2015학년도 대학수학능력시험대비 모의고사 해설

제 2 교시

수학 영역(A 형)

1) 정답 : ④

<풀 이>

$4^{\frac{3}{2}} \times 2 = 2^3 \times 2 = 2^4 = 16$

2) 정답 : ①

<풀 이>

$3A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$ 따라서 모든 성분의 합은 12이다.

3) 정답 : ⑤

<풀 이>

$\lim_{n\to\infty} \frac{5n^3+1}{n^3+3} = 5$

4) 정답 : ②

<풀 이>

연결관계를 나타내는 행렬의 모든 성분의 합은 연결된 선분의 개수의 2배이다.

연결된 선분의 수가 4이므로 모든 성분의 합은 이다.

5) 정답 : ③

<풀 이>

$a_n = a_1 2^{n-1}$이다. $a_3 = 12$이므로 $a_1 = 3$이다. 따라서 $a_5 = 48$이다.

6) 정답 : ①

<풀 이>

$\int_0^1 3x^2 dx = [x^3]_0^1 = 1 - 0 = 1$

7) 정답 : ⑤

<풀 이>

두 사건은 배반사건이므로 $P(A \cap B) = 0$이다.

$P(A \cup B) = 4P(B) = 1$이므로 $P(B) = \frac{1}{4}$이고,

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A) + \frac{1}{4} - 0 = 1$이다.

따라서 $P(A) = \frac{3}{4}$

8) 정답 : ④

<풀 이>

$\lim_{x\to -0} f(x) + \lim_{x\to 1} f(x) = 2 + 2 = 4$

9) 정답 : ②

<풀 이>

여학생중 이 학생이 2학년 학생일 확률 = $\frac{7}{13}$

10) 정답 : ④

<풀 이>

$\log\left(\frac{t}{t_0} - 1\right) = k + 4\log\frac{V}{C}$ $(t > t_0)$이 성립하고, 교통량이 도로용량의 2배일 때($V = 2C$), 통행시간은 기준통행시간t_0의 $\frac{7}{2}$배($t = \frac{7}{2}t_0$)이다. $V = 2C, t = \frac{7}{2}t_0$를 주어진 식에 대입하면

$\log\left(\frac{\frac{7}{2}t_0}{t_0} - 1\right) = k + 4\log\frac{2C}{C}$

$\log\left(\frac{5}{2}\right) = k + 4\log 2 = k + \log 16$

$k = 1 - 6\log 2$

11) 정답 : ⑤

<풀 이>

$A(0,1), B(0,-1)$이므로 $C(3,1), D(-1,-1)$이다.

따라서 넓이는 $\frac{1}{2}(1+3) \times 2 = 4$이다.

12) 정답 : ①

<풀 이>

$3^n \cdot 5^{n+1}$의 모든 양의 약수의 의 개수 $a_n = (n+1)(n+2)$이다.

따라서 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right\} = \frac{1}{2}$

13) 정답 : ⑤

<풀 이>

$f(m) > 0$이려면 $m = 1, 2$이다. 따라서 $P(A) = \frac{1}{3}$이다. 15회 던지는 독립시행에서 $E(X) = 15 \times \frac{1}{3} = 5$이다.

14) 정답 : ②

<풀 이>

$f(0)=f(3)=0$이므로 $f(x)=kx(x-3)=kx^2-3kx$이다.

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)=\int_0^1 f(x)dx=\left[\frac{1}{3}kx^3-\frac{3}{2}kx^2\right]_0^1=-\frac{7}{6}k=\frac{7}{6}$이 므 로 , $k=-1$이다.

따라서 $f'(0)=-3k=3$이다.

15) 정답 : ③

<풀 이>

네 자연수 $1=2^0, 2=2^1, 4=2^2, 8=2^3$이고, 이 중에서 중복을 허락하여 세수를 선택하여 세수를 곱하면 2^m의 형태로 나타난다. 2^m이 100이하가 되려면 m이 6이하면 된다. 즉, 0,1,2,3중 중복을 허락하여 세수를 선택하여 세수의 합이 6이하인 경우의 수와 같다.

따라서,

(0,0,0),(0,0,1),(0,0,2),(0,0,3),(0,1,1),(0,1,2,),(0,1,3),(0,2,2),(0,2,3),(0,3,3)(1,1,1),(1,1,2,)(1,1,3),(1,2,2),(1,2,3),(2,2,2,)

16개이다.

16) 정답 : ②

<풀 이>

(＊)에서 ㉠을 빼서 정리하면

$\frac{S_{n+1}}{n+1}-\frac{S_n}{n}=S_n$이고 정리하면 $\frac{S_{n+1}}{S_n}=\frac{\boxed{(n+1)^2}}{n}$이다. 따라서

$\boxed{(가)}=(n+1)^2=f(n)$이다.

$S_n=n!\times\boxed{\frac{n}{2}}$이다. 따라서 $\boxed{(나)}=\frac{n}{2}=g(n)$이다.

그러므로 $f(4)\times g(20)=25\times10=250$이다.

17) 정답 : ①

<풀 이>

$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$이므로 두 극값은 $f(0), f(2)$이다.

따라서 두 극값은 곱 $f(0)\times f(2)=a(a-4)=-4$이므로 $a=2$이다.

18) 정답 : ④

<풀 이>

R_1의 정사각형을 $PQRS$라고 하면 $\triangle OPQ$가 정삼각형 이므로 $\overline{PQ}=1$이다.

$\overline{QR}=x$라고 하면 $\overline{TU}=x$이고 $\overline{OU}=\frac{\sqrt{3}}{3}, \overline{OT}=\frac{\sqrt{3}}{2}$이므로

$\overline{QR}=x=\overline{OT}-\overline{OU}=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{\sqrt{3}}{6}$이다.

따라서 $R_1=\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{6}$이다. 또한 길이비가 $1:\frac{\sqrt{3}}{3}$이므로 넓이는 $\frac{1}{3}$배가 된다. 그러므로 $\frac{\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{6}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{\pi-\sqrt{3}}{2}$

19) 정답 : ③

<풀 이>

$AB+A+B=2E$
$(A+E)(B+E)=(B+E)(A+E)=3E$

이므로 $(A+E)^{-1}=\frac{1}{3}(B+E)$이다.

한편 $A^3+E=(A+E)(A^2-A+E)=0$이고, $A+E$의 역행렬이 존재하므로

$A^2-A+E=0$이다. 따라서 $A^2-A-2E=(A+E)(A-2E)=-3E$ 이므로

$(A+E)^{-1}=-\frac{1}{3}(A-2E)$.이다.

따라서 $\frac{1}{3}(B+E)=-\frac{1}{3}(A-2E)$이므로 $A+B=E$이다.

ㄱ. $A+E$의 역행렬이 존재한다.(참)

ㄴ. $AB=BA$(참)

ㄷ. $A+B=-E$(거짓)

20) 정답 : ③

<풀 이>

모평균이 m이고 16대를 추출한 표본평균이 $\overline{x}$이고, 신뢰도 95%로 신뢰구간을 추정하면

$\left[\overline{x}-1.96\frac{\sigma}{4}, \overline{x}+1.96\frac{\sigma}{4}\right]$이므로 $c=1.96\frac{\sigma}{4}$이다.

따라서 $P(X<m+c)=P\left(Z<\frac{1.96}{4}\right)=P(X<0.49)=0.6879$

21) 정답 : ①

<풀 이>

$6x-6\le f(x)\le 2x^3-2$를 만족하는 다항식 $f(x)=x^n+\cdots$라고 하자. $f(x)\le 2x^3-2$이므로 $2x^3-f(x)-2\ge0$를 만족한다. $f(x)$의 차수가 4차이상이면

$\lim_{x\to\infty}\{2x^3-f(x)-2\}=-\infty$이므로 $x>0$에서 $f(x)\le 2x^3-2$를 만족하지 않는다. 따라서, <u>$f(x)$는 차수가 3차 이하의 다항식</u>이다. 또한, $f(0)=-3$이므로 상수항은 -3이다.

$6x-6\le f(x)\le 2x^3-2$에서 $g(x)=6x-6$, $h(x)=2x^3-2$의 그래프의 개형을 확인하면 $g(1)=h(1)=0$, $g'(1)=h'(1)=6$, $g(x)\le h(x)$이다. 즉 두 그래프는 (1,0)에서 접한다. 따라서 $f(x)$는 (1,0)을 지나고 $f'(1)=g'(1)=h'(1)=6$이다.

첫 번째, $f(x)$가 삼차함수라고하자.

$f(x)=x^3+ax^2+bx-3$ 이면 $f'(x)=3x^2+2ax+b$이므로, $a+b=2; 2a+b=3$이다.

따라서, $a=b=1$이므로 $f(x)=x^3+x^2+x-3$이다. 그러므로 $f(3)=36$

두 번째, $f(x)$가 이차함수라고 하자.

$f(x)=x^2+ax-3$이면 $f'(x)=2x+a$이므로, $f(1)=a-2=0$이므로 $a=2$,이지만

$f'(1)=a+2=6$이므로 $a=4$ 으로 서로 다르다.

따라서 이차함수가 될 수 없다.

22) 정답 : 27
<풀 이>
$x=3$에서 연속인 함수이기 때문에 함숫값과 극한값은 같다
$\lim_{x\to 3}\frac{x^3}{x-2}=\frac{27}{1}=27$

23) 정답 : 8
<풀 이>
$\begin{pmatrix} a & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -a+2 \\ 2+2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 \\ b \end{pmatrix}$
그러므로 $a=4, b=4$, $a+b=8$

24) 정답 : 88
<풀 이>
a_n이 등차수열이기 때문에
$a_1+a_{10}=a_2+a_9=a_3+a_8=a_4+a_7=a_5+a_6=22$이 된다.
그러므로
$\sum_{k=2}^{9}a_k=a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7+a_8+a_9=22\times 4=88$

25) 정답 : 11
<풀 이>
함수 $f(x)$가 실수 전체에서 연속이므로 $x=3$에서 연속이 되기 위해서는 함숫값과 극한값이
같아야 하므로 $\lim_{x\to 3}\frac{(3x+2)(x-3)}{x-3}=a$가 되어야 한다.
$\lim_{x\to 3}\frac{(3x+2)(x-3)}{x-3}=\lim_{x\to 3}(3x+2)=11=a$

26) 정답 : 304
<풀 이>
$\int_0^x f(t)dt=x^3+4x$를 양변을 미분하면 $f(x)=3x^2+4$가 되어서 $f(10)=3(10)^2+4=304$가 된다.

27) 정답 : 5
<풀 이>
곡선 $y=\frac{1}{3}x^3+\frac{11}{3}(x>0)$위의 점 P에서 직선 $x-y-10=0$사이의 거리를 최소가 되게 하려면 P에서 접선의 기울기가 직선 $x-y-10=0$기울기가 같아야 하므로, $y'=f'(x)=1$인 점에서 최소가 된다. $y'=x^2$이므로 $x=1$이다. 따라서 $P(1,4)$이다.

28) 정답 : 4
<풀 이>
중심 $(3n,4n)$부터 $(0,-1)$까지의 거리의 최댓값과 최솟값은 각각 원의 중심으로부터 $(0,-1)$까지의 거리에서 반지름을 더한 것과 빼준 것이다. 따라서 중심으로부터 $(0,-1)$까지의 거리는 $\sqrt{(3n)^2+(4n+1)^2}$이고, 원의 반지름은 $3n$이므로
$a_n=\sqrt{(3n)^2+(4n+1)^2}+3n$, $b_n=\sqrt{(3n)^2+(4n+1)^2}-3n$이다. 그러므로,
$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{(3n)^2+(4n+1)^2}+3n}{\sqrt{(3n)^2+(4n+1)^2}-3n}=\frac{8}{2}=4$이다.

29) 정답 : 10
<풀 이>
$P(0\le x\le 3)=3a=1$이므로 $a=\frac{1}{3}$이다. 따라서
$P(0\le x\le\frac{1}{3})=1-P(\frac{1}{3}\le x\le 3)=1-\frac{8}{9}=\frac{1}{9}$이므로
$p=9, q=1$이고, $p+q=10$이다.

30) 정답 : 196
<풀 이>
곡선 $y=2^x$ 아래와 x축 사이를 먼저 보자.
일단 원점 근처에서 생각해볼 때, $y=2^x$의 그래프가 $(0,1)$, $(1,2)$, $(2,4)$ 를 지나므로,
$a=1$일 때, 생각할 수 있는 점은 $(1,1)$이고, 이 점은 $(1,2)$와 떨어진 거리가 1이다. 따라서 제외.
$a=2$일 때, 생각할 수 있는 점은 $(2,1),(2,2),(2,3)$이고, 이 중 $(2,2),(2,3)$는 각각 $(1,2)$, $(2,4)$와 떨어진 거리가 1이므로 제외되고, $(2,1)$만이 그래프와의 거리가 1보다 크고 2보다 작거나 같다.
$a=3$일 때, 생각할 수 있는 점은 $(3,1)$부터 $(3,7)$까지 7개 점 중에 $a=2$일 때처럼 생각해보면 가능한 점은 $(3,2)$, $(3,3)$ 두 개 뿐이다.
이러한 과정을 거치면 $a=n$ $(n\ge 2)$에서 가능한 점의 개수는 2^{n-2}개다. 이때, 모든 점들을 y좌표가 작은 것부터 차례로 나열하면 겹치는 것 없이 1씩 커져간다. 따라서 그래프 아래의 가능한 점들은 a값과 관계없이 $b=k$일 때, 한 개씩 성립한다.
따라서, 그래프 아래의 점들은 b가 가능한 값인 100개가 존재한다.
다음으로 곡선 $y=2^x$ 위와 y축 사이를 보자.
위와 같은 방법으로 볼 때, $a=1$일 때, 가능한 점은 $(1,5)$부터 $(1,8)$까지이고, 이 점들을 확인해보면 위와 같은 과정을 거칠 때, 모든 점들을 y좌표가 작은 것부터 차례로 나열하면 겹치는 것 없이 5부터 시작해서 1씩 커져간다. 따라서 그래프 위의 가능한 점들은 a값과 관계없이 b는 5부터 100까지 가능하다.
따라서, 그래프 위의 점들은 b가 가능한 값인 96개가 존재한다.
따라서, 가능한 모든 점들의 가짓수는 $100+96=196$이다.