을 알 수 있습니다

그렇다면 $A + A^2 + A^3 + A^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 이므로 $A + A^2 + \cdots + A^{2008} = O$ 이 됩니다.

결국 구하고자 하는 것은 $A^{2009} + A^{2010}$의 $(2, 1)$ 성분이 됩니다

이때 $A = A^5 = A^9 = \cdots = A^{2009} \,/\, A^2 = A^{2010}$ 이므로 구하고자 하는 값은 $\boxed{1}$ 입니다

30. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \log\frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

를 만족시킨다. $\sum_{k=1}^{20} a_{2k} = p$라 할 때, 10^p의 값을 구하시오. [4점]

30번 문제 입니다.

제가 구해야 할것은 a_{2k} 입니다. a_{2k}를 구하기 위해선 a_k 먼저 구해야 합니다.

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \log\frac{(n+1)(n+2)}{2} \Rightarrow a_1+a_2+\cdots+a_n = \log\frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

또한, $a_1+a_2+\cdots a_{n-1} = \log\frac{n(n+1)}{2}$ 입니다.

두식을 빼주면 $a_n = \log\frac{n+2}{n}$ 입니다

그러므로 $a_{2n} = \log\frac{2n+2}{2n}$ 입니다.

$$\sum_{k=1}^{20} a_{2k} = \sum_{k=1}^{20} \log\frac{2n+2}{2n} = \log\frac{4}{2}+\log\frac{6}{4}+\cdots+\log\frac{42}{40}$$

$$= \log\frac{42}{2}$$

$= \log 21$ 입니다

그러므로 $p = \log 21$ 이고 $10^p = 21$ 입니다 답은 $\boxed{21}$