제 2 교시

2022학년도 4월 고3 전국연합학력평가 문제지

수학 영역

성명		수험 번호					3			

○ 문제지의 해당란에 성명과 수험 번호를 정확히 쓰시오.
○ 답안지의 필적 확인란에 다음의 문구를 정자로 기재하시오.

겨울이 길면 봄은 더욱 따뜻하리

○ 답안지의 해당란에 성명과 수험 번호를 쓰고, 또 수험 번호, 선택과목, 답을 정확히 표시하시오.
○ 단답형 답의 숫자에 '0'이 포함되면 그 '0'도 답란에 반드시 표시하시오.
○ 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고하시오. 배점은 2점, 3점 또는 4점입니다.
○ 계산은 문제지의 여백을 활용하시오.

※ 공통과목 및 자신이 선택한 과목의 문제지를 확인하고, 답을 정확히 표시하시오.

※ 시험이 시작되기 전까지 표지를 넘기지 마시오.

경기도교육청

수학 영역

제 2 교시

5지선다형

1. $\left(27\times\sqrt{8}\right)^{\frac{2}{3}}$의 값은? [2점]

① 9 ② 12 ③ 15 ④ 18 ⑤ 21

$$\left(3^3\times 2^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{2}{3}}$$

$$= 3^{3\times\frac{2}{3}}\times 2^{\frac{3}{2}\times\frac{2}{3}}$$

$$= 3^2\times 2^1$$

$$= 9\times 2 = 18$$

2. 함수 $f(x)=x^3+7x-4$에 대하여 $f'(1)$의 값은? [2점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

$$f'(x)=3x^2+7$$

$$f'(1)=3+7=10$$

3. $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\sqrt{2x-5}-1}{x-3}$의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$$\frac{\sqrt{2x-5}^2-1}{(x-3)\left(\sqrt{2x-5}+1\right)}=\frac{2\cancel{(x-3)}}{\cancel{(x-3)}\left(\sqrt{2x-5}+1\right)}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{2x-5}+1}\rightarrow\frac{2}{\sqrt{1}+1}=1$$

4. 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_2=1$, $a_5=2(a_3)^2$일 때, a_6의 값은? [3점]

① 8 ② 10 ③ 12 ④ 14 ⑤ 16

$$r\neq 0\ (r=0 \Rightarrow a_2=0)$$

$$a_2\cdot r^3=2\cdot(a_2\cdot r)^2$$

$$r^3=2r^2$$

$$r=2$$

$$a_6=a_2\cdot r^4$$

$$=1\cdot 16$$

$$=16$$

로그 나오면 진수, 밑 조건 쓰고 시작

수학 영역

5. 부등식 $\log_2 x \le 4-\log_2(x-6)$을 만족시키는 모든 정수 x의 값의 합은? [3점]

① 15 ② 19 ③ 23 ④ 27 ⑤ 31

$x>0,\ x-6>0 \quad \therefore\ x>6$

$\log_2 x+\log_2(x-6)\le 4$

$\log_2 x(x-6)\le 4$

$x(x-6)\le 2^4=16$

$x^2-6x-16=(x-8)(x+2)\le 0$

$-2\le x\le 8.$

$x>6$ 이므로 $6<x\le 8.$

$x=7,8$

6. $\sin\theta+\cos\theta=\frac{1}{2}$일 때, $(2\sin\theta+\cos\theta)(\sin\theta+2\cos\theta)$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{8}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{3}{8}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{5}{8}$

$\frac{1}{4}=(\sin\theta+\cos\theta)^2=1+2\sin\theta\cos\theta,\ \sin\theta\cos\theta=-\frac{3}{8}$

$2\sin^2\theta+2\cos^2\theta+4\sin\theta\cos\theta+\sin\theta\cos\theta$

$=2+5\sin\theta\cos\theta$

$=2-\frac{15}{8}=\frac{1}{8}$

7. $f(3)=2$, $f'(3)=1$인 다항함수 $f(x)$와 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $g(x)$가

$$\lim_{x\to3}\frac{f(x)-g(x)}{x-3}=1$$

을 만족시킬 때, $g(1)$의 값은? [3점]

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

분모 $\to 0$, 분자 $\to 0$. $f(3)-g(3)=0.$

$f(3)=g(3)=2.$

$\frac{f(x)-g(x)}{x-3}=\frac{f(x)-f(3)}{x-3}-\frac{g(x)-g(3)}{x-3}$

$\to f'(3)-g'(3)=1$

$g'(3)=0.$

$g(x)=1\cdot(x-3)^2+2$

$g(1)=4+2=6.$

수학 영역

8. 공비가 $\sqrt{3}$ 인 등비수열 $\{a_n\}$과 공비가 $-\sqrt{3}$ 인 등비수열 $\{b_n\}$에 대하여

$$a = a_1 = b_1, \quad \sum_{n=1}^{8} a_n + \sum_{n=1}^{8} b_n = 160$$

일 때, $a_3 + b_3$의 값은? [3점]

① 9 ② 12 ③ 15 ④ 18 ⑤ 21

$$\frac{a(\overbrace{\sqrt{3}^8-1}^{80})}{\sqrt{3}-1} + \frac{a(\overbrace{(-\sqrt{3})^8-1}^{80})}{-\sqrt{3}-1} = 160$$

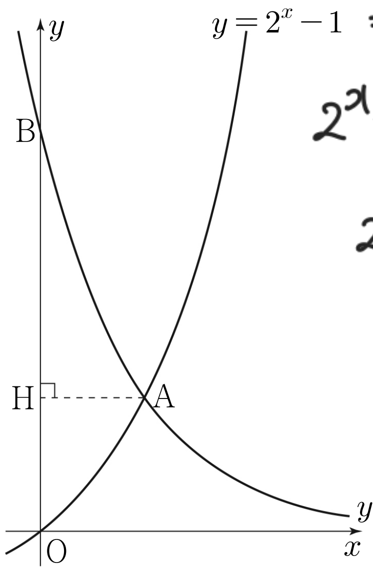
$$80a\left(\frac{1}{\sqrt{3}-1} - \frac{1}{\sqrt{3}+1}\right) = 160$$

$$a \cdot \left(\frac{\cancel{\sqrt{3}}+1}{2} - \frac{\cancel{\sqrt{3}}-1}{2}\right) = 2$$

$$a = 2$$

$$a_3 = b_3 = 2 \times 3 = 6$$

9. 그림과 같이 두 곡선 $y=2^{-x+a}$, $y=2^x-1$이 만나는 점을 A, 곡선 $y=2^{-x+a}$이 y축과 만나는 점을 B라 하자. 점 A에서 y축에 내린 수선의 발을 H라 할 때, $\overline{\text{OB}} = 3 \times \overline{\text{OH}}$이다. 상수 a의 값은? (단, O는 원점이다.) [4점]



2^a

$\frac{1}{3} \times 2^a$

y에 대입

$y = 2^x - 1 = \frac{1}{3} \times 2^a$

$2^x = \frac{1}{3} \times 2^a + 1 = 3$

$2^a = 6, \ a = \log_2 6$

$2^x = 3$

$2^{-x} = \frac{1}{3}$

$y = 2^{-x+a} = \frac{1}{3} \times 2^a$

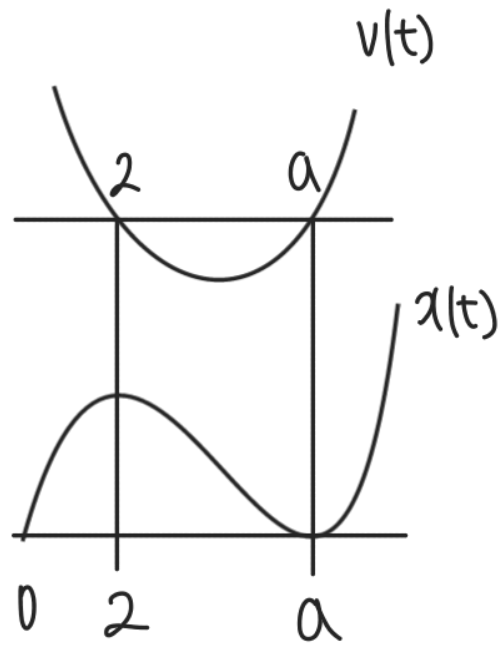
① 2 ② $\log_2 5$ ③ $\log_2 6$ ④ $\log_2 7$ ⑤ 3

10. 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t\,(t \geq 0)$에서의 속도 $v(t)$가

$$v(t) = 3(t-2)(t-a) \quad (a > 2\text{인 상수})$$

이다. 점 P의 시각 $t=0$에서의 위치는 0이고, $t > 0$에서 점 P의 위치가 0이 되는 순간은 한 번뿐이다. $v(8)$의 값은? [4점]

① 27 ② 36 ③ 45 ④ 54 ⑤ 63



$$x(a) - x(0) = \int_0^a v(t)\,dt = 0$$

$$\int_0^a 3t^2 - 3(a+2)t + 6a\,dt = 0$$

$$\left[t^3 - \frac{3}{2}(a+2)t^2 + 6at\right]_0^a = 0$$

$$a^3 - \frac{3}{2}(a+2)\cdot a^2 + 6a^2 = 0$$

$$a - \frac{3}{2}a - 3 + 6 = 0$$

$$a = 6$$

$$v(t) = 3(t-2)(t-6)$$

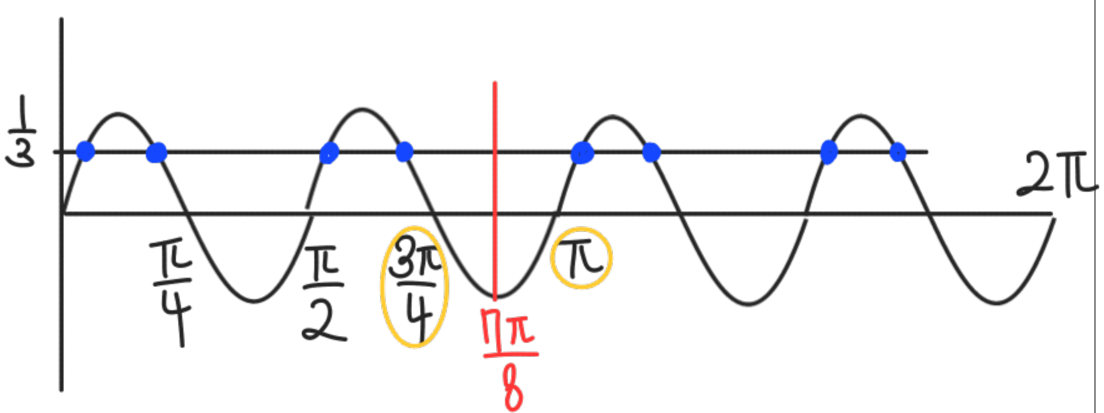
$$v(8) = 3 \times 6 \times 2 = 36$$

11. 자연수 k에 대하여 $0 \le x < 2\pi$일 때, x에 대한 방정식 $\sin kx = \frac{1}{3}$의 서로 다른 실근의 개수가 8이다. $0 \le x < 2\pi$일 때, x에 대한 방정식 $\sin kx = \frac{1}{3}$의 모든 해의 합은? [4점]

① 5π ② 6π ③ 7π ④ 8π ⑤ 9π

$0 \le x < 2\pi$

	반복	실근
$\sin x$	1번	2개
$\sin 2x$	2번	4개
⋮		
$\sin kx$	k번	$2k = 8$
		$k = 4$



(평균) × (개수)

$\frac{7\pi}{8} \times 8 = 7\pi$

12. 수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $1 \le n \le 4$인 모든 자연수 n에 대하여 $a_n + a_{n+4} = 15$이다.
> (나) $n \ge 5$인 모든 자연수 n에 대하여 $a_{n+1} - a_n = n$이다.

$\sum_{n=1}^{4} a_n = 6$일 때, a_5의 값은? [4점]

① 1 ② 3 ③ 5 ④ 7 ⑤ 9

$\boxed{\text{풀이 1}}$ 대입, 나열.

$a_5 = 15 - a_1$
$a_6 = 15 - a_2$ $\quad +5$, $a_1 - a_2 = 5$. $\quad a_2 = a_1 - 5$
$a_7 = 15 - a_3$ $\quad +6$. $a_2 - a_3 = 6$, $\quad a_3 = a_2 - 6 = a_1 - 11$
$a_8 = 15 - a_4$ $\quad +7$, $a_3 - a_4 = 7$. $\quad a_4 = a_3 - 7 = a_1 - 18$

$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = a_1 + (a_1 - 5) + (a_1 - 11) + (a_1 - 18)$
$= 4a_1 - 34 = 6,$

$a_1 = 10.$ $\quad a_5 = 5$

$\boxed{\text{풀이 2}}$ 관계식 이용

$\sum_{n=1}^{4}(a_n + a_{n+4}) = 15 \times 4$

$\underbrace{(a_1 + a_2 + a_3 + a_4)}_{=6} + (a_5 + a_6 + a_7 + a_8) = 60$

$a_5 \xrightarrow{+5} a_6 \xrightarrow{+6} a_7 \xrightarrow{+7} a_8$

$a_5 + a_6 + a_7 + a_8 = 54$

$+5 \quad +11 \quad +18$

$a_5 + (a_5 + 5) + (a_5 + 11) + (a_5 + 18) = 54$

$a_5 = 5$

수학 영역

13. 다항함수 $f(x)$가

$$\lim_{x\to 2}\frac{1}{x-2}\underline{\int_{1}^{x}(x-t)f(t)dt}=3$$

$= G(x)$

을 만족시킬 때, $\int_{1}^{2}(4x+1)f(x)dx$의 값은? [4점]

① 15　② 18　③ 21　④ 24　⑤ 27

$\lim_{x\to 2}\frac{G(x)}{x-2}=3,$

$G(2)=0=\int_1^2(2-t)f(t)dt$

$G'(2)=3$

$G(x)=x\int_1^x f(t)dt-\int_1^x tf(t)dt$

$G'(x)=\int_1^x f(t)dt+\cancel{xf(x)-xf(x)}$

$G'(2)=\int_1^2 f(t)dt=3$

$G(2)=2\int_1^2 f(t)dt-\int_1^2 tf(t)dt=0.$

$\int_1^2 tf(t)dt=6.$

$\int_1^2(4x+1)f(x)dx$

$=4\int_1^2 xf(x)dx+\int_1^2 f(x)dx$

$=4\times 6+3=27$

14. 정수 k와 함수

$$f(x)=\begin{cases} x+1 & (x<0) \\ x-1 & (0\le x<1) \\ 0 & (1\le x\le 3) \\ -x+4 & (x>3)\end{cases}$$

에 대하여 함수 $g(x)$를 $g(x)=|f(x-k)|$라 할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

〈보 기〉

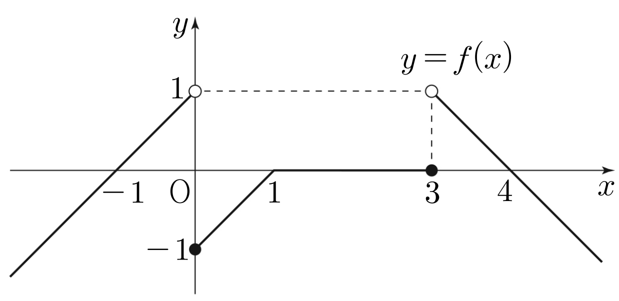
ㄱ. $k=-3$일 때, $\lim_{x\to 0-}g(x)=g(0)$이다.

ㄴ. 함수 $f(x)+g(x)$가 $x=0$에서 연속이 되도록 하는 정수 k가 존재한다.

ㄷ. 함수 $f(x)g(x)$가 $x=0$에서 미분가능하도록 하는 모든 정수 k의 값의 합은 -5이다.

① ㄱ　② ㄷ　③ ㄱ, ㄴ

④ ㄱ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ



수학 영역 곱함수의 연속·미분

ⓒ "곱함수의 연속·미분 관련 영상" →

Step 1. 일단 연속

k=-3	f	g	f×g
0	-1	0	0
0+	-1	1	-1
0-	1	0	0

→ 불연속이므로 미불

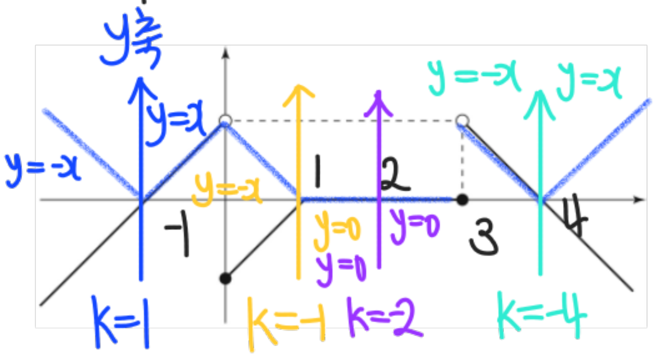
k≠-3	f	g	f×g
0+	-1	α	-α
0-	-1	α	-α
0	1	α	α

α=0

$g(-k+)=g(-k-)=g(-k)=0$

∴ $k=1, -1, -2, \cancel{-3}, -4$

Step 2. 미분가능성



ⓚ=1 f g $\frac{f(x)g(x)-f(0)\cancel{g(0)}}{x-0}$ =0

x>0	x-1	x	x-1 → -1
x<0	x+1	-x	-x-1 → -1

같으므로 미분 가능

~~k=-1~~ f g $\frac{f(x)g(x)-f(0)\cancel{g(0)}}{x-0}$ =0

x>0	x-1	0	0 → 0
x<0	x+1	-x	-x-1 → -1

다르므로 미분 불가

ⓚ=-2 f g $\frac{f(x)g(x)-f(0)\cancel{g(0)}}{x-0}$ =0

x>0	x-1	0	0 → 0
x<0	x+1	0	0 → 0

같으므로 미가

ⓚ=-4 f g $\frac{f(x)g(x)-f(0)\cancel{g(0)}}{x-0}$ =0

x>0	x-1	x	x-1 → -1
x<0	x+1	-x	-x-1 → -1

같으므로 미가

$1-2-4=-5.$

14. 정수 k와 함수

$$f(x)=\begin{cases} x+1 & (x<0) \\ x-1 & (0\le x<1) \\ 0 & (1\le x\le 3) \\ -x+4 & (x>3) \end{cases}$$

에 대하여 함수 $g(x)$를 $g(x)=|f(x-k)|$라 할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

〈보 기〉

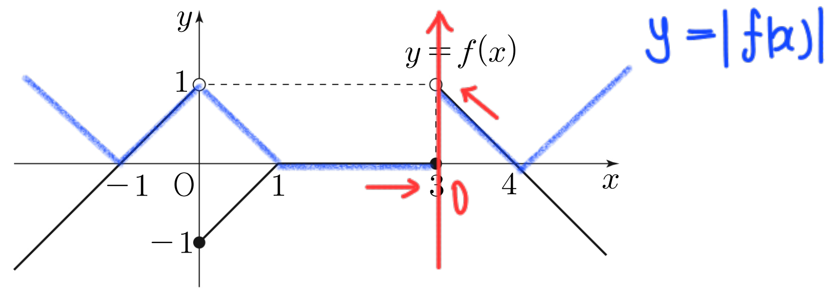
ㄱ. $k=-3$일 때, $\lim_{x\to 0-} g(x)=g(0)$이다.

~~ㄴ~~. 함수 $f(x)+g(x)$가 $x=0$에서 연속이 되도록 하는 정수 k가 존재한다.

ㄷ. 함수 $f(x)g(x)$가 $x=0$에서 미분가능하도록 하는 모든 정수 k의 값의 합은 -5이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

ⓖ



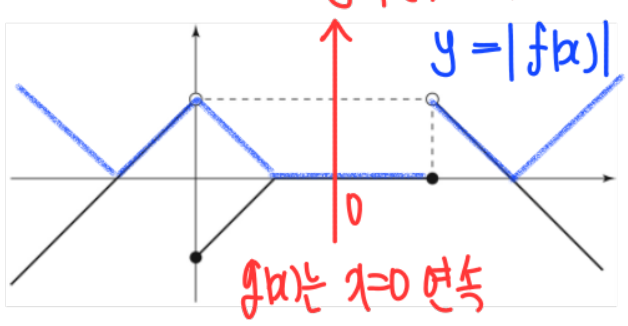
$g(0-)=g(0)=0,\ g(0+)=1$

~~ㄴ~~ k=-3 일때

	f	g	f+g
0	-1	0	-1
0+	-1	1	0
0-	1	0	1

같지 않으므로 불연속

k≠-3 일때



	f	g	f+g
0	-1	α	α-1
0+	-1	α	α-1
0-	1	α	α+1

같지 않으므로 불연속

15. 그림과 같이 반지름의 길이가 $R(5<R<5\sqrt{5})$인 원에 내접하는 사각형 ABCD가 다음 조건을 만족시킨다.

> ○ $\overline{AB}=\overline{AD}$이고 $\overline{AC}=10$이다.
> ○ 사각형 ABCD의 넓이는 40이다.

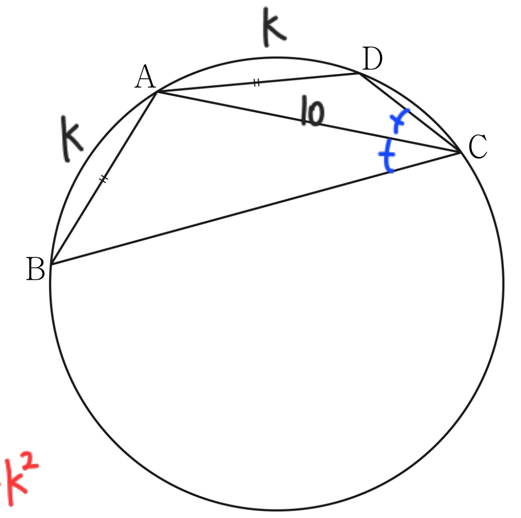
(가)

$\cos(\angle ACB)$

$= \frac{\overline{BC}^2+100-k^2}{2\cdot 10\cdot \overline{BC}}$

$= \frac{1}{20}\left(\overline{BC}+\frac{\boxed{100-k^2}}{\overline{BC}}\right)$

$f(k)=100-k^2$



다음은 선분 BD의 길이와 R의 비를 구하는 과정이다.

> $\overline{AB}=\overline{AD}=k$라 할 때
> 두 삼각형 ABC, ACD에서 각각 코사인법칙에 의하여
>
> $\cos(\angle ACB)=\frac{1}{20}\left(\overline{BC}+\frac{\boxed{(가)}}{\overline{BC}}\right)$,
>
> $\cos(\angle DCA)=\frac{1}{20}\left(\overline{CD}+\frac{\boxed{(가)}}{\overline{CD}}\right)$
>
> 이다.
> 이때 두 호 AB, AD에 대한 원주각의 크기가 같으므로
> $\cos(\angle ACB)=\cos(\angle DCA)$이다.
> 사각형 ABCD의 넓이는
> 두 삼각형 ABD, BCD의 넓이의 합과 같으므로
>
> ※ $\frac{1}{2}k^2\sin(\angle BAD)+\frac{1}{2}\times\overline{BC}\times\overline{CD}\times\sin(\pi-\angle BAD)=40$ $= \sin(\angle BAD)$
>
> 에서 $\sin(\angle BAD)=\boxed{(나)}$이다.
> 따라서 삼각형 ABD에서 사인법칙에 의하여
> $\overline{BD}:R=\boxed{(다)}:1$이다.

위의 (가)에 알맞은 식을 $f(k)$라 하고, (나), (다)에 알맞은 수를 각각 p, q라 할 때, $\frac{f(10p)}{q}$의 값은? [4점]

① $\frac{25}{2}$ ② 15 ③ $\frac{35}{2}$ ④ 20 ⑤ $\frac{45}{2}$

(나)

$\cos(\angle ACB)=\cos(\angle DCA)$

$\overline{BC}+\frac{f(k)}{\overline{BC}}=\overline{CD}+\frac{f(k)}{\overline{CD}}$

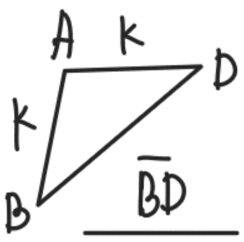
$\cancel{\overline{BC}-\overline{CD}}=f(k)\cdot\frac{\cancel{\overline{BC}-\overline{CD}}}{\overline{BC}\cdot\overline{CD}}$

$\overline{BC}\cdot\overline{CD}=f(k)=100-k^2$

※ $\frac{1}{2}\times\sin(\angle BAD)\left(k^2+(100-k^2)\right)=40$.

$\sin(\angle BAD)=\frac{4}{5}=p$

(다)



$\frac{\overline{BD}}{\sin(\angle BAD)}=2R$

$\frac{\overline{BD}}{R}=2\times\frac{4}{5}=\frac{8}{5}=q$

6 20

$\frac{f(10p)}{q}=(100-64)\times\frac{5}{8}=\frac{45}{2}$

단답형

16. $\log_2 9\times\log_3 16$의 값을 구하시오. [3점]

$\log_2 3^{2}\times\log_3 2^{4}$

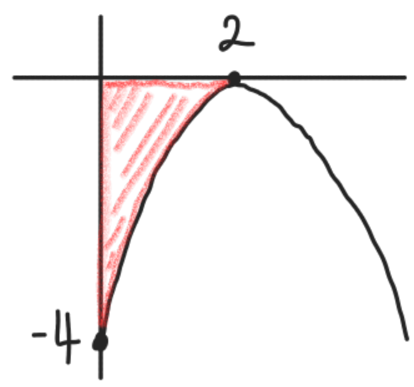
$=2\times4\times\underbrace{\log_2 3\times\log_3 2}_{=1}$

$=8$

$\boxed{8}$

17. 곡선 $y=-x^2+4x-4$와 x축 및 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 S라 할 때, $12S$의 값을 구하시오. [3점]

$y=-(x-2)^2$



$S=\int_0^2(x-2)^2dx$

$=\left[\frac{1}{3}(x-2)^3\right]_0^2$

$=0-\left(-\frac{8}{3}\right)$

$=\frac{8}{3}$

$12\times\frac{8}{3}=32$

$\boxed{32}$

삼차함수 근과계수관계

삼차 방정식 근과 계수 관계

모수_모두의수학

모수 | 모두의수학

수학 영역

18. 다항함수 $f(x)$의 한 부정적분 $F(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$F(x)=(x+2)f(x)-x^3+12x$$

를 만족시킨다. $F(0)=30$일 때, $f(2)$의 값을 구하시오. [3점]

$x=0.\quad F(0)=30=2f(0),\quad f(0)=15$

미분 $\cancel{f(x)}=\cancel{1\cdot f(x)}+(x+2)\cdot f'(x)-3x^2+12$

$(x+2)f'(x)=3(x+2)(x-2)$

$f'(x)=3(x-2)=3x-6$

$f(x)=\frac{3}{2}x^2-6x+15$

$f(2)=6-12+15=9$

$\boxed{9}$

19. 모든 실수 x에 대하여 부등식

$f(x)=$ $x^4-4x^3+16x+a\geq 0$

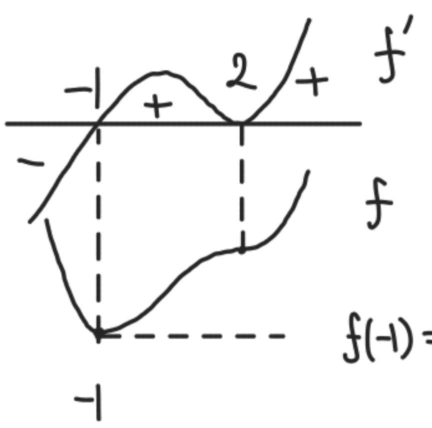
이 항상 성립하도록 하는 실수 a의 최솟값을 구하시오. [3점]

$f'(x)=4x^3-12x^2+16$

$=4(x^3-3x^2+4)$

$=4(x+1)(x^2-4x+4)$

$=4(x+1)(x-2)^2$



$f(-1)=1+4-16+a\geq 0$

$a\geq 11$

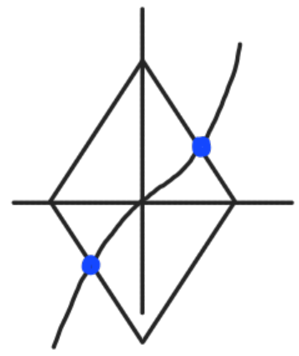
$\boxed{11}$

20. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=-f(x)$를 만족시킨다.) $f(x)=x^3+ax$

양수 t에 대하여 좌표평면 위의 네 점 $(t,\,0)$, $(0,\,2t)$, $(-t,\,0)$, $(0,\,-2t)$를 꼭짓점으로 하는 마름모가 곡선 $y=f(x)$와 만나는 점의 개수를 $g(t)$라 할 때, 함수 $g(t)$는 $t=\alpha$, $t=8$에서 불연속이다. $\alpha^2\times f(4)$의 값을 구하시오. (단, α는 $0<\alpha<8$인 상수이다.) [4점]

x절편 접할 때

① $f'(x)=0$ 의 $D\leq 0$ 일때

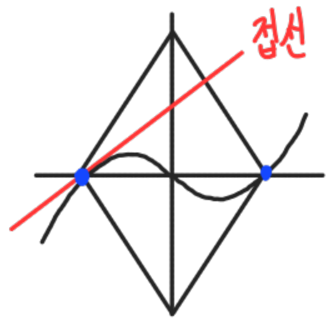


교점 항상 2개, $g(t)=2$ $(t>0)$

$t>0$ 에서 연속

②-1 $f'(x)=0$ 의 $D>0$.

$f(x)$ 의 x절편에서 접선 기울기 ≤ 2

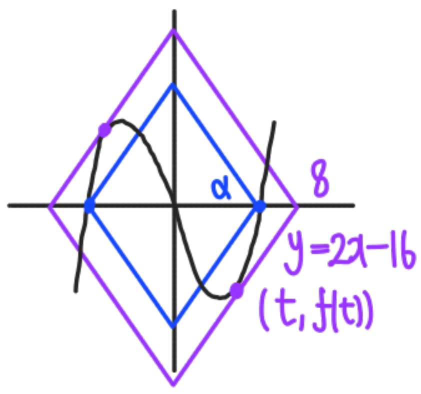


교점 항상 2개, $g(t)=2$ $(t>0)$

$t>0$ 에서 연속

②-2 $f'(x)=0$ 의 $D>0$.

$f(x)$ 의 x절편에서 접선 기울기 >2



$y=f(x)$ & $y=2x-16$

접점 x좌표 t,

$x^3+(a-2)x+16=0$ 의 중근 t.

세 근의 합 $=0=t+t+\boxed{-2t}$

〃 곱 $=-16=t\times t\times(-2t)$

$t=2$

접점 $(2,-12)$

$f(2)=8+2a=-12,\quad a=-10$

$f(x)=x^3-10x=x(x^2-10)$.

$\alpha=\sqrt{10},\ \alpha^2=10$.

$f(4)=4\times 6=24$

$\alpha^2 f(4)=\boxed{240}$

고난도 등차수열

이차함수는 대칭성 중요

모수_모두의수학

모수 | 모두의수학

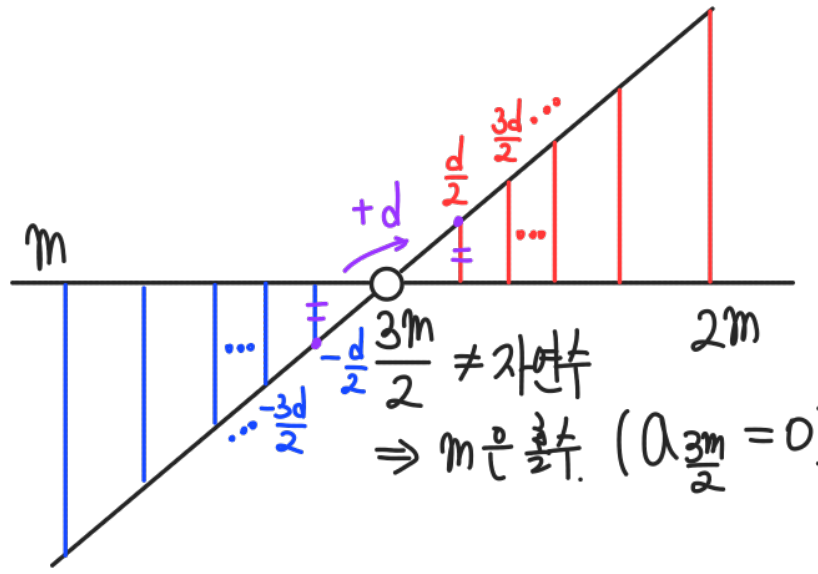
 등차수열은 대칭성(등차중항)이 중요 **수학 영역**

21. 공차가 자연수 d이고 모든 항이 정수인 등차수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시키도록 하는 모든 d의 값의 합을 구하시오. [4점]

> (가) 모든 자연수 n에 대하여 $a_n \neq 0$이다.
>
> (나) $a_{2m} = -a_m$이고 $\displaystyle\sum_{k=m}^{2m} |a_k| = 128$인 자연수 m이 존재한다.

$\ominus$ $\oplus$

$d>0$



$\frac{3m}{2} \neq$ 자연수

$\Rightarrow m$은 홀수 $(a_{\frac{3m}{2}} = 0)$

$2 \times \left(\frac{d}{2} + \frac{3d}{2} + \frac{5d}{2} + \cdots \right) = 128$

1부터 홀수 p개의 합은 p^2

$\left(\sum_{n=1}^{p} (2n-1) = p^2 \right)$

$(1+3+5+\cdots)d = 128$

$p^2 \times d = 128$

p	d
1	$2^7 = 128$
2	$2^5 = 32$
2^2	$2^3 = 8$
2^3	$2^1 = 2$

* m부터 $2m$까지는 $m+1$개 이므로 $p = \frac{m+1}{2}$.

$128+32+8+2$

$= 160+10$

$= 170$

$\boxed{170}$

22. 양수 a와 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$g(x) = \int_0^x \{f'(t+a) \times f'(t-a)\}dt$$

$g(0)=0$

가 다음 조건을 만족시킨다.

> 함수 $g(x)$는 $x=\frac{1}{2}$과 $x=\frac{13}{2}$에서만 극값을 갖는다.

$f(0) = -\frac{1}{2}$일 때, $a \times f(1)$의 값을 구하시오. [4점]

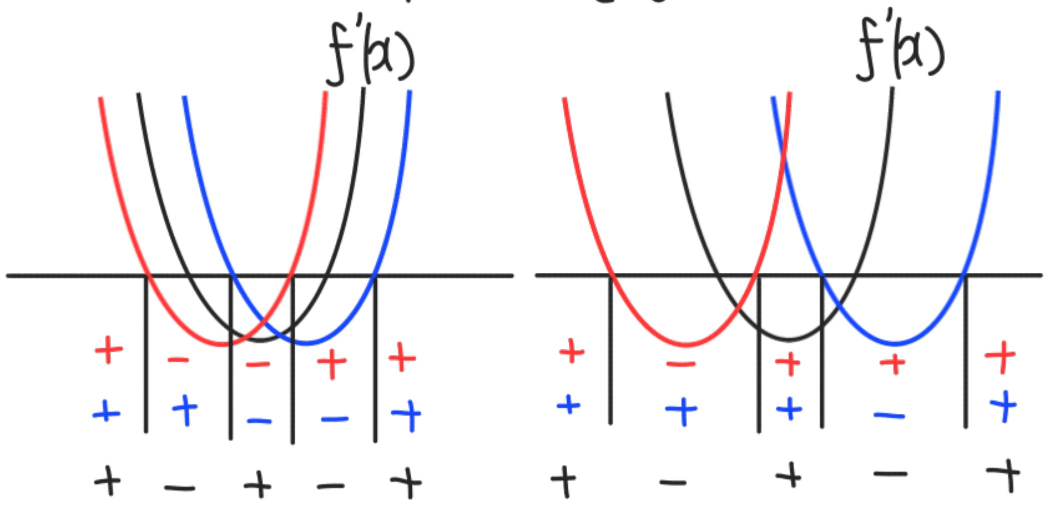
$g'(x) = f'(x+a) \cdot f'(x-a)$

① $f'(x)=0$ 의 $D \le 0$ 인 경우

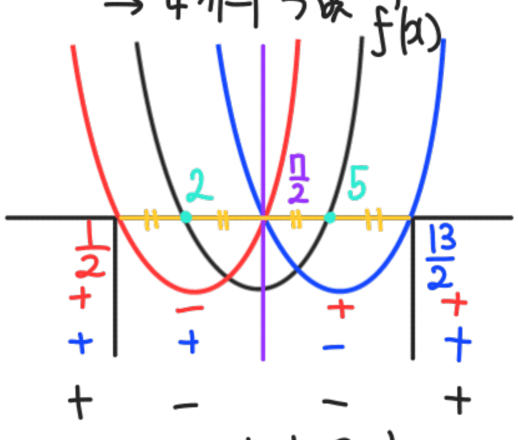
항상 $f'(x) \ge 0$. $f'(x+a)f'(x-a) \ge 0$.

극값 없다

② $f'(x)=0$ 의 $D>0$ 인 경우



→ 4개의 극값 → 4개의 극값



→ 2개의 극값

$f'(x) = 3 \cdot (x-2)(x-5)$

$= 3x^2 - 21x + 30$

$f(x) = x^3 - \frac{21}{2}x^2 + 30x - \frac{1}{2}$

$f(1) = 1 + 30 - 11 = 20$

$a = \frac{13}{2} - 5 = \frac{3}{2}$

$a \times f(1) = \frac{3}{2} \times 20 = \boxed{30}$

※ 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

○ 이어서, 「선택과목(확률과 통계)」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

수학 영역(확률과 통계)

제 2 교시

5지선다형

23. ${}_{n}\mathrm{H}_2 = {}_{9}\mathrm{C}_2$일 때, 자연수 n의 값은? [2점]

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

$* \; {}_{n}\mathrm{H}_{r} = {}_{n+r-1}\mathrm{C}_{r}$

${}_{n}\mathrm{H}_2 = {}_{n+1}\mathrm{C}_2 = {}_{9}\mathrm{C}_2$

$n+1=9.\quad n=8.$

24. 3 이상의 자연수 n에 대하여 다항식 $(x+2)^n$의 전개식에서 x^2의 계수와 x^3의 계수가 같을 때, n의 값은? [3점]

① 7 ② 8 ③ 9 ④ 10 ⑤ 11

${}_{n}\mathrm{C}_2 \times 2^{n-2} = {}_{n}\mathrm{C}_3 \times 2^{n-3}$

$\dfrac{\cancel{n \times (n-1)}}{2} \times \cancel{2^{n-2}} = \dfrac{\cancel{n \times (n-1)} \times (n-2)}{3!} \times \cancel{2^{n-3}}$

$n-2 = 3! = 6$

$n=8$

25. 두 집합 $X=\{1, 2, 3, 4, 5\}$, $Y=\{1, 2, 3\}$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 $f: X \to Y$의 개수는? [3점]

> 집합 X의 모든 원소 x에 대하여 $x \times f(x) \le 10$이다.

① 102 ② 105 ③ 108 ④ 111 ⑤ 114

$1 \cdot f(1) \le 10$ $f(1)=1,2,3 \to 3$가지

$2 \cdot f(2) \le 10$ $f(2)=1,2,3 \to 3$

$3 \cdot f(3) \le 10$ $f(3)=1,2,3 \to 3$

$4 \cdot f(4) \le 10$ $f(4)=1,2 \to 2$

$5 \cdot f(5) \le 10$ $f(5)=1,2 \to 2$

$3 \times 3 \times 3 \times 2 \times 2$

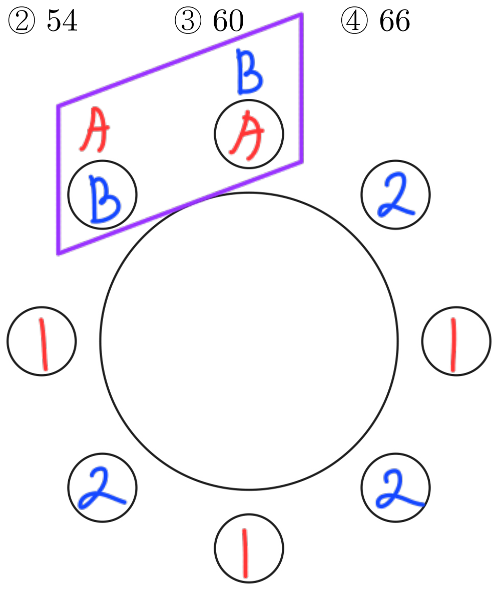
$= 3 \times 36$

$= 108$

26. 학생 A를 포함한 4명의 1학년 학생과 학생 B를 포함한 4명의 2학년 학생이 있다. 이 8명의 학생이 일정한 간격을 두고 원 모양의 탁자에 다음 조건을 만족시키도록 모두 둘러앉는 경우의 수는? (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.) [3점]

> (가) 1학년 학생끼리는 이웃하지 않는다.
> (나) A와 B는 이웃한다.

① 48 ② 54 ③ 60 ④ 66 ⑤ 72



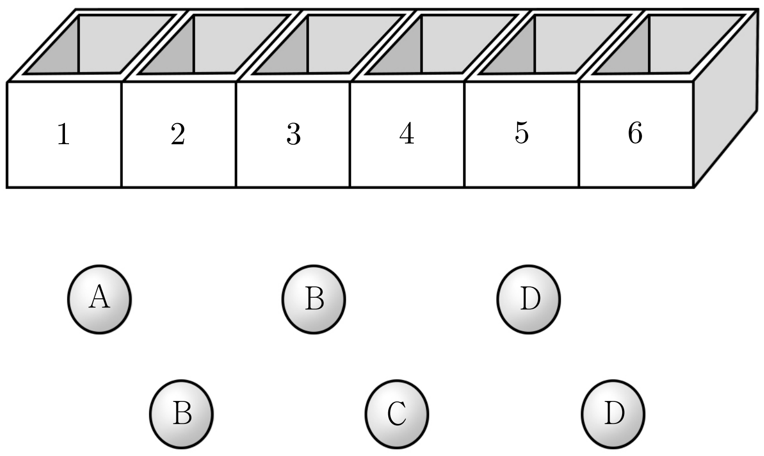
AB 또는 BA

$2 \times 3! \times 3! = 72$

1학년 3명 2학년 3명

수학 영역(확률과 통계)

27. 그림과 같이 A, B, B, C, D, D의 문자가 각각 하나씩 적힌 6개의 공과 1, 2, 3, 4, 5, 6의 숫자가 각각 하나씩 적힌 6개의 빈 상자가 있다.



각 상자에 한 개의 공만 들어가도록 6개의 공을 나누어 넣을 때, 다음 조건을 만족시키는 경우의 수는? (단, 같은 문자가 적힌 공끼리는 서로 구별하지 않는다.) [3점]

> (가) 숫자 1이 적힌 상자에 넣는 공은 문자 A 또는 문자 B가 적힌 공이다.
> (나) 문자 B가 적힌 공을 넣는 상자에 적힌 수 중 적어도 하나는 문자 C가 적힌 공을 넣는 상자에 적힌 수보다 작다.

① 80 ② 85 ③ 90 ④ 95 ⑤ 100

① $1 = B$

B					

남은 B, C 가 어디 있든 (나) 성립

A, B, C, D, D 나열 $\frac{5!}{2!} = 60$

② $1 = A$

A	X	X	X	D	D
	B	B	C		
	B	C	B		
	~~C~~	~~B~~	~~B~~		

X, X, X, D, D 나열 → $\frac{5!}{3!2!} = 10$

$\times$

X는 BBC 또는 BCB → 2

$= 20$

$60 + 20 = 80$

28. 다음 조건을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c, d, e의 모든 순서쌍 (a, b, c, d, e)의 개수는? [4점]

> (가) $a+b+c+d+e=10$
> (나) $|a-b+c-d+e| \le 2$

① 359 ② 363 ③ 367 ④ 371 ⑤ 375

$$-2 \le a-b+c-d+e \le 2$$
$$+)\quad a+b+c+d+e = 10$$
$$8 \le 2(a+c+e) \le 12$$

$$4 \le a+c+e \le 6$$
$$= 4, 5, 6$$

$a+c+e$		$b+d$		
4	→ ${}_3H_4$	6	→ ${}_2H_6$	${}_3H_4 \times {}_2H_6$
5	→ ${}_3H_5$	5	→ ${}_2H_5$	${}_3H_5 \times {}_2H_5$
6	→ ${}_3H_6$	4	→ ${}_2H_4$	${}_3H_6 \times {}_2H_4$

$${}_3H_4 \times {}_2H_6 + {}_3H_5 \times {}_2H_5 + {}_3H_6 \times {}_2H_4$$
$$= {}_6C_2 \times 7 + {}_7C_2 \times 6 + {}_8C_2 \times 5$$
$$= 105 + 126 + 140$$
$$= 371$$

단답형

29. 숫자 0, 1, 2 중에서 중복을 허락하여 5개를 선택한 후 일렬로 나열하여 다섯 자리의 자연수를 만들려고 한다. 숫자 0과 1을 각각 1개 이상씩 선택하여 만들 수 있는 모든 자연수의 개수를 구하시오. [4점]

(5자리 자연수) − (0 없다 OR 1 없다)

= (5자리 자연수) − (0 없다) − (1없다) + (0 없다 & 1 없다)

① (5자리 자연수), ② (0 없다): 1 또는 2, ③ (1없다): 0 또는 2, ④ (0 없다 & 1 없다): 2만 사용

$= 2\times 3^4 - 2^5 - 2^4 + 1$

$= 162 - 32 - 16 + 1$

$= 115$ $\boxed{115}$

□ □ □ □ □

① 1/2, 0/1/2, 0/1/2, 0/1/2, 0/1/2 → 2×3^4

② 1/2, 1/2, 1/2, 1/2, 1/2 → 2^5

③ 2, 0/2, 0/2, 0/2, 0/2 → 1×2^4

④ 2, 2, 2, 2, 2 → 1

30. 집합 $X=\{1, 2, 3, 4, 5\}$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 $f: X \to X$의 개수를 구하시오. [4점]

(가) $f(1)+f(2)+f(3)+f(4)+f(5)$는 짝수이다.
(나) 함수 f의 치역의 원소의 개수는 3이다. → {홀 1, 짝 2 / 홀 2, 짝 1}

	홀수	짝수
①	4개	1개
②	2개	3개

① 홀수 4개, 짝수 1개,
치역 3개 = 홀수 2개 + 짝수 1개

		정의역	공역	대응
1, 2, 3, 4	①, ②, ③	$_5C_4$	$\times {}_3C_2$	$\times (2^4-2)$
5	4, 5	$\times 1$	$\times {}_2C_1$	$\times 1$

$= 420$

②-1 홀수 2개, 짝수 3개,
치역 3개 = 홀수 2개 + 짝수 1개

		정의역	공역	대응
1, 2	①, ②, ③	$_5C_2$	$\times {}_3C_2$	$\times (2^2-2)$
3, 4, 5	4, 5	$\times 1$	$\times {}_2C_1$	$\times 1$

$= 120$

②-2 홀수 2개, 짝수 3개,
치역 3개 = 홀수 1개 + 짝수 2개

		정의역	공역	대응
1, 2	①, ②, 3	$_5C_2$	$\times {}_3C_1$	$\times 1$
3, 4, 5	④, 5	$\times 1$	$\times {}_2C_2$	$\times (2^3-2)$

$= 180$

$420+120+180 = 720$

$\boxed{720}$

수학 영역(미적분)

제 2 교시

5지선다형

23. 함수 $f(x)=(x+a)e^{x}$에 대하여 $f'(2)=8e^{2}$일 때, 상수 a의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$f'(x) = 1\cdot e^{x} + (x+a)\cdot e^{x}$

$= (x+a+1)e^{x}$

$f'(2) = (a+3)e^{2} = 8e^{2}$

$a=5$

24. $\sec\theta = \dfrac{\sqrt{10}}{3}$일 때, $\sin^{2}\theta$의 값은? [3점]

① $\dfrac{1}{10}$ ② $\dfrac{3}{20}$ ③ $\dfrac{1}{5}$ ④ $\dfrac{1}{4}$ ⑤ $\dfrac{3}{10}$

$\sec\theta = \dfrac{1}{\cos\theta} = \dfrac{\sqrt{10}}{3}$

$\cos\theta = \dfrac{3}{\sqrt{10}}$

$\cos^{2}\theta = \dfrac{9}{10}$, $\sin^{2}\theta = \dfrac{1}{10}$

25. $\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{\ln(2x^2+3x)-\ln 3x}{x}$ 의 값은? [3점]

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{2}{3}$ ④ $\frac{5}{6}$ ⑤ 1

$$\frac{\ln\left(\frac{2x}{3}+1\right)}{x} = \frac{\ln\left(1+\boxed{\frac{2x}{3}}\right)}{\boxed{\frac{2}{3}x}} \times \frac{2}{3} \to \frac{2}{3}$$

26. 함수

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{3\times\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+1}-1}{\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}+1}$$

$$\frac{-3-1}{1+1}$$

에 대하여 $f(k)=k$를 만족시키는 모든 실수 k의 값의 합은? [3점]

y=x 교점

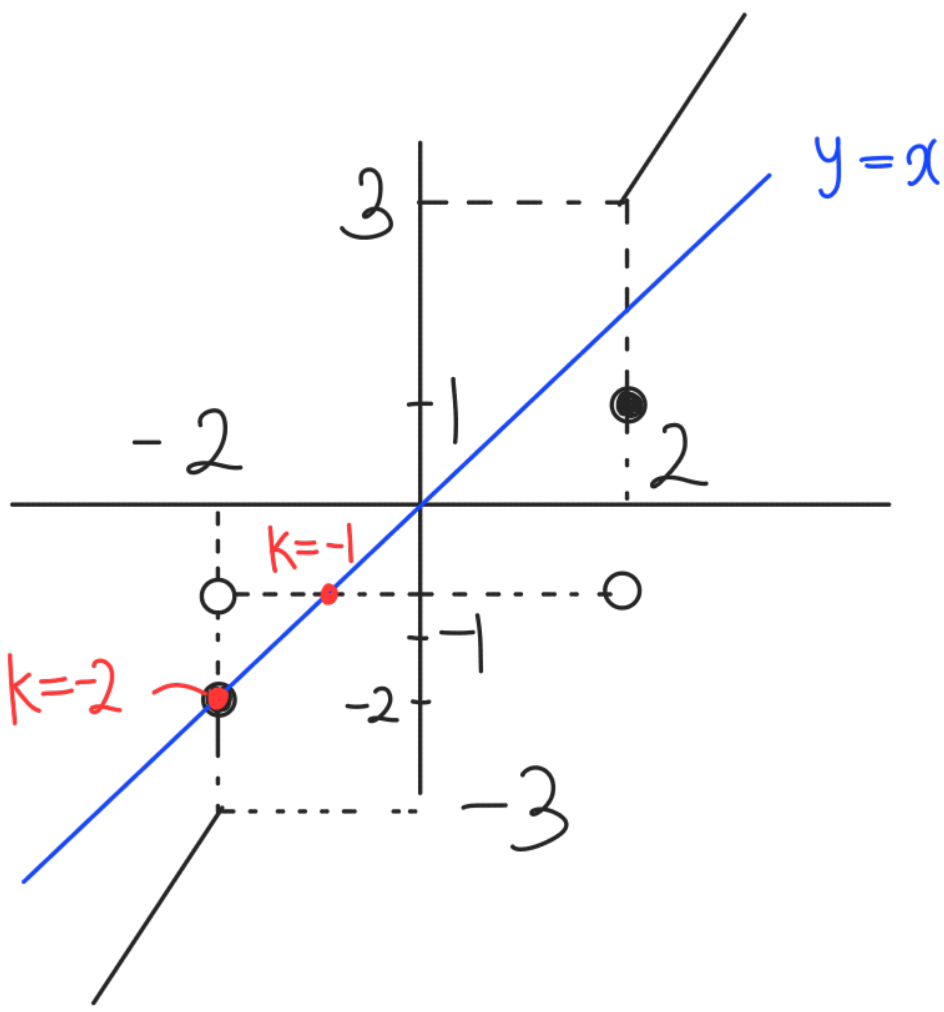
① -6 ② -5 ③ -4 ④ -3 ⑤ -2

$\left|\frac{x}{2}\right|>1$ $$\frac{3\cdot\frac{x}{2}-\boxed{\frac{1}{\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}}}\,0}{1+\boxed{\frac{1}{\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}}}\,0} \to \frac{3}{2}x$$

$\left|\frac{x}{2}\right|<1$ $$\frac{3\cdot 0-1}{0+1}=-1$$

$\frac{x}{2}=1$ $$\frac{3\times 1-1}{1+1}=1$$

$\frac{x}{2}=-1$ $$\frac{3\times(-1)-1}{1+1}=-2$$

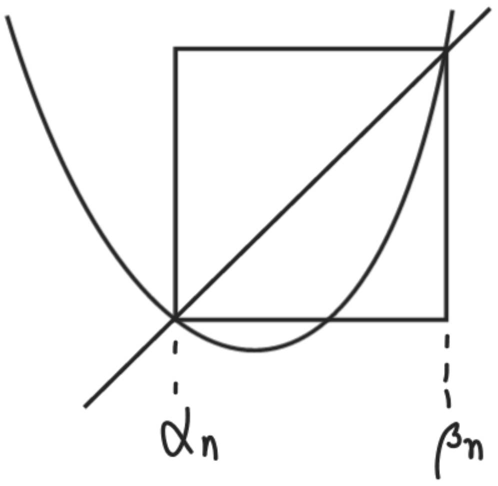


① 원주 위의 점 → 직각 원주각
② o, x 표시해서 닮은 직각 삼각형 찾기 & 공식
③ 특수각, 정형적 도형 ⇒ 좌표 풀이 3 가능

수학 영역(미적분)

27. 자연수 n에 대하여 곡선 $y=x^2-2nx-2n$이 직선 $y=x+1$과 만나는 두 점을 각각 P_n, Q_n이라 하자. 선분 $\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n$을 대각선으로 하는 정사각형의 넓이를 a_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{10}$ ② $\frac{2}{15}$ ③ $\frac{1}{6}$ ④ $\frac{1}{5}$ ⑤ $\frac{7}{30}$



$x^2-2nx-2n=x+1$

$x^2-(2n+1)x-2n-1=0$ 두 근 α_n, β_n

$\alpha_n+\beta_n=2n+1,\quad \alpha_n\times\beta_n=-2n-1$

$a_n=(\beta_n-\alpha_n)^2=(\alpha_n+\beta_n)^2-4\alpha_n\times\beta_n$

$=(2n+1)^2+8n+4$

$=4n^2+12n+5$

$=(2n+1)(2n+5)$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)(2n+5)}=\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+5}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\lim_{n\to\infty}\left\{\left(\frac{1}{3}-\cancel{\frac{1}{7}}\right)+\left(\frac{1}{5}-\cancel{\frac{1}{9}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{7}}-\cancel{\frac{1}{11}}\right)+\cdots+\left(\cancel{\frac{1}{2n-1}}-\frac{1}{2n+3}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{2n+1}}-\frac{1}{2n+5}\right)\right\}$$

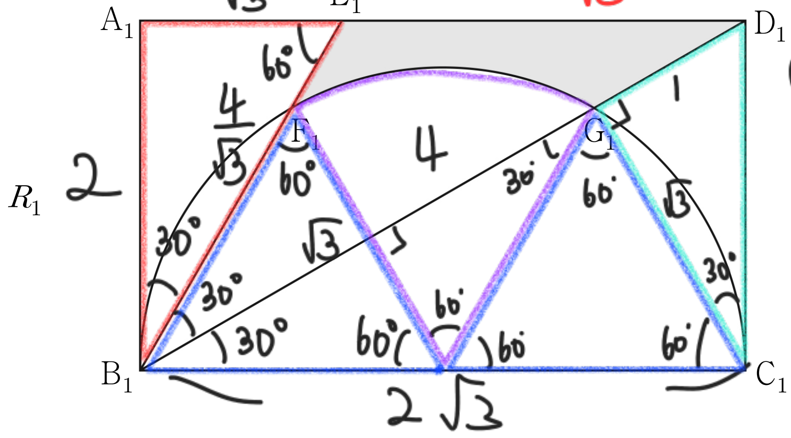
0 0

$=\frac{1}{4}\times\frac{8}{15}$

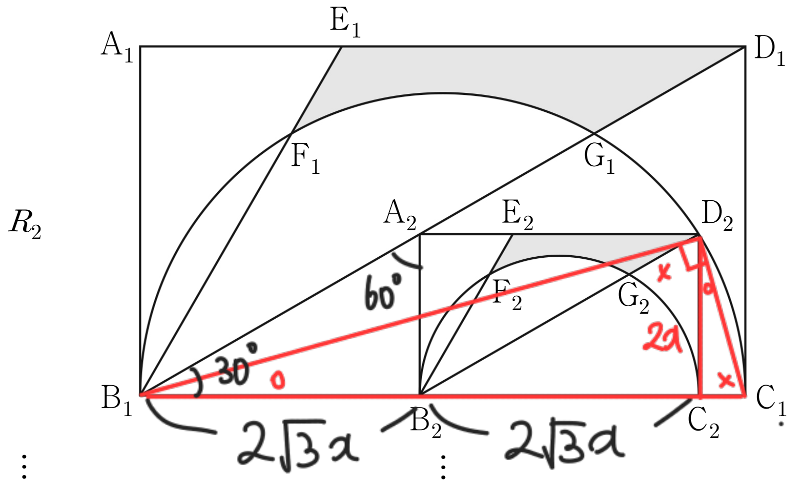
$=\frac{2}{15}$

28. 그림과 같이 $\overline{\mathrm{A_1B_1}}=2$, $\overline{\mathrm{B_1C_1}}=2\sqrt{3}$인 직사각형 $\mathrm{A_1B_1C_1D_1}$이 있다. 선분 $\mathrm{A_1D_1}$을 $1:2$로 내분하는 점을 $\mathrm{E_1}$이라 하고 선분 $\mathrm{B_1C_1}$을 지름으로 하는 반원의 호 $\mathrm{B_1C_1}$이 두 선분 $\mathrm{B_1E_1}$, $\mathrm{B_1D_1}$과 만나는 점 중 점 $\mathrm{B_1}$이 아닌 점을 각각 $\mathrm{F_1}$, $\mathrm{G_1}$이라 하자. 세 선분 $\mathrm{F_1E_1}$, $\mathrm{E_1D_1}$, $\mathrm{D_1G_1}$과 호 $\mathrm{F_1G_1}$로 둘러싸인 ▱ 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.
그림 R_1에 선분 $\mathrm{B_1G_1}$ 위의 점 $\mathrm{A_2}$, 호 $\mathrm{G_1C_1}$ 위의 점 $\mathrm{D_2}$와 선분 $\mathrm{B_1C_1}$ 위의 두 점 $\mathrm{B_2}$, $\mathrm{C_2}$를 꼭짓점으로 하고 $\overline{\mathrm{A_2B_2}}:\overline{\mathrm{B_2C_2}}=1:\sqrt{3}$인 직사각형 $\mathrm{A_2B_2C_2D_2}$를 그린다. 직사각형 $\mathrm{A_2B_2C_2D_2}$에 그림 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로 ▱ 모양의 도형을 그리고 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}S_n$의 값은? [4점]

$\frac{2}{\sqrt{3}}a=4\sqrt{3}-\frac{2}{\sqrt{3}}-2\times\frac{3\sqrt{3}}{4}-\frac{\pi}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}$

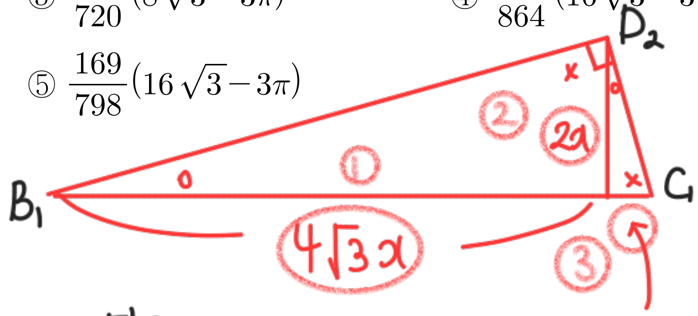


$a=\frac{8\sqrt{3}-3\pi}{6}$



⋮ ⋮

① $\frac{169}{864}(8\sqrt{3}-3\pi)$ ② $\frac{169}{798}(8\sqrt{3}-3\pi)$ ③ $\frac{169}{720}(8\sqrt{3}-3\pi)$ ④ $\frac{169}{864}(16\sqrt{3}-3\pi)$ ⑤ $\frac{169}{798}(16\sqrt{3}-3\pi)$



닮음 ⇒ ①,②,③ 등비 ⇒ ③ $=\frac{a}{\sqrt{3}}$

$\overline{\mathrm{B_1C_1}}=2\sqrt{3}=\left(4\sqrt{3}+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)x=\frac{13}{\sqrt{3}}x$

$x=\frac{6}{13}$

$\frac{a}{1-x^2}$

$=\frac{8\sqrt{3}-3\pi}{6}\times\frac{1}{1-\frac{36}{169}}$

$=\frac{8\sqrt{3}-3\pi}{6}\times\frac{169}{133}$

$=\frac{169(8\sqrt{3}-3\pi)}{798}$

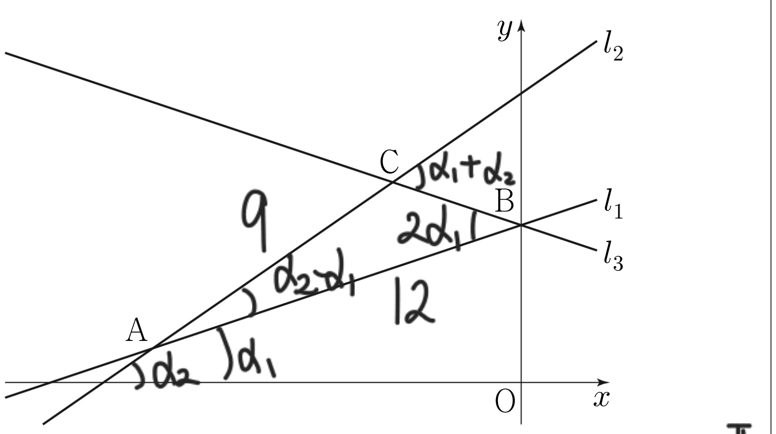
삼각함수는 대칭성이 중요

단답형

29. 그림과 같이 좌표평면 위의 제2사분면에 있는 점 A를 지나고 기울기가 각각 m_1, $m_2(0<m_1<m_2<1)$인 두 직선을 l_1, l_2라 하고, 직선 l_1을 y축에 대하여 대칭이동한 직선을 l_3이라 하자. 직선 l_3이 두 직선 l_1, l_2와 만나는 점을 각각 B, C라 하면 삼각형 ABC가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $\overline{AB}=12$, $\overline{AC}=9$
>
> (나) 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이는 $\frac{15}{2}$이다.

$78\times m_1\times m_2$의 값을 구하시오. [4점]



$\tan\alpha_1=m_1$ $\quad\tan\alpha_2=m_2$ $\left(0<\alpha_1<\alpha_2<\frac{\pi}{4}\right)$

$\tan(-\alpha_1)=m_3=-m_1$

$$\frac{9}{\sin 2\alpha_1}=\frac{12}{\sin(\alpha_1+\alpha_2)}=2\cdot\frac{15}{2}=15$$

$$\sin 2\alpha_1=\frac{3}{5},\quad \sin(\alpha_1+\alpha_2)=\frac{4}{5}$$

$$\cos 2\alpha_1=\frac{4}{5},\quad \cos(\alpha_1+\alpha_2)=\frac{3}{5}$$

$$=\cos\alpha_1\cos\alpha_1-\sin\alpha_1\sin\alpha_1$$

$$\frac{4}{5}=2\cos^2\alpha_1-1,\quad \cos^2\alpha_1=\frac{9}{10},\quad \sin^2\alpha_1=\frac{1}{10}$$

$$\cos\alpha_1=\frac{3}{\sqrt{10}},\quad \sin\alpha_1=\frac{1}{\sqrt{10}}\quad m_1=\tan\alpha_1=\frac{1}{3}$$

$$\tan(\alpha_1+\alpha_2)=\frac{4}{3}.$$

$$m_2=\tan\alpha_2=\tan((\alpha_1+\alpha_2)-\alpha_1)$$

$$=\frac{\tan(\alpha_1+\alpha_2)-\tan\alpha_1}{1+\tan(\alpha_1+\alpha_2)\tan\alpha_1}=\frac{\frac{4}{3}-\frac{1}{3}}{1+\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{3}}=\frac{9}{13}$$

$$78\times\frac{1}{3}\times\frac{9}{13}=\boxed{18}$$

30. 함수 $f(x)=a\cos x+x\sin x+b$와 $-\pi<\alpha<0<\beta<\pi$인 두 실수 α, β가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $f'(\alpha)=f'(\beta)=0$
>
> (나) $\dfrac{\tan\beta-\tan\alpha}{\beta-\alpha}+\dfrac{1}{\beta}=0$

$\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x^2}=c$일 때, $f\left(\frac{\beta-\alpha}{3}\right)+c=p+q\pi$이다. 두 유리수 p, q에 대하여 $120\times(p+q)$의 값을 구하시오. (단, a, b, c는 상수이고, $a<1$이다.) [4점]

$$f'(x)=-a\sin x+\sin x+x\cos x=0$$

$$(a-1)\sin x=x\cos x,\quad \tan x=\frac{x}{a-1}\quad ⊛$$

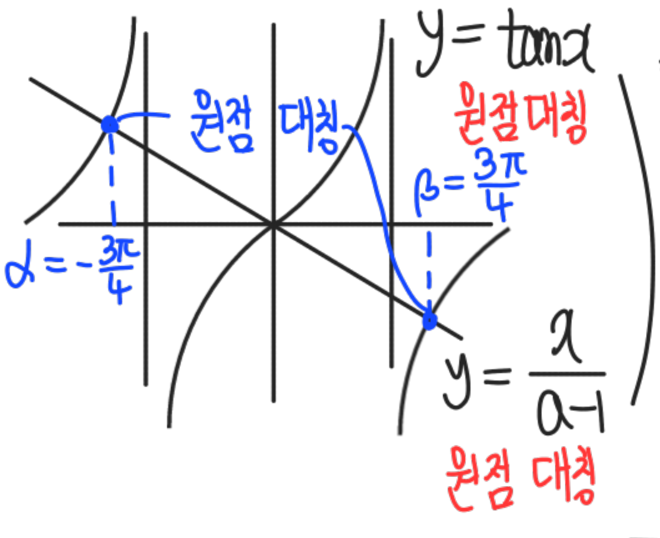
의 두 근 α,β $\quad\tan\alpha=\frac{\alpha}{a-1},\ \tan\beta=\frac{\beta}{a-1}$

(나)에 대입: $\frac{1}{a-1}+\frac{1}{\beta}=0,\ \beta=1-a$

⊛에 $x=\beta=1-a$ 대입: $\tan\beta=-1,\ \beta=\frac{3\pi}{4}$

$$\frac{f(x)}{x^2}=\frac{a\cos x+x\sin x+b}{x^2}=\frac{\sin x}{x}+b\,\frac{1-\cos x}{x^2}\to1+\frac{b}{2}=c$$

(분자)$\to0=a+b,\ b=-a$



$\Rightarrow\alpha=-\frac{3\pi}{4}\quad\beta=\frac{3\pi}{4}$

$a=1-\frac{3\pi}{4}$

$b=-1+\frac{3\pi}{4}$

$c=\frac{1}{2}+\frac{3\pi}{8}$

$$f\left(\frac{\beta-\alpha}{3}\right)+c=f\left(\frac{\pi}{2}\right)+c$$

$$=\frac{\pi}{2}+b+c=-\frac{1}{2}+\frac{13}{8}\pi$$

※ 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

○ 이어서, 「선택과목(기하)」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

$$120\times\left(-\frac{1}{2}+\frac{13}{8}\right)=-60+15\cdot13=-60+14^2-1=-60+195=135$$

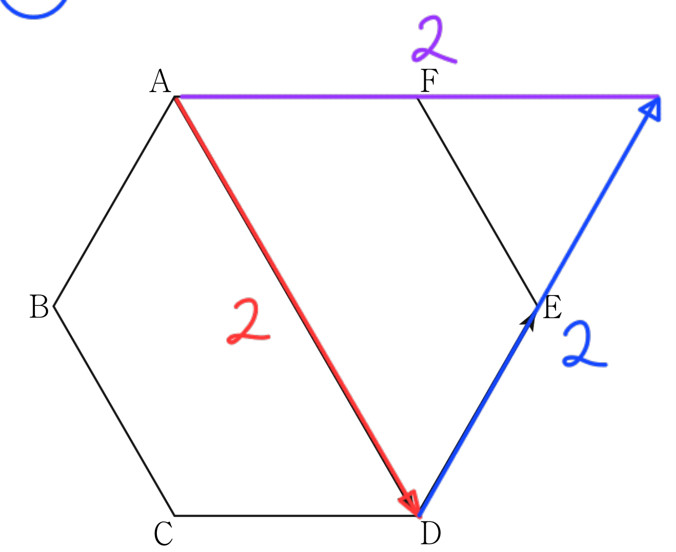
$\boxed{135}$

수학 영역(기하)

제 2 교시

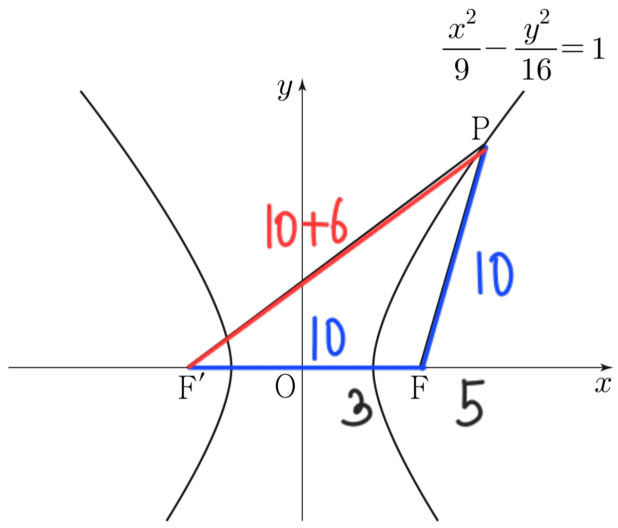
5지선다형

23. 그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정육각형 ABCDEF에서 $|\overrightarrow{AD}+2\overrightarrow{DE}|$의 값은? [2점]



① 1 ② $\sqrt{3}$ ③ 2 ④ 3 ⑤ $2\sqrt{3}$

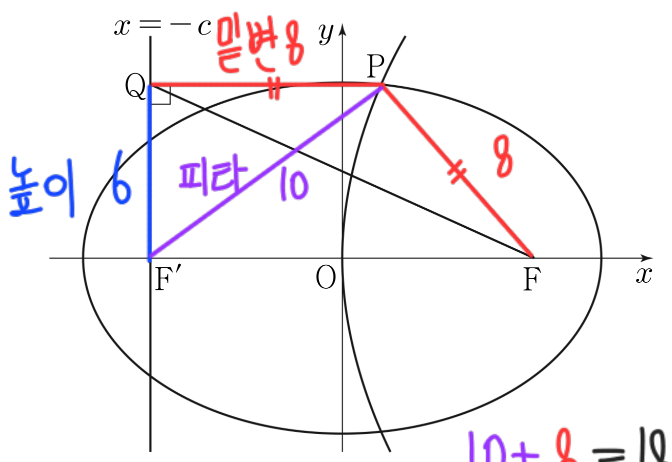
24. 그림과 같이 두 초점이 F$(c,\ 0)$, F$'(-c,\ 0)$$(c>0)$인 쌍곡선 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$이 있다. 쌍곡선 위의 점 중 제1사분면에 있는 점 P에 대하여 $\overline{\mathrm{FP}}=\overline{\mathrm{FF'}}$일 때, 삼각형 PF$'$F의 둘레의 길이는? [3점]



① 35 ② 36 ③ 37 ④ 38 ⑤ 39

25. 그림과 같이 두 점 $\mathrm{F}(c,\,0)$, $\mathrm{F}'(-c,\,0)\,(c>0)$을 초점으로 하는 타원과 꼭짓점이 원점 O이고 점 F를 초점으로 하는 포물선이 있다. 타원과 포물선이 만나는 점 중 제1사분면 위의 점을 P라 하고, 점 P에서 직선 $x=-c$에 내린 수선의 발을 Q라 하자. $\overline{\mathrm{FP}}=8$이고 삼각형 FPQ의 넓이가 24일 때, 타원의 장축의 길이는? [3점]

$=\frac{1}{2}\times 8\times 6$

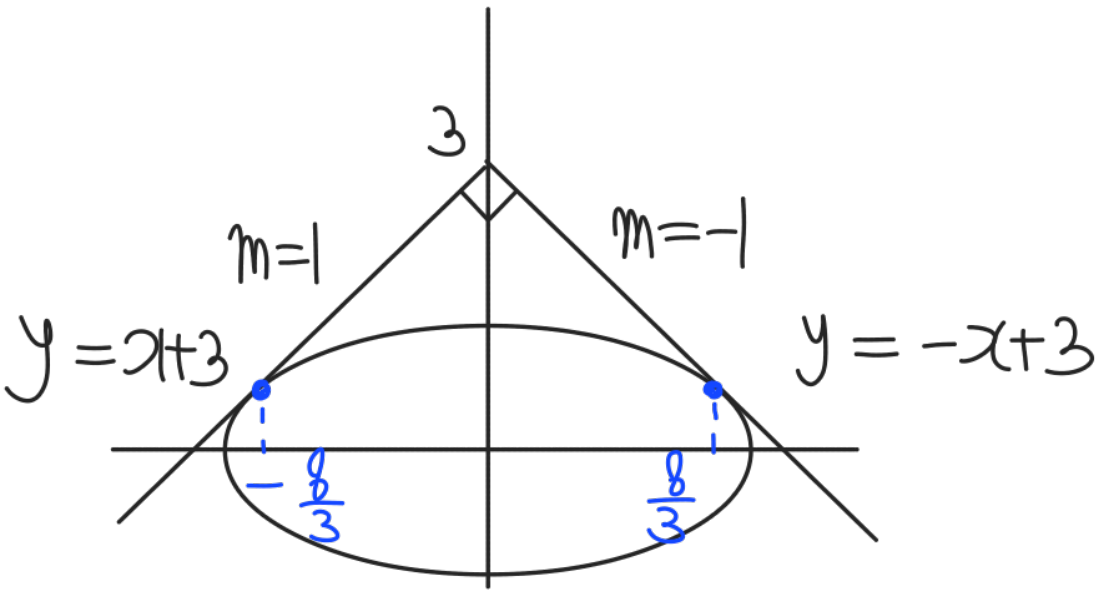


$10+8=18$

① 18　　② 19　　③ 20　　④ 21　　⑤ 22

26. y축 위의 점 A에서 타원 $C:\,\frac{x^2}{8}+y^2=1$에 그은 두 접선을 l_1, l_2라 하고, 두 직선 l_1, l_2가 타원 C와 만나는 점을 각각 P, Q라 하자. 두 직선 l_1, l_2가 서로 수직일 때, 선분 PQ의 길이는? (단, 점 A의 y좌표는 1보다 크다.) [3점]

① 4　　② $\frac{13}{3}$　　③ $\frac{14}{3}$　　④ 5　　⑤ $\frac{16}{3}$



$y=mx\pm\sqrt{a^2m^2+b^2}$

$y=x\pm\sqrt{8\cdot 1^2+1}$

$y=x\pm 3$,　　$x^2+8y^2=8$

$x^2+8(x+3)^2=8$

$9x^2+48x+64=(3x+8)^2=0$

$x=-\frac{8}{3}$,　　$\frac{16}{3}$

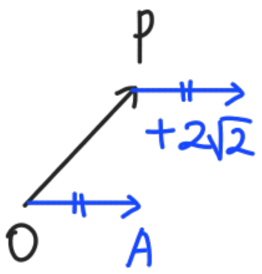
① 거리 같은 세 점 ⇒ 원
② 내접원 반지름 이용한 삼각형 넓이 $\frac{r}{2}(a+b+c)=\frac{ah}{2}$

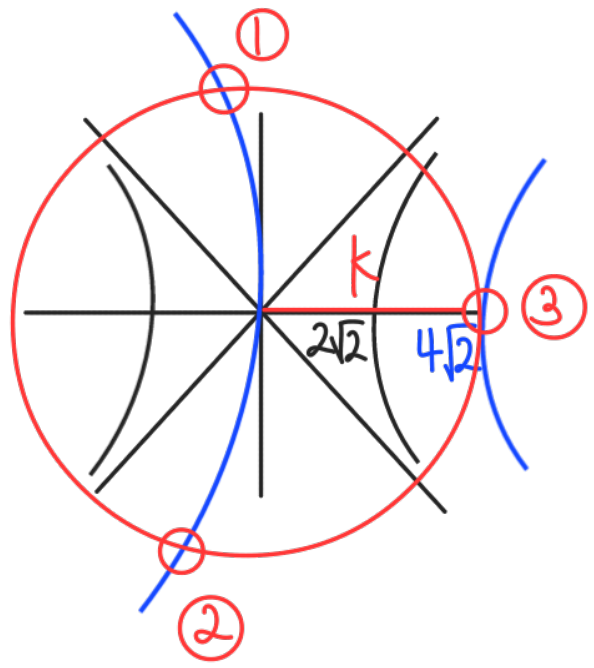
27. 쌍곡선 $\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2}=1$의 꼭짓점 중 x좌표가 양수인 점을 A라 하자. 이 쌍곡선 위의 점 P에 대하여 $|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OP}|=k$를 만족시키는 점 P의 개수가 3일 때, 상수 k의 값은? (단, O는 원점이다.) [3점]

① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ 2 ④ $2\sqrt{2}$ ⑤ 4

A$(2\sqrt{2}, 0)$

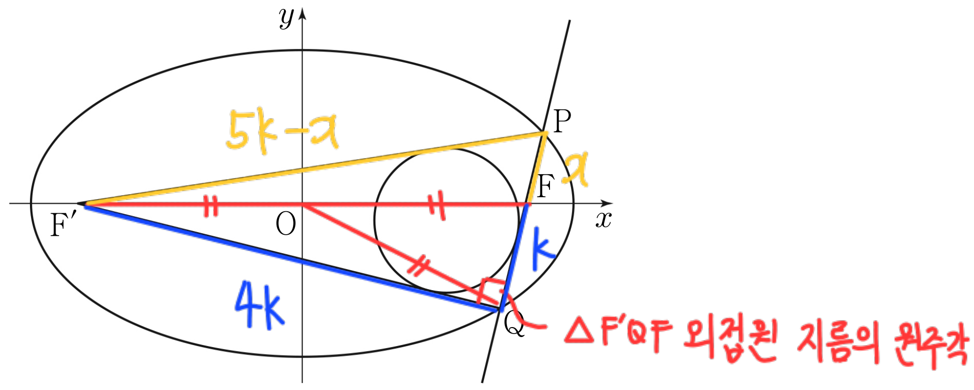
쌍곡선 위의 점 P를 x축 방향 $+2\sqrt{2}$ 평행이동





$k=4\sqrt{2}$

28. 그림과 같이 두 점 F$(c, 0)$, F$'(-c, 0)$을 초점으로 하는 타원이 있다. 타원 위의 점 중 제1사분면에 있는 점 P에 대하여 직선 PF가 타원과 만나는 점 중 점 P가 아닌 점을 Q라 하자. $\overline{OQ}=\overline{OF}$, $\overline{FQ}:\overline{F'Q}=1:4$이고 삼각형 PF$'$Q의 내접원의 반지름의 길이가 2일 때, 양수 c의 값은? (단, O는 원점이다.) [4점]

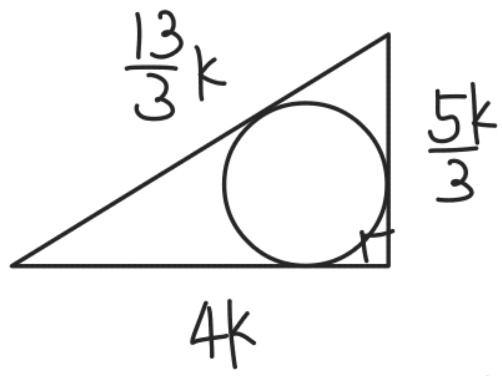


① $\frac{17}{3}$ ② $\frac{7\sqrt{17}}{5}$ ③ $\frac{3\sqrt{17}}{2}$
④ $\frac{51}{8}$ ⑤ $\frac{8\sqrt{17}}{5}$

$(5k-x)^2=(x+k)^2+(4k)^2$

$-10kx+25k^2=2kx+17k^2$

$8k^2=12kx$, $x=\frac{2}{3}k$

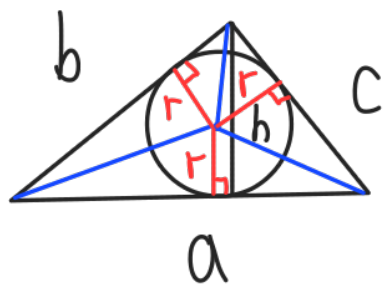


$S=\frac{1}{2}\times 4k\times\frac{5k}{3}$

$=\cancel{\frac{1}{2}}\times\left(4k+\frac{5k}{3}+\frac{13k}{3}\right)\times\cancel{r}$ $r=2$

$\frac{10k^2}{3}=10k$, $k=3$

$\overline{FF'}=\sqrt{17}k=3\sqrt{17}$, $c=\frac{3\sqrt{17}}{2}$



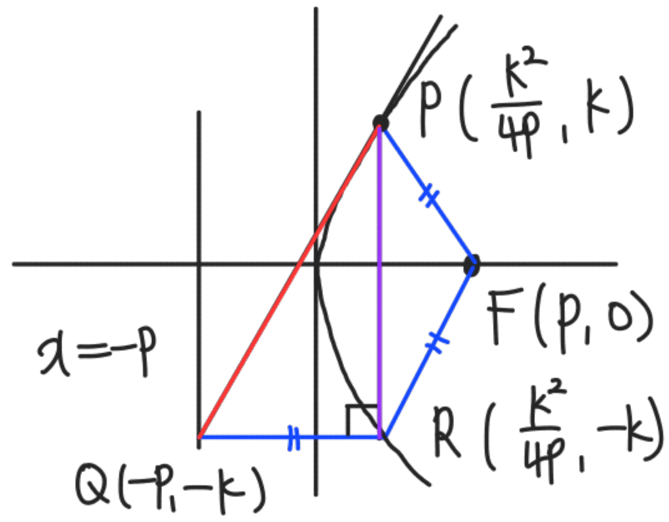
$\frac{1}{2}\times a\times h=\frac{ar}{2}+\frac{br}{2}+\frac{cr}{2}$

$=\frac{r}{2}(a+b+c)$

단답형

29. 초점이 F인 포물선 $y^2=4px\,(p>0)$에 대하여 이 포물선 위의 점 중 제1사분면에 있는 점 P에서의 접선이 직선 $x=-p$와 만나는 점을 Q라 하고, 점 Q를 지나고 직선 $x=-p$에 수직인 직선이 포물선과 만나는 점을 R라 하자.

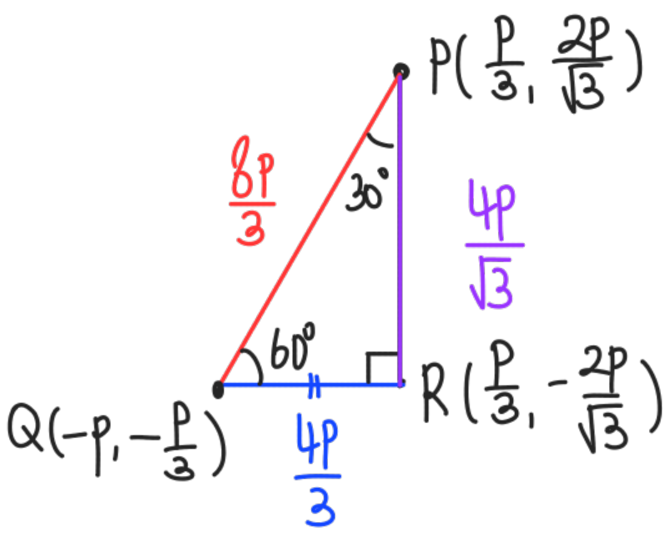
$\angle \mathrm{PRQ}=\frac{\pi}{2}$일 때, 사각형 PQRF의 둘레의 길이가 140이 되도록 하는 상수 p의 값을 구하시오. [4점]



$y^2=4px$ 위의 점 $P(\frac{k^2}{4p}, k)$에서 접선

$ky=2p(x+\frac{k^2}{4p})$, ← $(-p,-k)$ 대입

$-k^2=-2p^2+\frac{k^2}{2}$, $k^2=\frac{4}{3}p^2$, $k=\frac{2}{\sqrt{3}}p$

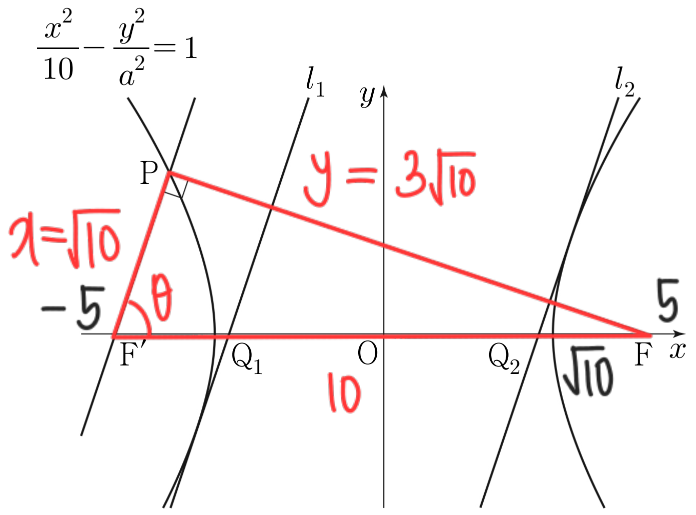


$140=\frac{8p}{3}+3\times\frac{4p}{3}=\frac{20p}{3}$

$p=21$

$\boxed{21}$

30. 그림과 같이 두 점 $\mathrm{F}(c, 0)$, $\mathrm{F'}(-c, 0)\,(c>0)$을 초점으로 하는 쌍곡선 $\frac{x^2}{10}-\frac{y^2}{a^2}=1$이 있다. 쌍곡선 위의 점 중 제2사분면에 있는 점 P에 대하여 삼각형 F′FP는 넓이가 15이고 $\angle \mathrm{F'PF}=\frac{\pi}{2}$인 직각삼각형이다. 직선 PF′과 평행하고 쌍곡선에 접하는 두 직선을 각각 l_1, l_2라 하자. 두 직선 l_1, l_2가 x축과 만나는 점을 각각 Q_1, Q_2라 할 때, $\overline{\mathrm{Q}_1\mathrm{Q}_2}=\frac{q}{p}\sqrt{3}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이고, a는 양수이다.) [4점]



$y-x=2\sqrt{10}$ $\quad \frac{1}{2}xy=15.$

$xy=30=x(x+2\sqrt{10})$

$x^2+2\sqrt{10}x-30=0$

$(x+3\sqrt{10})(x-\sqrt{10})=0$

$x=\sqrt{10}$, $y=3\sqrt{10}$ $\rightarrow 1:3:\sqrt{10}$, $\overline{F'F}=10$

$m=\tan\theta=3$ $\quad 10+a^2=25.$ $\quad a^2=15.$

$y=mx\pm\sqrt{10m^2-15}$

$y=3x\pm5\sqrt{3}$

$Q_1(-\frac{5\sqrt{3}}{3}, 0)$, $Q_2(\frac{5\sqrt{3}}{3}, 0)$. $\overline{Q_1Q_2}=\frac{10\sqrt{3}}{3}$

$\boxed{13}$

※ 확인 사항

답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

※ 시험이 시작되기 전까지 표지를 넘기지 마시오.