경우의 수

이번 경우의 수,확률의 끝에서는 단원의 개념을 설명하고 문제풀이에 있어서 접근법과 단원 공부에 있어서 해야할 기본적인 생각들에 대해 알아서 경우의 수,확률을 정복해봅시다.

이 단원에서 배우는 개념들은 이해를 위주로 하며 공식들은 계산을 편하게 하는 것에서 그친다. 라는 생각을 하며 공부하는 것이 만점을 받는데 도움이 됩니다.

중복없이 모든 경우의수를 빠짐없이 센다.-경우의수 ,확률의 끝!!

개념설명에 앞서 단원의 문제 풀이법을 먼저 설명하여 개념학습에 확실한 목적을 가지게 한다.

경우의 수, 확률 단원의 문제 풀이법

경우의수를 빠짐없이 중복없이 다 센다.가 가장 핵심입니다.

이 때 문제를 접근할 때는 항상 이 단계를 거치며 생각합니다.

1. 문제에 대한 이해를 정확히 한다.
2. 구하고자 하는 경우의수를 구하기 위해 기준을 정하고 기준에 따른 상황을 나눈다.
3. 각각의 상황에 대하여 개념을 적용하여 경우의수를 구한다음 합의법칙/곱의법칙을 이용하여 경우의수를 구한다.

경우의 수, 확률에서 가장 중요한 개념은 합의 법칙과 곱의법칙 이 두가지 법칙을 제대로 활용 할수 있다면 끝입니다.

◆합의 법칙

두 개의 사건 A,B가 있을 때, 이것들이 동시에 일어나지 않는다고 하고 A가 일어나는 방법이 m가지, B가 일어나는 방법이 n가지이면 A또는 B가 일어나는 방법은 (m+n)가지이다.

◆곱의 법칙

두 개의 사건 A,B가 있을 때, A가 일어나는 방법이 m가지이고 그 각각에 대하여 B가 일어나는 방법이 n가지이면, A,B가 동시에 일어나는 방법은 (m*n)가지이다.

합의 법칙에 대해서 예를 들어보면 문구점에 갔는데, 문구점에 펜이 심플한 종류가 4종류(A,B,C,D)와 멋진 종류가 2종류(a,b)가 있다고 했을 때 이 펜중 한 가지를 선택할 경우이 수는 몇가지 일까? 일 때

A,B,C,D,a,b 중에서 한가지만 선택하면 되므로 4+2=6가지가 됩니다.

곱의 법칙을 설명해보면

내가 심플한 펜 한 개와 멋진 종류 한 개를 산다고 했을 때 경우의수는 몇가지 일까? 일 때

심플한 종류 1개당 멋진 종류 2 개를 각각 고를 수 있는 경우의수가 생기므로 아래와 같이 되겠죠?

$$A\begin{cases}a\\b\end{cases}\quad B\begin{cases}a\\b\end{cases}\quad C\begin{cases}a\\b\end{cases}\quad D\begin{cases}a\\b\end{cases}$$

그래서 경우의 수는 2*4=8가지가 됩니다.

◆순열

원소를 순서가 있게 나열하는 경우의수를 구하는 개념이다.

4명의 학생 a,b,c,d에서 반장,부반장을 뽑을 때 경우의수를 구한다라는 예로 설명해보면

반장을 a로 정한다면 그 상황에 대해 부반장이 될 수 있는 경우의수는 b,c,d 세가지이다.

곱의법칙을 쓰면 4*3=12가지

$a\begin{cases}b\\c\\d\end{cases}\quad b\begin{cases}a\\c\\d\end{cases}\quad c\begin{cases}a\\b\\d\end{cases}\quad d\begin{cases}a\\b\\c\end{cases}$ **로 생각 하면됩니다.**

◆순열에 대한 기호

서로 다른 n개의 원소에서 r개를 택하여 순서를 생각하여 일렬로 늘어놓는 방법 하나하나를 n개에서 r개를 택하는 순열이라고 한다.
이 때 순열의수를 $_nP_r$로 나타낸다.

◆순열의 수의 공식 계산

$_nP_r$**=n(n-1)(n-2)...{n-(r-1)}** $(n \geq r)$

$$= \frac{n!}{(n-r)!}$$

◆공식의 기타 계산

1.$_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$

2.$_nP_n = n!$

3.0!=1

4.$_nP_0 = 1$

◆조합

순서를 생각 하지않고 n개에서 r개를 택한다.

조합은 순열에서 순서를 생각하지않은것입니다.

즉 a,b의 두장의 카드를 놓는다고 했을 때,

순열은 ab,ba의 두가지 경우의수가 생각지만 조합은 ab 한가지 경우의수 만 생깁니다.

조합은 순열의 경우의수에서 순서를 없애주면 되겠죠?

◆순서를 없애는 방법

a,b,c,d,e 중 3개를 택하는 경우의수를 구한다했을 때

일단 순서를 생각하여 뽑는 경우의수는 5*4*3가지입니다.

이 때 a,b,c를 순서 있게 뽑았다고 했을 때 경우의수는 (abc)(acb)(bac)(bca)(cab)(cba)의 6가지 경우의수가 생깁니다. 하지만 순서를 없게 생각하면 6가지 경우의수는 1가지 경우의수가 되어야하므로 6으로 나누면 순서를 없앨 수있습니다.

순서를 생각하여 뽑은 경우의수 5*4*3에서 순서를 없애기 위해 3*2*1(3개를 순서있게 세운 경우의수)를 나누어주면 5개중 3개를 순서생각 하지않고 뽑는 조합이 됩니다.

◆조합의 공식

$${}_nC_r = \frac{{}_nP_r}{r!}$$

◆중복조합

n개에서 r개를 뽑을 때 중복으로 선택하여 뽑기가 가능할 때 경우의수를 구하는 공식입니다.

공식에 대한 이해는 직접 수렴도를 그려보면서 이해해보세요.

◆중복조합의 공식

일반적으로,서로 다른 n개에서 중복을 허락하여 r개를 택하는 조합의 수 ${}_nH_r$는 서로 다른 (n+r-1)개에서 중복을 허락하지 않고 r개를 택하는 조합의 수 ${}_{n+r-1}C_r$와 같다.

$${}_nH_r = {}_{n+r-1}C_r$$

◆이항정리

이항정리는 2개의 항으로 이루어진 식의 곱의 공식을 정리한 것입니다.

여기서 2가지 정리를 제시해줄게요. 개인적으로 2번째로 이해하는게 고난도 문제를 풀기 좋습니다. 그만큼 이해와활용이 어려우니 많은 연습이 필요합니다.

(첫번 째 이항정리)

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$....㉠

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$....㉡

위 식에서 각 항의 계수를 표현하는 것이 이항정리라고 생각하면 됩니다.

위 두식의 계수를 조합의 기호로 표현해보면

㉠: 1=${}_2C_0$ 2=${}_2C_1$ 1=${}_2C_2$
㉡: 1=${}_3C_0$ 3=${}_3C_1$ 3=${}_3C_2$ 1=${}_3C_3$

이 됩니다. 같은 방법으로 계속 해서 나타내보면

$$(a+b)^4 = {}_4C_0a^4 + {}_4C_1a^3b + {}_4C_2a^2b^2 + {}_4C_3a^1b^3 + {}_4C_4b^4$$

$$(a+b)^5 = {}_5C_0a^5 + {}_5C_1a^4b + {}_5C_2a^3b^2 + {}_5C_3a^2b^3 + {}_5C_4ab^4 + {}_5C_5b^5$$

.
.
.
.

위 식들을 일반화해보면

n이 양의 정수일 때,$(a+b)^n$ 의 전개식은 다음과 같다.

$$(a+b)^n = {}_nC_0a^n + {}_nC_1a^{n-1}b + \cdots {}_nC_{n-1}ab^{n-1} + {}_nC_nb^n$$

이 식을 이항정리라 한다.

두 번째 이항정리

문제 고난도일 때 생각하는 측면에서 심플하면서 여러 가지 이항정리가 섞여있을 때 활용됩니다. 이항정리는 이런거구나를 첫 번째로 이해하고 문제풀때는 두 번째 이항정리로 접근하는 것을 추천합니다.

이항정리를 조합의 느낌을 살려서 이해해 봅시다.

$$(a+b)^n = \underbrace{(a+b)(a+b)\ldots(a+b)}_{n\text{개}}$$

$(a+b)^n$은 n개의 (a+b) 하나하나로부터 a,b 중 하나를 택하여 서로 곱한 것을 더한 것입니다,

즉, n개의 (a+b)중에서 r개로부터 a를 택하고 n-r개로부터 b를 택하여 곱한 것이죠.

이를 식으로 쓰면

${}_nC_r a^r b^{n-r}$이 됩니다.

◆다항정리

두 개의 항이 아닌 세 개, 네 개 그이상의 항들로 이루어진 식의 곱을 정리한 것이 다항정리입니다.

예를들면 $(a+b+c)^n$이런 것들이요.

이 다항정리는 위에 이항정리의 두 번째 정리를 활용하면 쉽게 풀이할 수있습니다.

◆파스칼 삼각형

이항정리를 n에 따라 삼각형의 꼴로 나열해둔걸 파스칼 삼각형이라 합니다.

파스칼 삼각형의 성질이 문제풀이에 활용되므로 반드시 알아 두도록합니다.

◆파스칼 삼각형의 성질

(파스칼 삼각형은 개념서에있으므로 생략할게요. 직접하려니 이상하게 되네요. 한계... 후..)

1.어느 행이든지 시작과 끝의 숫자는 1이다.
2.각 행은 좌우대칭형이다.
3. 각행의 처음과 끝을 제외한 수는 대각선으로 좌,우 위에 있는 수의 합과 같다.
4. n행에 있는 이항계수의 합은 2^n이다.

-경우의수 개념은 거의 다 다루었습니다. 하지만 무엇보다 중요한 것은 문제를 정확히 이해하고 그 문제에서 경우의수를 구하기 위해 기준을 정하고 상황을 나눈것입니다.!! 다시한번 문제풀이법을 제시하고 기출문제를 풀어봅시다.

경우의 수, 확률 단원의 문제 풀이법

경우의수를 빠짐없이 중복없이 다 센다.가 가장 핵심입니다.

이 때 문제를 접근할 때는 항상 이 단계를 거치며 생각합니다.

1. 문제에 대한 이해를 정확히 한다.
2. 구하고자 하는 경우의수를 구하기 위해 기준을 정하고 기준에 따른 상황을 나눈다.
3. 각각의 상황에 대하여 개념을 적용하여 경우의수를 구한다음 합의법칙/곱의법칙을 이용하여 경우의수를 구한다.

1.[2014학년도 9월 모의평가]

$3 \le a \le b \le c \le d \le 10$을 만족시키는 자연수 a, b, c, d의 모든 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수는? [3점]

① 240 ② 270 ③ 300 ④ 330 ⑤ 360

2.[2014학년도 대수능]

흰색 탁구공 8개와 주황색 탁구공 7개를 3명의 학생에게 남김없이 나누어 주려고 한다. 각 학생이 흰색 탁구공과 주황색 탁구공을 각각 한 개 이상 갖도록 나누어 주는 경우의 수는? [4점]

① 295 ② 300 ③ 305 ④ 310 ⑤ 315

3.[2011학년도 9월 모의평가]

다항식 $(x+a)^5$의 전개식에서 x^3의 계수와 x^4의 계수가 같을 때, $60a$의 값을 구하시오. (단, a는 양수이다.) [4점]

4.[2013학년도 대수능]

같은 종류의 주스 4병, 같은 종류의 생수 2병, 우유 1병을 3명에게 남김없이 나누어 주는 경우의 수는?
(단, 1병도 받지 못하는 사람이 있을 수 있다.) [3점]

① 330 ② 315 ③ 300 ④ 285 ⑤ 270

[해설]
1.중복조합 문제입니다.

순서가 존재한다. 하지만 순서가 존재한다고 해서 순열을 생각할 필요가없다. 왜냐하면 숫자만 뽑아두면 조건에 맞게 알아서 원소와 대응 시키면 되니깐.

3,4,5,6,7,8,9,10 의 원소 중 중복을 허락하여 4개를 택하는 방법의 수를 구한다.

${}_8H_4 = {}_{11}C_4 = \frac{11\times10\times9\times8}{4\times3\times2\times1} = 330$이 된다.

답:330 (4번)

간단하죠? 이 문제는 중복조합 문제중 간단한 문제이고, 좀더 어려운 문제가 있습니다. 그 문제에 대한 풀이대해서 잠시 tip를 주자면

각 원소에 대해서 선택할 수 있는 경우의수가 0개부터 시작하게끔 조건을 맞춰야합니다. 문제의 조건은 그렇지 않게끔 되어있지만 치환을 통해서 조건을 바꾸어 생각할 수 있습니다. 알아두세요^^

2. 중복조합 문제입니다. 위 풀이에서 설명했듯이 중복조합문제중 어려운 문제입니다. 조건상 1개이상이라는 조건이 붙었죠? 중복조합 공식을 못쓰게 하는 조건입니다. 조건을 바꾸어 공식을 쓸수있게 끔 만들면됩니다.

흰색공과 주황색공이 있으니 기준을 공의색깔로 두고 2가지 상황 (흰/주)으로 나누고 각각의 상황에 대해서 경우의수를 구해봅시다.

A,B,C학생이 받은 흰색공의 개수를 각각 a,b,c라 하면

a+b+c=8(a,b,c는 1이상)

a,b,c를 $a = a' + 1, b = b' + 1, c = c' + 1$로 치환 해서 정리하면

$a' + b' + c' = 5$가 된다. 새로운 조건을 만들고 다시 문제를 해석해보면

흰색공의 입장에서 중복을 허락하여 A,B,C를 5번 선택한다.

라는 문제로 이해할 수 있습니다.

그러면 중복조합 공식을 써서

${}_3H_5 = {}_7C_5 = {}_7C_2 = \frac{7\times6}{2}$이 되고 21가지 경우의수가 생깁니다.

두 번째 상황인 주황색도 같은 방법으로 경우의수를 구해주면

${}_3H_4 = {}_6C_4 = {}_6C_2 = \frac{6\times5}{2}$이 되고 15가지 경우의 수가 생깁니다.

두 상황은 동시에 이루어지므로(곱의 법칙)
21*15=315됩니다.

답:315 (5번)

*tip)
여기서 동시에 이루어진다. 참 동시에 이루어진다라는 의미가 헷갈리죠. 그러면 곱의법칙은 이렇게 생각해봅시다.

흰색공을 나누어주는 경우의수는 21가지나 됩니다. 그 중 1개에 대하여 주황색공을 나누어주는 경우의수는 15가지가 되겠죠?

이렇게 흰색공을 나누어주는 경우의수인 21가지 경우에 대하여 전부 각각 15가지씩 있

겠죠? 그래서 21*15입니다. 이게 바로 곱의 법칙입니다.

동시에 이루어진다 라는 의미가 이해가 않간다면 곱의법칙은 각각의 경우에 대하여 똑같은 경우의수가 계속해서 있을 경우 곱한다고 보면 됩니다.

이렇게 이해하고 다시 여러번 곱의법칙설명을 읽어보세요. 반드시 곱의법칙과 합의법칙을 이해해야 이 단원 정복이 가능합니다.

3. 이항정리 문제입니다. 첫 번째 , 두 번째 이항정리로 다 풀어보세요. 저는 두 번째 풀이를 택하겠습니다.

일단 계수 비교법이 사용될게 보이구요.

x^3과 x^4의 계수가 같다 라고했으니,각 계수를 구해서 비교해주면 됩니다. 간단하죠? 계산문제네요

$(x+a)^5$은 (x+a)가 5개의 곱으로 이루어진것이므로 x^3은 5개 중에서 3개를 골라 x를 택하고 나머지 2개는 상수a를 택하여 서로 곱한 것이 됩니다.

x^4은 5개 중에서 4개를 골라 x를 택하고 나머지 1개는 상수 a를 택하여 서로 곱한 것이 됩니다.

그러므로 x^3의 계수는 ${}_5C_3a^2$이고,x^4의 계수는 ${}_5C_4a$입니다.

$${}_5C_3a^2 = {}_5C_4a \quad (a \neq 0\text{이므로 }a\text{로 양변을 나눈다.})$$
$$\frac{5\times4}{2\times1}a = 5$$
$$10a = 5$$
$$a = \frac{1}{10}\times5$$
$$\therefore a = \frac{1}{2}$$
$$60a = 30$$

답:30

4.중복조합 문제입니다.

2번 문제와 비교했을 때 비슷한 문제인데 왜 3점일까요? 선택할 때 수가 0이 되어도 좋다는 조건 때문에 문제가 쉽기 때문입니다.

2번문제와 풀이를 유사하게 하면됩니다.

세가지 상황으로 나누고 각각의 상황에대한 경우의수를 구한다음 곱하면 됩니다.

1)주스의 경우

$${}_3H_4 = {}_6C_4 = \frac{6\times5}{2} = 15$$

2)생수의 경우

$${}_3H_2 = {}_4C_2 = \frac{4\times3}{2} = 6$$

3)우유의 경우

$${}_3H_1 = {}_3C_1 = 3$$

곱의 법칙이 적용되므로 15*6*3=270

답:270가지 (5번)

확 률

확률은 경우의수를 잘하면 무난하게 넘어가는 단원입니다.

어떤 사건에 대하여 전체사건의 경우의수와 특정사건경우의수의 값으로 표현되기 때문이죠.

그렇기에 위 경우의수 단원에서는 기출문제가 거의 이항정리나 중복조합문제에 국한 되어있습니다. 경우의수에 관한건 확률의 문제로 테스트해도 되기 때문이죠.

확률 단원도 마찬가지로 경우의수와 마찬가지로 빠짐없이 중복없이 모두센다.라는 자세로 문제를 풀어봅시다. 여기에 확률의 정의에 대한 개념을 더해 문제를 접근하면 됩니다.

◆수학적 확률

우리가 다루는 확률문제는 확률의 정의적 문제를 제외한 모든 문제가 수학적확률 문제입니다.

수학적 확률을 구하는 계산과 확률에서 다루는 경우의수의 전제에 대해서 알아봅시다.

근원사건 S에 대하여 어떤 사건 A가 일어날 확률 P(A)는

◆$P(A)=\dfrac{n(A)}{n(S)}$

$=\dfrac{\text{사건 }A\text{가 일어날 경우의수}}{\text{일어날수 있는 모든 경우의수}}$

수학적 확률의 전제: 각각의 경우는 모두 같은 기대(확률)로 일어난다.

예를 들면, 주머니에 빨간색 공 4개와 노란색 공 3개가있습니다. 이때, 주머니에서 한 개의 공을 꺼내는 시행을 할 때 노란공이 뽑힐 공이 확률을 구하시오. 라는 문제가 있다고했을 때

답을 $\frac{1}{2}$이라고 하면 수학적확률의 전제를 무시한게 됩니다. 왜냐하면 빨간색공과 노란색공이 같은 기대로 나오지 않기 때문입니다.

그래서 수학적 확률을 구하기 위해 각각의 공이 같은 기대로 뽑히도록 설정해보면
빨간색 공(A)과 노란색공 (B)이라할 때

빨간색 공 4개는 $A_1, A_2, A_{3,} A_4$
노란색 공 3개는 B_1, B_2, B_3으로 구분하게 되면 각각의 공은 뽑는 것은 같은 기대로 일어나므로 수학적확률을 계산할 수있습니다.

그러므로 빨간색을 뽑을 확률인
$P(A)=$

$$\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{\{A_{1,}A_2, A_3, A_4\}}{\{A_{1,}A_2, A_3, A_4, B_1, B_2, B_3\}}=\frac{4}{7}$$

이 됩니다.

◆기하학적 확률

기하학적 확률은 어떤 화살을 어떤 영역에 맞추는 등의 문제에 등장하는데 근원사건을 전

체영역으로 보고 특정사건을 특정 영역으로 보고 각각의 영역의 넓이나 길이등을 구해서 계산해주면됩니다. (추후 그래프나 도형그리는 법알게되면 추가업로드하겠습니다;;)

◆조건부 확률

조건부 확률은 개념만 이해하면 쉽습니다. 개념설명후 문제를 풀 때 풀이법을 제시하겠습니다.

조건부 확률은 특정사건을 새로운 근원사건(표본공간)으로 간주하고 그 안에서 또 다른 특정사건에 대한 확률값을 구하는것입니다. (근원사건의 교체)

예를 들면,

남녀 100명인 어느반에서 시계를 찬 학생을 조사하여 다음 표를 얻었다.

	시계 o	시계 x	계
남	30	30	60
여	14	26	40
계	44	56	100

이 반에서 임의로 한 명을 뽑을 경우 뽑힌 학생이 남학생이다. 이 때, 그 학생이 시계를 찬 학생일 확률을 구해본다.

뽑힌 학생이 남학생인 사건을 A, 시계를 찬 학생인 사건을 B, 전사건(근원 사건)을 S라고 하면

n(S)=100,n(A)=60,n($A \cap B$)=30이다.

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{60}{100}$$

$$P(A \cap B) = \frac{n(A \cap B)}{n(S)} = \frac{30}{100}$$

그러므로 한명을 뽑았더니 남학생이고, 이때 그 학생이 시계를 찼을 확률은

$\frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{1}{2}$**이다.**

◆조건부 확률의 풀이법

어떤 사건(A)이 일어났을 경우(조건부 사건)

그 조건아래 일어날 수 있는 모든 사건들을 생각한다. ($A_1, A_2, \ldots A_n$)

문제에서 조건아래 일어날 수 있는 사건중에 하나 혹은 다수의 사건이 일어날 확률을 구할 때, 수학적 확률과 동일하게 계산해준다.

예를 들어, A_1일 확률을 구하시오 라고한다면

조건부확률은 $\frac{P(A_1)}{P(A_1)+P(A_2)+\ldots+P(A_n)}$

이 된다.

풀이법 대로 다시 예시 문제를 풀어봅시다.

조건부 사건은 뽑힌 학생이 남학생이다.

뽑힌 학생이 남학생일 때 일어날 수 있는 사건은 그 남학생이 시계를 찼을 사건(A_1)과 시계를 차지 않았을 사건(A_2)을 생각할 수있습니다. 이때 문제에서 그 학생이 시계를 찼을 사건(A_1)의 확률을 구하시오.라고 했으므로

풀이법 대로 계산해주면

$$\frac{P(A_1)}{P(A_2)+P(A_2)} = \frac{\frac{30}{100}}{\frac{30}{100}+\frac{30}{100}} = \frac{30}{60} = \frac{1}{2}$$ **으**

로 조건부 확률을 계산 할 수 있습니다.

◆조건부확률의 공식

확률이 0이 아닌 두사건 A,B에 대하여 사건 A가 일어났을 때의 사건 B의 조건부확률 $P(B|A)$는 $P(B|A)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}$

◆배반사건 과 독립사건

배반사건과 독립사건에 대한 문제는 배바사건의 경우와 독립사건의 경우에 있어서 두사건 (A,B)의 교집합의 값을 어떻게 계산할지에 대해서만 알고있으면 다 풀 수 있습니다. 그러니 이부분에서는 간단히 배반사건과 독립사건에 있어서 교집합의 확률값이 어떨지에 대해서 확인 하겠습니다.

1.배반사건이라는 조건이 주어진 경우
$P(A\cap B)=0$

2.독립사건이라는 조건이 주어진 경우
$P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$
(문제에서 독립사건인지 판단하는 문제가 나올 경우 각각의 수치를 위 식에 대입하여 맞을 경우 그사건을 독립사건이라고 봅니다)
로 계산하여 문제에 적용하여 풀면 됩니다.

◆독립사건의 의미
독립사건은 독립시행 등 확률 통계에서 자주 등장하는 용어이므로 한번 설명하고 가겠습니다. 이해를 못하더라도 문제를 푸는데 상관없습니다. 이해가 안되면 천천히 이해하려고하고 시간을 들여서 이해하려는 낭비는 하지맙시다.

두 사건 A,B가 독립이라는 말은 두사건 A,B가 서로 영향을 끼치지 않는다 라는 의미입니다.

예를들면 동전과 주사위를 던질 때 사건A를 동전이 뒷면이 나온다라 하고 사건 B를 주사위눈이 3이 나온다라고 할 때 두 사건은 서로 영향을 끼치지 않으므로 두사건 A,B는 독립사건이 됩니다.

◆여사건의 확률

여사건은 $P(A)+P(A^c)=1$ 임을 이용하여 복잡한 상황을 좀더 쉬운 상황으로 계산하는 것입니다.

사건 A에 대한 확률을 구할 때 어떤 기준에 따라 상황을 나누는데 그 상황이 너무 많다.

하지만 그 여사건 A^c에 대해서 상황을 나누었더니 훨씬 간단하다면 여사건에 대한 확률을 구한다음 전체확률 1에서 빼서 구하면 됩니다.

◆확률적 정의에 대한 문제는 곱의 법칙을 이용하여 확률을 구하면 됩니다.

경우의 수, 확률 단원의 문제 풀이법

경우의수를 빠짐없이 중복없이 다 센다.가 가장 핵심입니다.

이 때 문제를 접근할 때는 항상 이 단계를 거치며 생각합니다.

1. 문제에 대한 이해를 정확히 한다.
2. 구하고자 하는 경우의수를 구하기 위해 기준을 정하고 기준에 따른 상황을 나눈다.
3. 각각의 상황에 대하여 개념을 적용하여 경우의수를 구한다음 합의법칙/곱의법칙을 이용하여 경우의수를 구한다.

이제 기출을 통해서 연습해보죠.

1.[2014학년도 대수능 7번]

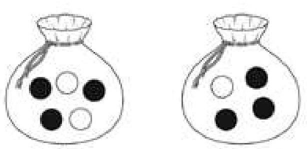
두 사건 A, B가 서로 독립이고 $\mathrm{P}(A)=\frac{1}{3}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{1}{3}$일 때, $\mathrm{P}(A\cap B^C)$의 값은? (단, B^C은 B의 여사건이다.) [3점]

① $\frac{5}{27}$ ② $\frac{2}{9}$ ③ $\frac{7}{27}$ ④ $\frac{8}{27}$ ⑤ $\frac{1}{3}$

2.[2014학년도 대수능 15번]

주머니 A에는 흰 공 2개와 검은 공 3개가 들어 있고, 주머니 B에는 흰 공 1개와 검은 공 3개가 들어 있다. 주머니 A에서 임의로 1개의 공을 꺼내어 흰 공이면 흰 공 2개를 주머니 B에 넣고 검은 공이면 검은 공 2개를 주머니 B에 넣은 후, 주머니 B에서 임의로 1개의 공을 꺼낼 때 꺼낸 공이 흰 공일 확률은? [4점]

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{5}$ ③ $\frac{7}{30}$ ④ $\frac{4}{15}$ ⑤ $\frac{3}{10}$



A B

3.[2013학년도 대수능 29번]

다음 좌석표에서 2행 2열 좌석을 제외한 8개의 좌석에 여학생 4명과 남학생 4명을 1명씩 임의로 배정할 때, 적어도 2명의 남학생이 서로 이웃하게 배정될 확률은 p이다. $70p$의 값을 구하시오. (단, 2명이 같은 행의 바로 옆이나 같은 열의 바로 앞뒤에 있을 때 이웃한 것으로 본다.) [4점]

	1열	2열	3열
1행			
2행		╳	
3행			

4.[2012학년도 대수능 13번]

주머니 A에는 1, 2, 3, 4, 5의 숫자가 하나씩 적혀 있는 5장의 카드가 들어 있고, 주머니 B에는 1, 2, 3, 4, 5, 6의 숫자가 하나씩 적혀 있는 6장의 카드가 들어 있다. 한 개의 주사위를 한 번 던져서 나온 눈의 수가 3의 배수이면 주머니 A에서 임의로 카드를 한 장 꺼내고, 3의 배수가 아니면 주머니 B에서 임의로 카드를 한 장 꺼낸다. 주머니에서 꺼낸 카드에 적힌 수가 짝수일 때, 그 카드가 주머니 A에서 꺼낸 카드일 확률은? [3점]

① $\frac{1}{5}$ ② $\frac{2}{9}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{2}{7}$ ⑤ $\frac{1}{3}$

[해설]

1. 두 사건 A,B가 독립이므로
$P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$임을 이용한다.
벤다이어그램을 이용하면 아래사실을 확인할 수 있다.
$P(A\cap B^c)=P(A)-P(A\cap B)$

위 식을 계산하면
$P(A)-P(A\cap B)=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{3}-\frac{1}{9}$
$=\frac{3-1}{9}=\frac{2}{9}$

답:2번

2. 기준을 세우고 상황을 나눈다.

주머니 A에서 꺼낸 공의 색깔에 따라 상황을 나누고 각 상황에 대하여 확률을 구한다.

주머니 A에서 꺼낸 공이 흰색일 때,주머니 B에서 꺼낸공이 흰공일 확률과
주머니 A에서 꺼낸 공이 검은색일 때, 주머니 B에서 꺼낸공이 흰공일 확률을 각각 구하여 합의법칙을 통해 확률을 구한다.

1)흰 공일 때

주머니 A에서 흰공을 뽑을 확률
$\frac{2}{5}$
흰공을 뽑았다면 주머니 B에 흰공 2개를 넣고 뽑기시행을 했을 때, 흰공이 나올 확률
$\frac{3}{6}$

이므로 주머니 A에서 흰공이 나오고 주머니B에서 흰공을 뽑을 확률은
$\frac{2}{5}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{5}$이다.

2)검은 공일 때
주머니A에서 검은공을 뽑을 확률
$\frac{3}{5}$

주머니 A에서 검은 공을 뽑아 주머니 B에 검은공 2개를 넣은후 뽑기 시행을 했을 때 주머니 B에서 흰공을 뽑을 확률은

$\frac{1}{6}$

이므로 주머니 A에서 검은 공이 나오고 주머니 B에서 흰공을 뽑을 확률은
$\frac{3}{5}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{10}$이다.

그러므로 주머니 B에서 1개의 공을 꺼낼 때 꺼낸공이 흰공일 확률은

$\frac{1}{5}+\frac{1}{10}=\frac{2+1}{10}=\frac{3}{10}$이다

답:5번

3.적어도 2명의 남학생이 이웃하게 배정될 확률인데 2명이상의 남학생이 이웃하게 배정되게 상황을 나누는 것은 너무 많습니다.
그래서 여사건확률의 개념을 써서 4명의 남학생이 전혀 이웃하지않게 배정될 확률을 구하여 전체확률 1에서 빼 구하고자하는 확률을 구한다.

-상황나누기-
남학생이 이웃하지않게 배정되려면 사이사이에 여학생을 배정해야합니다. 이를 그림을 통해 2가지 상황으로 나누어 생각할 수있습니

다.

1)

여	남	여
남		남
여	남	여

행과 열로 순서가 구분되어있으므로 순열로 계산합니다.

수학적확률을 구하기 위해서 전체사건(근원사건)을 구해보면 8명의 학생을 순서있게 배열하는것이므로 n(S)=8!입니다.

첫 번째 상황에 대한 경우의수는
남학생을 칸위에 자리에 배정하는 경우의수 4!과 여학생을 배정하는 경우의수 4!
을 곱의법칙으로 계산하면

4!*4!입니다.

그러므로 이 상황에 대한 확률은
$\frac{4! \times 4!}{8!}$

2)

남	여	남
여		여
남	여	남

두 번째 상황은 이렇게 배열되는 것을 생각할 수있습니다.

이렇게 배열되는 경우의수를 구해보면 계산은 1)의 상황과 같은 경우의수로
4!*4!입니다.

그러므로 이 상황에 대한 확률은
$\frac{4! \times 4!}{8!}$
4!*4!이 됩니다.

이 문제에 대해서 상황은 두가지이외에는 나눌 수없으므로 두가지 상황에 대한 각각의 확률의 합의 여사건확률이 바로 답입니다.

적어도 2명의 남학생이 서로 이웃하게 배정될 확률 p는

$$p = 1 - \frac{4! \times 4! \times 2}{8!} = 1 - \frac{4 \times 3 \times 2 \times 1 \times 2}{8 \times 7 \times 6 \times 5}$$
$$= 1 - \frac{1}{35} = \frac{34}{35}$$

70p=68

답:68

4.조건부 확률 문제입니다. 위 개념파트에서 조건부확률 문제풀이법 다시 한번 보고오세요.

자이제, 풀이법대로 풀이해볼게요.

‘조건부사건(X)는 주머니에서 꺼낸 카드에 적힌수가 짝수이다.’ 입니다.

주머니에 꺼낸 카드에 적힌 수가 짝수일 때 생각할 수 있는 모든 사건은

X_1=A주머니에서 꺼낸다.
X_2=B주머니에서 꺼낸다.

입니다. 문제에서 X_1일 확률을 구하라고하죠?

계산식은 이렇게 되겠네요.

$$\frac{P(X_1)}{P(X_1)+P(X_2)}$$

$P(X_1)$**는 주사위가 3의배수가 나와 주머니 A에서 카드를 뽑아 그 카드가 짝수일 확률이므로**
$\frac{2}{6}\times\frac{2}{5}=\frac{2}{15}$**입니다.(**$\frac{2}{6}$**은 주사위가 3의배수가 나올확률)**

$P(X_2)$**는 주사위가 3의배수가 아닌수가 나와 주머니 B에서 카드를 뽑아 그 카드가 짝수일 확률이므로**
$\frac{4}{6}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{3}$**입니다.**

이 값들을 위 식에 대입해보면

$$\frac{P(X_1)}{P(X_1)+P(X_2)}=\frac{\frac{2}{15}}{\frac{2}{15}+\frac{1}{3}}=\frac{2}{2+5}=\frac{2}{7}$$

답:4번

p.s) 정말 힘들었네요. 팔이 빠지는 줄알았어요. 완벽한 경우의수 확률의 끝입니다. 확실히 공부하고 숙지하고 연습만 한다면 경우의수, 확률 문제는 완벽 마스터입니다.

최대한 자세하게 쓰려고 노력했는데 어떤지 모르겠네요. 열공하세요!!^^