2015학년도 대학수학능력시험대비 모의고사 해설

제 2 교시

수학 영역(B 형)

1) 정답 : ④

$A+B=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&1\\a&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&2\\a+1&1\end{pmatrix}$ 이고 $(a+1)+2+2+1=10$ 이므로 $a=4$ 이다.

2) 정답 : ⑤

$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$ 이므로 $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{5}{x}}=\lim_{x\to 0}\left\{(1+x)^{\frac{1}{x}}\right\}^5=e^5$ 이다.

3) 정답 : ③

$f'(x)=\cos x-4$이므로 $f'(0)=1-4=-3$ 이다.

4) 정답 : ①

$\int_0^1 2e^{2x}dx=\left[e^{2x}\right]_0^1=e^2-1$

5) 정답 : ②

$\vec{a}$와 $\vec{a}-t\vec{b}$가 수직이므로 $\vec{a}\cdot(\vec{a}-t\vec{b})=0$ 이고, 내적의 연산 성질에 의해 $\vec{a}\cdot(\vec{a}-t\vec{b})=|\vec{a}|^2-t\vec{a}\cdot\vec{b}=4-2t=0$이므로 $t=2$ 이다.

6) 정답 : ③

주어진 식의 양변에 $(x-1)^2$을 곱하면 $(x-1)(x+2)(x^2+1)\le 0$ 이다. 이때 $x^2+1>0$이므로 $(x-1)(x+2)\le 0$ 이고 $x\ne 1$($\because$분모가 0이되므로) 이므로 $-2\le x<1$ 가 되어 $x=-2,-1,0$ 가 되어 3개 이다.

7) 정답 : ⑤

변환 f는 k배의 닮음 변환이고 변환 g는 $y=-x$에 대한 대칭변환이므로 점 $A(1,0)$, $E(2,0)$, $H(0,-2)$에 대하여 $A\to E\to H$ 순이므로 $k=2$이다.

8) 정답 : ④

$\sin 2x=2\sin x\cos x$ 이므로

$\sin 2x-\sin x=2\sin x\cos x-\sin x=\sin x(2\cos x-1)=0$이고

$\sin x=0$, $\cos x=\frac{1}{2}$이다. 따라서 $x=0,\ \frac{\pi}{3},\ \pi$ 이다.

9) 정답 : ①

$P(B)=\frac{5}{3}P(A)$이고 $P(A\cap B)=\frac{2}{3}P(A)$이므로

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=P(A)+\frac{5}{3}P(A)-\frac{2}{3}P(A)=2P(A)$

이다. 따라서 $\frac{P(A\cup B)}{P(A\cap B)}=\frac{2P(A)}{\frac{2}{3}P(A)}=3$이다.

10) 정답 : ④

교통량이 도로용량의 2배 이므로 $\frac{V}{C}=2$이고 통행시간이 기준통행시간의 $\frac{7}{2}$배 이므로 $\frac{t}{t_0}=\frac{7}{2}$이다. 주어진 식에 의해서

$\log\left(\frac{7}{2}-1\right)=k+4\log 2$이므로

$k=\log\frac{5}{2}-4\log 2=\log 5-5\log 2=1-\log 2-5\log 2=1-6\log 2$ 이다.

11) 정답 : ①

기울기가 n인 포물선의 접선은 초점이 a_n이므로 $y=nx+\frac{a_n}{n}$이다.

따라서 $\frac{a_n}{n}=n+1$이므로 $a_n=n(n+1)$이다. 따라서

$\sum_{n=1}^{5}n(n+1)=\sum_{n=1}^{5}(n^2+n)=\frac{5\times 6\times 11}{6}+\frac{5\times 6}{2}=55+15=70$

12) 정답 : ②

($*$)에서 ㉠을 빼서 정리하면

$\frac{S_{n+1}}{n+1}-\frac{S_n}{n}=S_n$이고 정리하면 $\frac{S_{n+1}}{S_n}=\boxed{\frac{(n+1)^2}{n}}$이다. 따라서

$\boxed{(가)}=(n+1)^2=f(n)$이다.

$S_n=n!\times\boxed{\frac{n}{2}}$이다. 따라서 $\boxed{(나)}=\frac{n}{2}=g(n)$이다.

그러므로 $f(4)\times g(20)=25\times 10=250$이다.

13) 정답 : ⑤

$f(m)>0$이려면 $m=1,2$이다. 따라서 $P(A)=\frac{1}{3}$이다. 15회 던지는 독립시행에서 $E(X)=15\times\frac{1}{3}=5$이다.

14) 정답 : ②

$f(0)=f(3)=0$이므로 $f(x)=kx(x-3)=kx^2-3kx$이다.

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)=\int_0^1 f(x)dx=\left[\frac{1}{3}kx^3-\frac{3}{2}kx^2\right]_0^1=-\frac{7}{6}k=\frac{7}{6}$이 므 로, $k=-1$이다.

따라서 $f'(0)=-3k=3$이다.

15) 정답 : ⑤

두 점 $(a,0,0)$과 $(0,6,0)$을 지나는 직선 l의 방정식을 구하면 $l: ay=-6x+6a$

점 $A(0,0,4)$에서 l에 수선의 발을 내렸을 때, 점을 P라고 했을 때, $\overline{AP}$의 길이는 5이고 원점 O에서 점 P까지의 거리가 $\frac{|-6a|}{\sqrt{36+a^2}}$, 점 A에서 원점과의 거리가 4이므로 삼수선의 정리에 의해 $\overline{OP}=3$이 된다. 따라서 $\frac{|-6a|}{\sqrt{36+a^2}}=3$이므로 $a^2=12$

16) 정답 : ④

R_1의 정사각형을 $PQRS$라고 하면 $\triangle OPQ$가 정삼각형 이므로 $\overline{PQ}=1$이다.

$\overline{QR}=x$라고 하면 $\overline{TU}=x$이고 $\overline{OU}=\frac{\sqrt{3}}{3}, \overline{OT}=\frac{\sqrt{3}}{2}$이므로

$\overline{QR}=x=\overline{OT}-\overline{OU}=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{\sqrt{3}}{6}$이다.

따라서 $R_1=\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{6}$이다. 또한 길이비가 $1:\frac{\sqrt{3}}{3}$이므로 넓이는 $\frac{1}{3}$배가 된다.

그러므로 $\dfrac{\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{6}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{\pi-\sqrt{3}}{2}$

17) 정답 : ②

15 개의 점 중에서 서로 다른 두 점을 선택하는 경우의 수는 ${}_{15}C_2$

y 좌표가 1 인 두 점을 선택하는 경우의 수는 ${}_7C_2$

y 좌표가 2인 두 점을 선택하는 경우의 수는 ${}_5C_2$

y 좌표가 3 인 두 점을 선택하는 경우의 수는 ${}_3C_2$

따라서 구하는 확률은 $\frac{{}_5C_2}{{}_{15}C_2}\div\frac{{}_7C_2+{}_5C_2+{}_3C_2}{{}_{15}C_2}=\frac{5}{17}$이다.

18) 정답 : ③

$AB+A+B=2E$
$(A+E)(B+E)=(B+E)(A+E)=3E$

이므로 $(A+E)^{-1}=\frac{1}{3}(B+E)$이다.

한편 $A^3+E=(A+E)(A^2-A+E)=0$이고, $A+E$의 역행렬이 존재하므로

$A^2-A+E=0$이다. 따라서 $A^2-A-2E=(A+E)(A-2E)=-3E$

이므로

$(A+E)^{-1}=-\frac{1}{3}(A-2E)$.이다.

따라서 $\frac{1}{3}(B+E)=-\frac{1}{3}(A-2E)$이므로 $A+B=E$이다.

ㄱ. $A+E$의 역행렬이 존재한다.(참)

ㄴ. $AB=BA$(참)

ㄷ. $A+B=-E$(거짓)

19) 정답 :

$\frac{80-m}{\sigma}=1.34$ 이고 $\frac{80-(m+3)}{\sigma}=1.04$ 이다. 전개하면 $80-m=1.34\sigma$, $80-(m+3)=1.04\sigma$에서, 앞 식에서 뒷 식을 빼면, $3=0.3\sigma$이고, $\sigma=10$, 이때, $80-m=13.4$이므로, $m=66.6$이다. 따라서 $m+\sigma=76.6$

20) 정답 : ③

$f'(x)=(nx^{n-1}-x^n)e^{-x}$이고 $f''(x)=x^{n-2}\{x^2-2nx+n(n-1)\}e^{-x}$이다.

ㄱ. $f(x)=f'(x)$라 하면 $e^{-x}>0$이므로 $x^n=nx^{n-1}-x^n$이고 $2x^n=x^{n-1}$이고 $x=\frac{n}{2}$이다. 따라서 $f\left(\frac{n}{2}\right)=f'\left(\frac{n}{2}\right)$이다. (참)

ㄴ. $f'(x)=0$ 일 때, $e^{-x}>0$이므로 $nx^{n-1}-x^n=x^{n-1}(n-x)=0$이고 $x=n$이다. $x<n$일 때, $f'(x)>0$이고, $x>n$일 때, $f'(x)<0$이므로 함수 $f(x)$는 $x=n$에서 극댓값을 갖는다.(참)

ㄷ. $n=4$일 때, $f''(x)=x^2(x^2-8x+12)e^{-x}$이므로 $f''(0)=0$이나 $x=0$근방에서 $f''(x)>0$가 되어 변곡점이 될수 없다.(거짓)

21) 정답 : ①

$0\le g(t)<1$ 이므로 $f(t)=9n\left\{g(t)-\frac{1}{3}\right\}^2-n$에서

$-\frac{1}{3}\le g(t)-\frac{1}{3}<\frac{2}{3} \Rightarrow 0\le\left\{g(t)-\frac{1}{3}\right\}^2<\frac{4}{9} \Rightarrow$

$0\le 9n\left\{g(t)-\frac{1}{3}\right\}^2<4n \Rightarrow -n\le 9n\left\{g(t)-\frac{1}{3}\right\}^2-n<3n$ 이고 $f(t)$는 정수이므로, a_n 은 $n+1$부터 $3n-1$까지 합과 같다. 따라서 $\sum_{k=1}^{3n-1}k-\sum_{k=1}^{n}k=\frac{(3n-1)(3n-2)}{2}-\frac{n(n+1)}{2}=\frac{8n^2-10n+2}{2}=4n^2-5n+1$

이고 $\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{4n^2-5n+1}{n^2}=4$이다.

22) 정답 20

$a_1+2a_1+8a_1=55$이므로 $a_1=5$이다. 따라서 $a_3=5\cdot 2^2=20$ 이다.

23) 정답 14

로그의 진수 조건에 의해 $x>0$이고 $x-7>0$이므로 $x>7$이다. 따라서 $\log_8 \frac{x}{x-7}=\frac{1}{3}$이고 $\frac{x}{x-7}=8^{\frac{1}{3}}=2$ 이므로 $x=2x-14$ 가 되어 $x=14$이다.

24) 정답 10

$\frac{x-2}{2}=\frac{y-1}{a}=\frac{z+5}{4}$에 수직인 평면이므로 법선벡터는 $(2,a,4)=(2,5,b)$가 되어 $a=5, b=4$이다. $(1,1,-2)$를 지나므로 $2+5-8+c=0$이 되어 $c=1$ 이다. 따라서 $5+4+1=10$이다.

25) 정답 19

$a>1$이므로 타원의 초점은 $F\left(0, \sqrt{a^2-1}\right), F'\left(0, -\sqrt{a^2-1}\right)$이고 쌍곡선의 초점은 $G(\sqrt{2},0), G'(-\sqrt{2},0)$이다. 사각형 $FGF'G'$는 마름모 이므로 $2\sqrt{2}\times 2\sqrt{a^2-1}\times\frac{1}{2}=12$ 이다. 따라서 $\sqrt{2a^2-2}=6$ 이고 $2a^2=38$이 되어 $a^2=19$이다.

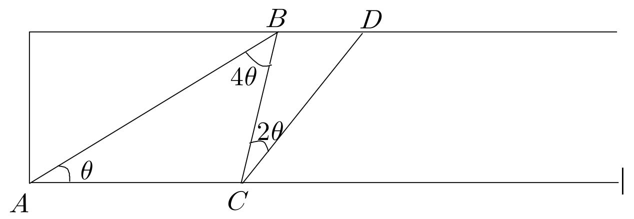
26) 정답 9

$abc=2^n$ (단, $a,b,c>1$ 인 자연수) 이므로 $a=2^m, b=2^l, c=2^k$ (단, $m\ge 1, l\ge 1, k\ge 1$) 라 하면 $2^n=2^{m+l+k}$가 되어 방정식 $m+l+k=n$ 의 음이 아닌 정수의 해의 갯수를 구하는 방법과 같다. ${}_3H_{n-3}={}_{n-1}C_{n-3}={}_{n-1}C_2=\frac{(n-1)(n-2)}{2}=28$이 되어 $n=9$ 이다.

27) 정답 7

$f(\sqrt{x+1}-x)=5$ 에서 $\sqrt{x+1}-x=k$라 하면 $f(k)=5$이므로 k^2+4k+5이므로 $k=1,-5$이다. $k=1$이면 $\sqrt{x+1}-x=1$이고 $x+1=(x+1)^2$이므로 $x=-1,0$이다. $k=-5$이면 $\sqrt{x+1}-x=-5$ 이고 $x+1=(x-5)^2$이므로 $x=3,8$이다. 그러나 $x=3$은 무연근이므로 $x=8$뿐이다. 따라서 실근은 $x=-1,0,8$이다.

28) 정답 12



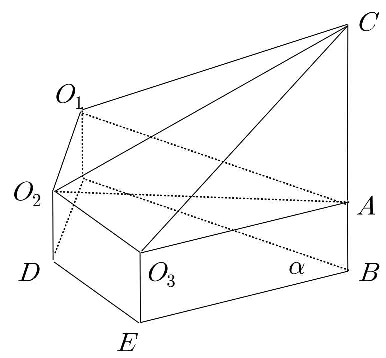
$\overline{BC}=\frac{1}{\sin5\theta}$, $\overline{CD}=\frac{1}{\sin3\theta}$ 이므로 사인 법칙에 의해

$\overline{AC}=\frac{\sin4\theta}{\sin\theta\cdot\sin5\theta}$이다. 따라서 $T_1=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin4\theta}{\sin\theta\cdot\sin5\theta}$,

$T_2=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sin3\theta\cdot\sin5\theta}$ 이므로

$\lim\limits_{\theta\to0}\frac{T_1}{T_2}=\lim\limits_{\theta\to0}\frac{\sin3\theta\cdot\sin4\theta\cdot\sin5\theta}{\sin\theta\cdot\sin5\theta}=12$이다.

29) 정답 $\frac{5}{6}$



$\overline{O_1C}=\overline{O_2C}=\overline{O_3C}=4$ 이고 $\overline{CA}=2$ 이므로 $\overline{O_2A}=2\sqrt{3}$ (∵ $\overline{CA}\perp\overline{O_2A}$이므로) 마찬가지로 $\overline{O_3A}=2\sqrt{3}$ 이다. $\overline{O_2O_3}=2$이므로 $\triangle O_2O_3A$에 대하여 제2 코사인 법칙을 이용하면 $\angle O_3O_2A=\theta$라 할 때, $12=12+4-2\cdot4\sqrt{3}\cos\theta$이고 $\cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{6}$이다.

$\angle O_1O_2A=\theta$ 이므로 $\cos2\theta=2\cos^2\theta-1=-\frac{5}{6}$ 이므로 $\cos\alpha=\frac{5}{6}$ 이다.

30) 정답 127

점 $A(t,f(t)), B(t+1,f(t+1))$ 라 하면

$\triangle OAB=\frac{1}{2}|(t+1)f(t)-tf(t+1)|=\frac{t+1}{t}$이다. 양변에 $\frac{2}{t(t+1)}$을 곱하면 $\frac{f(t)}{t}-\frac{f(t+1)}{t}=\frac{2}{t^2}$(∵ $t>0$ 이고 f 가 감소 함수 이므로) 이다. 이제 $g(t)=\frac{f(t)}{t}$ 라 하면, $g(t)-g(t+1)=\frac{2}{t^2}$ 이다. $g(t)$의 부정적분을 $G(t)$라 하면, $G(t)-G(t+1)=\int\frac{2}{t^2}dt=-\frac{2}{t}+C$ (단, C 는 적분 상수) 이고 조건 (다) 에 의해서 $G(2)-G(1)=2$이므로 $G(1)-G(2)=-2+C$ 가 되어 $C=0$이다. ∴ $G(x+1)-G(x)=\frac{2}{x}$이다. 따라서

$$\int_{\frac{7}{2}}^{\frac{11}{2}}\frac{f(x)}{x}dx=G\left(\frac{11}{2}\right)-G\left(\frac{7}{2}\right)=\left\{G\left(\frac{11}{2}\right)-G\left(\frac{9}{2}\right)\right\}+\left\{G\left(\frac{9}{2}\right)-G\left(\frac{7}{2}\right)\right\}$$

$$=\frac{2}{\frac{9}{2}}+\frac{2}{\frac{7}{2}}=\frac{4}{9}+\frac{4}{7}=\frac{64}{63}$$

∴ $p=63, q=64$ 이므로 $p+q=127$ 이다.