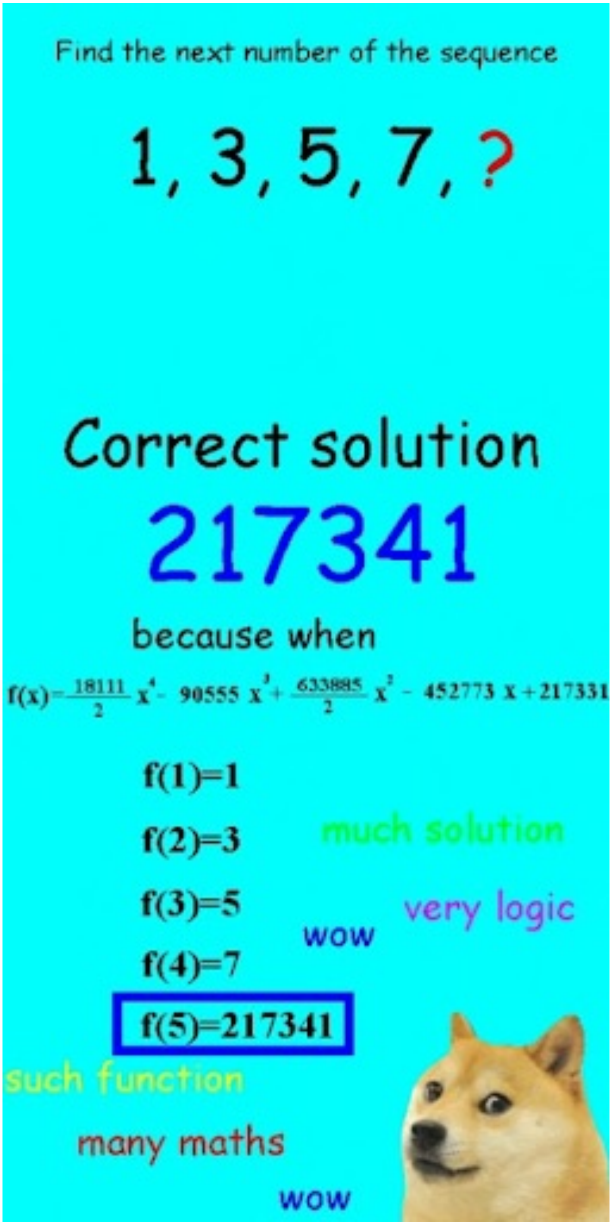
이면각의 모든 전략



xyo
889268

기하에서(특히 평면벡터나 공간도형에서) 제가 권장하고 싶은 공부법은 하**나의 문제를 최대한 다양한 방법으로 풀어보고, 풀이들을 비교하여 어떤 풀이가 가장 유리한지 확인하고, 왜 그 풀이가 유리한지 이유를 생각해보는** 것입니다.
'어떤 풀이가 유리한가'의 기준은 사람마다 조금씩 다를 수 있겠습니다. 계산이 심각하게 더럽지 않고, 발상이 적지 않아서 떠올리기 어렵지 않은 풀이라면 어떤 풀이든 좋겠습니다.

평소에 연습할 때는 시간을 오래 쓰더라도 최대한 다양하게 풀어보고, **'내가 시험장에서 이런 풀이를 떠올릴 수 있는가?'**를 고민해보셨으면 좋겠습니다.

이 글에서 다루고 싶은 것은 작년에 시행된 시험들의 공간도형 4점짜리 문제들 5개입니다.
모두 **이면각의 크기**를 구해야 하는 문제들입니다.

이면각의 크기를 구하는 방법은 교과 외를 포함하여 일반적으로 세 가지가 있습니다.
① 정의(교선 이용)
② 정사영(넓이 비교)
③ 법선벡터(평면의 방정식 완성)

이 글에서 다룰 5문제에서 이면각의 크기를 각각 세 가지 방법으로 구해볼 계획입니다.

처음부터 끝까지 완전한 풀이를 진행하지는 않을 것입니다. 5문제를 아직 풀어보지 않으신 분들은 출처를 알려드릴 테니 직접 풀어보고나서 이 글을 읽으시면 좋겠습니다.

1. 21년 7월 교육청 29번
2. 22학년도 9월 평가원 29번
3. 22학년도 사관학교 28번
4. 21년 10월 교육청 30번
5. 22학년도 수능 30번

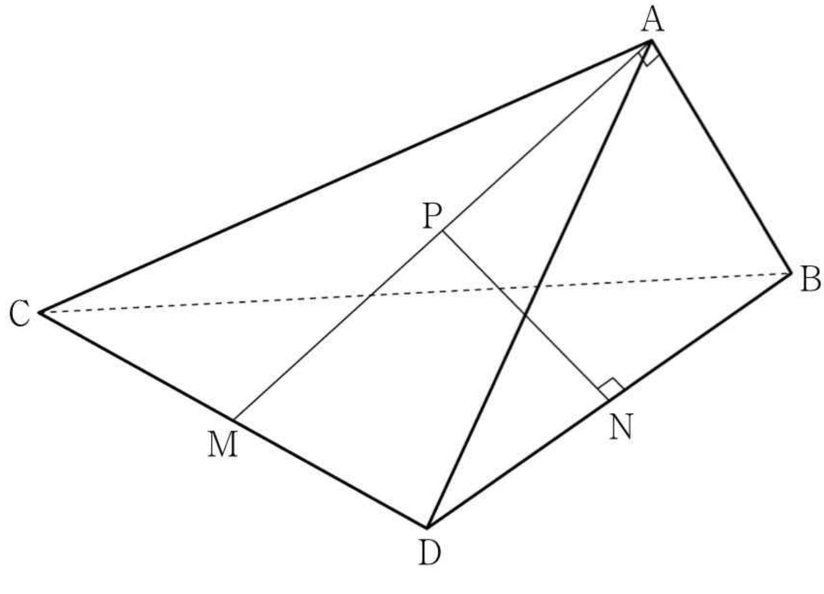
③번 풀이는 교과 외를 공부하지 않을 분들이라면 보지 않으셔도 좋습니다.

1. 21년 7월 교육청 29번

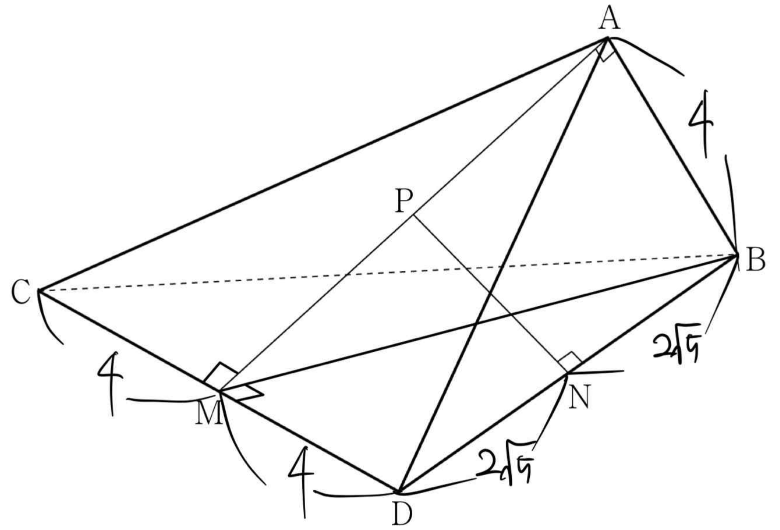
29. 그림과 같이

$$\overline{AB}=4,\ \overline{CD}=8,\ \overline{BC}=\overline{BD}=4\sqrt{5}$$

인 사면체 ABCD에 대하여 직선 AB와 평면 ACD는 서로 수직이다. 두 선분 CD, DB의 중점을 각각 M, N이라 할 때, 선분 AM 위의 점 P에 대하여 선분 DB와 선분 PN은 서로 수직이다. 두 평면 PDB와 CDB가 이루는 예각의 크기를 θ라 할 때, $40\cos^2\theta$의 값을 구하시오. [4점]

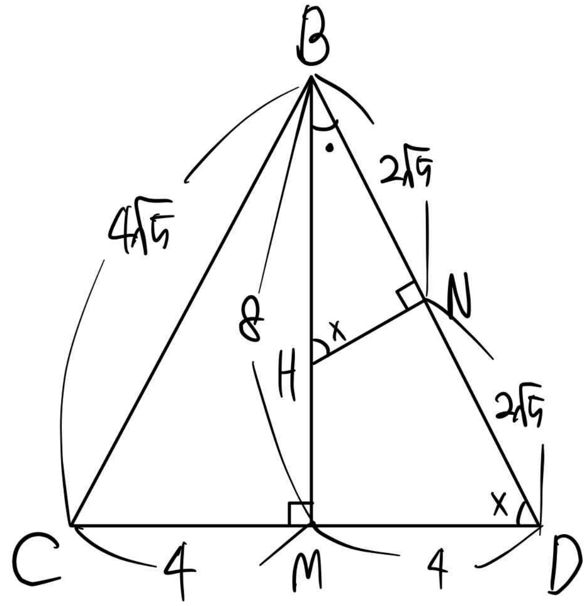


풀이 ①
사면체에 대한 설명을 줬고, 평면 PDB와 평면 CDB가 이루는 예각의 크기를 구해야 합니다.
문제에서 준 그림에 따르면 두 평면 중에서 평면 CDB가 잘 누워 있고, 두 평면의 교선은 직선 DB입니다. 일단 문제에서 준 선분들의 길이를 그림에 표시부터 합시다.



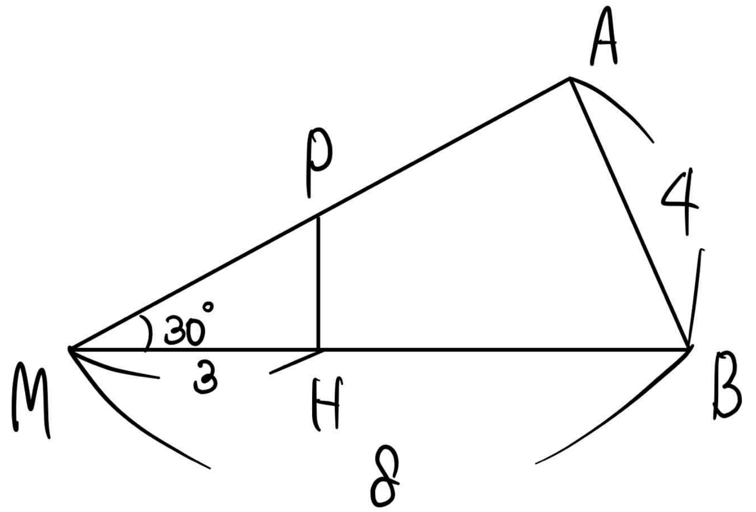
점 P에서 직선 DB에 내린 수선의 발이 N입니다. 점 P에서 평면 CDB에 내린 수선의 발을 H라 하면, 삼수선의 정리에 의해 직선 HN과 직선 DB가 서로 수직입니다. 그리고 구하고자 하는 각의 크기 $\theta = \angle \mathrm{PNH}$입니다. 직각삼각형 PNH의 세 변의 길이를 구해야 하겠습니다. 그러려면 점 H의 위치부터 확정해야 합니다.

평면 CDB만 따로 떼어 그려서 점 H의 위치를 확인합시다. 점 H는 직선 BM 위의 점이고, 점 N을 지나고 직선 DB와 수직인 직선 위의 점입니다.



서로 닮음인 두 직각삼각형 BHN, BDM이 보입니다. $\overline{\mathrm{HN}} = \sqrt{5}$, $\overline{\mathrm{BH}} = 5$, $\overline{\mathrm{HM}} = 3$을 얻을 수 있습니다. 직각삼각형 PNH의 세 변의 길이 중 하나를 얻었으니 나머지 둘 중 하나를 얻으면 되겠습

니다. 그러기 위해서 직각삼각형 AMB를 따로 그려줍시다.



$\overline{\mathrm{PH}}=3\tan 30^{\circ}=\sqrt{3}$입니다. 그러므로 $\overline{\mathrm{PN}}=2\sqrt{2}$이고 $\cos\theta=\sqrt{\frac{5}{8}}$입니다. $40\cos^2\theta=25$입니다.

풀이 ②
정사영을 이용해서 두 평면이 이루는 이면각의 크기를 구하고 싶습니다.
삼각형 PDB의 넓이를 얻고, 삼각형 PDB의 평면 CDB 위로의 정사영의 넓이를 얻으면 두 평면의 이면각의 크기를 구할 수 있습니다.

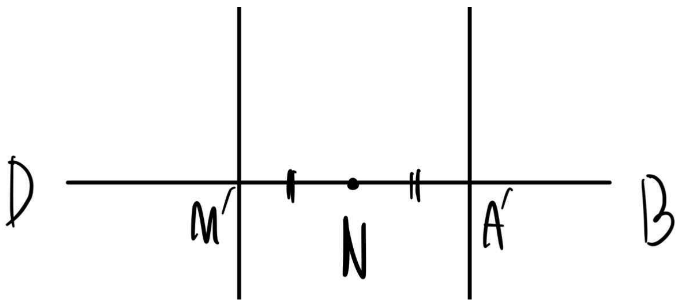
이 풀이는 풀이 ①과 크게 다를 것이 없어 보입니다. 삼각형 PDB의 넓이와 정사영의 넓이를 얻으려면 어차피 삼수선의 정리를 써야 하는 것이 아닌가 하는 의문이 들 수 있습니다.

그래서 좀 고민을 해봤는데 재밌는 풀이를 찾았습니다. 주변 도형들을 잘 관찰하면 다음과 같은 풀이가 가능합니다.

삼각형 ABD는 선분 BD를 빗변으로 하는 직각삼각형입니다. 그러므로 선분 BD의 중점 N에 대하여 $\overline{\mathrm{NA}}=\overline{\mathrm{NB}}=\overline{\mathrm{ND}}$입니다.

마찬가지로 삼각형 BMD도 선분 BD를 빗변으로 하는 직각삼각형이므로 $\overline{\mathrm{NM}}=\overline{\mathrm{NB}}=\overline{\mathrm{ND}}$입니다.
그러므로 $\overline{\mathrm{NA}}=\overline{\mathrm{NM}}$을 얻을 수 있습니다.

우리는 $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{MD}}$도 문제에서 주어진 조건에 의해 알 수 있습니다. 그러면 두 점 A, M에서 직선 BD에 내린 수선의 발을 각각 A′, M′이라 할 때, $\overline{\mathrm{NA'}}=\overline{\mathrm{NM'}}$입니다.

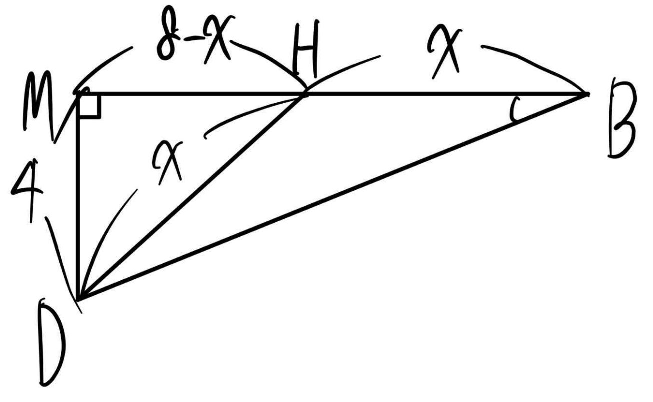


선분 AM 위의 점 P에 대하여 점 P에서 직선 BD에 내린 수선의 발이 N입니다. 그러려면 점 P가 선분 AM의 중점이어야 합니다.[1]

$\overline{\mathrm{NA}}=\overline{\mathrm{NM}}=2\sqrt{5}$, $\overline{\mathrm{AM}}=4\sqrt{3}$입니다. 이등변삼각형 AMN에 대하여 $\overline{\mathrm{NP}}=2\sqrt{2}$를 얻을 수 있습니다. 그러면 삼각형 PDB의 넓이는 $\frac{1}{2}\times 4\sqrt{5}\times 2\sqrt{2}=4\sqrt{10}$입니다.

이제 삼각형 PDB의 평면 CDB 위로의 정사영의 넓이를 구해야 하겠습니다. 점 P에서 평면 CDB에 내린 수선의 발을 H라 하고 삼각형 HDB의 넓이를 구합시다. 우리는 $\overline{\mathrm{PB}}=\overline{\mathrm{PD}}$임을 알고 있습니다. 그러므로 $\overline{\mathrm{HB}}=\overline{\mathrm{HD}}$이어야 합니다. 또 점 H가 선분 BM 위의 점이라는 것도 알고 있습니다.

1) 이 내용은 벡터를 이용해서도 확인할 수 있습니다. 어떻게 확인할 수 있는지 알려달라고 댓글 달아주시면 알려드리겠습니다.



직각삼각형 DHM에 대하여 피타고라스 정리를 이용하면 $x=5$를 얻을 수 있습니다. 삼각형 HDB의 넓이는 밑변의 길이가 x이고 높이가 4인 삼각형의 넓이와 같으므로 10입니다.

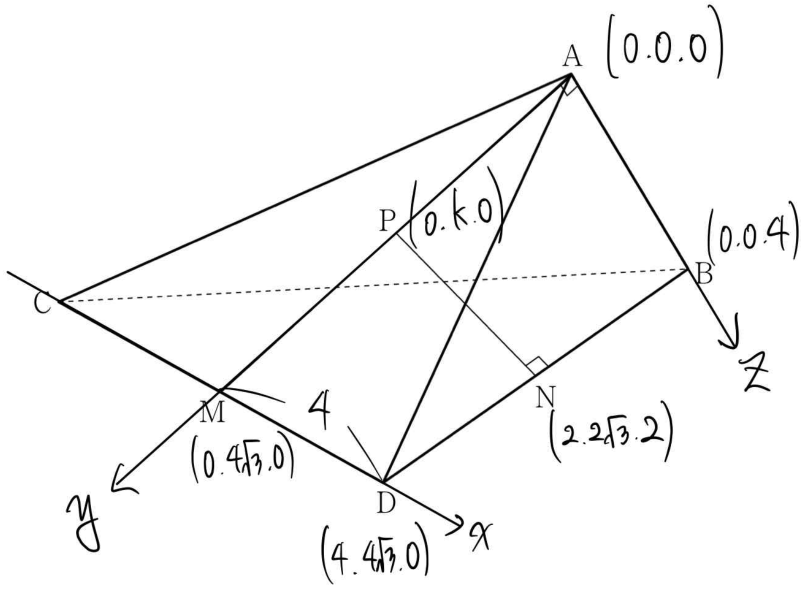
그러므로 $\cos\theta=\dfrac{10}{4\sqrt{10}}=\dfrac{\sqrt{10}}{4}$입니다. $40\cos^2\theta=25$입니다.

풀이 ③ - 1

두 평면의 방정식을 작성하여(두 평면의 법선벡터의 성분을 찾아서) 두 평면이 이루는 각의 크기를 계산하는 풀이입니다. 그러기 위해서는 좌표를 설정해야 합니다. 문제에서 좌표를 주지 않았기 때문에 임의로 설정하면 됩니다.

풀이 ③이 아니라 풀이 ③ - 1인 것은 좌표를 설정하는 방법이 여러 가지가 있기 때문입니다.

좌표를 다음과 같이 설정해봅시다. 문제에서 주어진 직선 중에서 서로 수직인 세 직선을 찾아서 x축, y축, z축에 대응시켜주면 됩니다.



서로 수직인 세 직선을 찾았습니다. 저는 A를 원점으로 잡았는데, 다른 점을 원점으로 잡으셔도 크게 상관은 없습니다. 평면의 방정식은 달라지더라도 답은 같게 나옵니다.

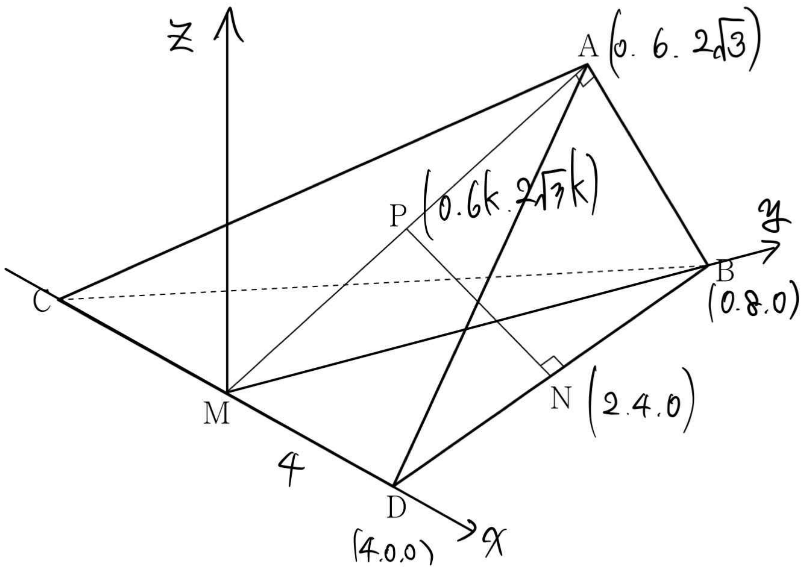
점 P의 좌표를 알아냅시다. $\overrightarrow{\mathrm{PN}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{DB}} = (2, 2\sqrt{3}-k, 2) \cdot (-4, -4\sqrt{3}, 4) = (k-2\sqrt{3}) \times 4\sqrt{3}$ 입니다. 이 값이 0이므로 $k = 2\sqrt{3}$ 입니다.

평면 CDB는 x축과 평행한 직선 CD를 포함하는 평면입니다. 그리고 평면 CDB가 $(0, 4\sqrt{3}, 0)$, $(0, 0, 4)$를 포함하므로 평면 CDB의 방정식은 $y + \sqrt{3}z = 4\sqrt{3}$ 입니다.

평면 PDB는 $(0, 2\sqrt{3}, 0)$, $(0, 0, 4)$, $(4, 4\sqrt{3}, 0)$을 포함합니다. 그러므로 평면 PDB의 방정식을 $ax + \frac{y}{2\sqrt{3}} + \frac{z}{4} = 1$로 두고 $(4, 4\sqrt{3}, 0)$을 대입하여 미지수 a의 값을 찾으면 됩니다. 대입해보면 $a = -\frac{1}{4}$ 입니다. $ax + \frac{y}{2\sqrt{3}} + \frac{z}{4} = 1$의 양변에 $4\sqrt{3}$을 곱하여 정리하면 평면 PDB의 방정식은 $-\sqrt{3}x + 2y + \sqrt{3}z = 4\sqrt{3}$ 입니다.

평면 CDB의 법선벡터는 $(0, 1, \sqrt{3})$이고 평면 PDB의 법선벡터는 $(-\sqrt{3}, 2, \sqrt{3})$이므로 $\cos\theta = \frac{|(0, 1, \sqrt{3}) \cdot (-\sqrt{3}, 2, \sqrt{3})|}{|(0, 1, \sqrt{3})||(-\sqrt{3}, 2, \sqrt{3})|} = \frac{5}{\sqrt{40}}$ 입니다. 그러므로 $40\cos^2\theta = 25$입니다.

풀이 ③ - 2
이렇게 좌표를 설정하는 방법도 있겠습니다.
(A의 좌표를 완성하려면 삼각형 AMB를 그려서 길이 관계를 찾아야 합니다.)



이렇게 좌표를 설정하면 평면 CDB가 xy평면이 되어서 평면의 방정식 계산이 적다는 장점이 있습니다.

평면 PDB의 좌표를 찾기 위해서는 점 P의 좌표를 알아내야 합니다. $\mathrm{P}(0, 6k, 2\sqrt{3}k)$로 두었는데, $0 < k < 1$입니다. k의 값을 찾으면 됩니다.

$\overrightarrow{\mathrm{PN}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{DB}} = (2, 4-6k, -2\sqrt{3}k) \cdot (-4, 8, 0) = -8 + 8 \times (4-6k)$입니다.

이 값이 0이므로 $4-6k=1$에서 $k = \dfrac{1}{2}$를 얻을 수 있습니다.

세 점 $(4, 0, 0)$, $(0, 8, 0)$, $(0, 3, \sqrt{3})$을 지나는 평면 PDB의 방정식을 찾아야 하는데, 평면의 방정식을 $\dfrac{x}{4} + \dfrac{y}{8} + cz = 1$로 두고 $(0, 3, \sqrt{3})$을 대입하여 미지수 c의 값을 찾으면 되겠습니다.

대입해보면 $c = \dfrac{5}{8\sqrt{3}}$입니다. $\dfrac{x}{4} + \dfrac{y}{8} + cz = 1$의 양변에 $8\sqrt{3}$을 곱하여 정리하면 평면 PDB의 방정식은 $2\sqrt{3}x + \sqrt{3}y + 5z = 8\sqrt{3}$입니다.

평면 CDB의 법선벡터는 $(0, 0, 1)$이고, 평면 PDB의 법선벡터는 $(2\sqrt{3}, \sqrt{3}, 5)$입니다.

그러므로 $\cos\theta = \dfrac{|(0, 0, 1) \cdot (2\sqrt{3}, \sqrt{3}, 5)|}{|(0, 0, 1)||(2\sqrt{3}, \sqrt{3}, 5)|} = \dfrac{5}{\sqrt{40}}$이고, $40\cos^2\theta = 25$입니다.

풀이 ①이 가장 유리한 것 같습니다.

두 평면 CDB, PDB가 이루는 각의 크기를 구하라고 했으므로 교선이 직선 DB로 명시되어 있습니다. 문제에서 준 그림에 따르면 그 직선 DB가 잘 누워 있습니다. 평면 CDB도 잘 누워 있습니다.

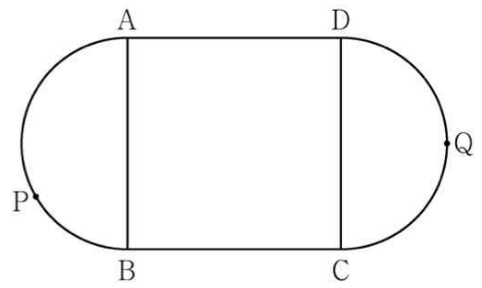
P에서 평면 CDB에 내린 수선의 발을 H라 할 때, H의 위치를 먼저 정하고 이후에 P의 위치를 찾습니다. 애초에 문제가 좀 쉬운 편이고, 풀이 ①을 떠올리는 게 가장 일반적이고 쉬운 듯합니다.

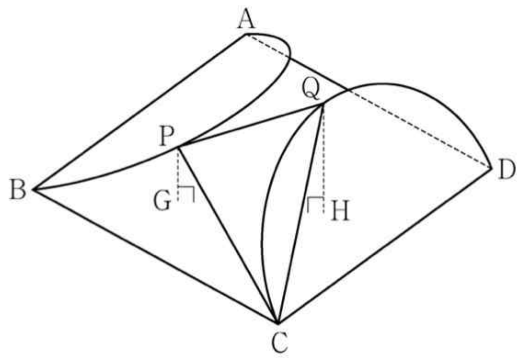
$\overline{\mathrm{NA}} = \overline{\mathrm{NM}}$을 찾고나서 직관적으로 점 P가 선분 AM의 중점이겠거니 하고 풀이 ②로 풀었다면 아마 금방 답은 냈겠지만, P가 선분 AM의 중점임을 제대로 확인하는 것이 쉽지만은 않습니다.

③번 풀이로 답을 내기엔 ①번 풀이가 너무 떠올리기 쉬운 듯합니다.

2. 22학년도 9월 평가원 29번

29. 그림과 같이 한 변의 길이가 8인 정사각형 ABCD에 두 선분 AB, CD를 각각 지름으로 하는 두 반원이 붙어 있는 모양의 종이가 있다. 반원의 호 AB의 삼등분점 중 점 B에 가까운 점을 P라 하고, 반원의 호 CD를 이등분하는 점을 Q라 하자.
이 종이에서 두 선분 AB와 CD를 접는 선으로 하여 두 반원을 접어 올렸을 때 두 점 P, Q에서 평면 ABCD에 내린 수선의 발을 각각 G, H라 하면 두 점 G, H는 정사각형 ABCD의 내부에 놓여 있고, $\overline{PG}=\sqrt{3}$, $\overline{QH}=2\sqrt{3}$이다. 두 평면 PCQ와 ABCD가 이루는 각의 크기가 θ일 때, $70\times\cos^2\theta$의 값을 구하시오.
(단, 종이의 두께는 고려하지 않는다.) [4점]

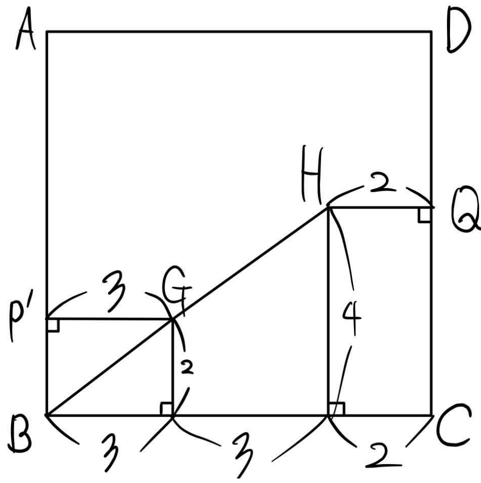




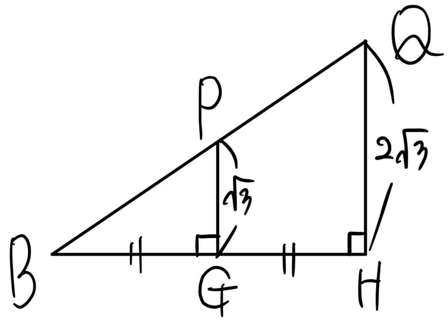
풀이 ①
두 평면의 교선을 찾으려면 평면 PCQ와 평면 ABCD가 만나는 점 중 C가 아닌 점을 찾아야 하겠습니다. 그 점을 R라 하면 교선은 직선 CR입니다.

R의 위치를 찾기 위해 P, Q의 위치를 알아내야 합니다. G, H가 어디에 놓일지 알아냅시다.

자세한 과정은 이 문제를 풀어보신 분들은 다 잘 아시리라 믿고, 결과만 보여드리겠습니다.



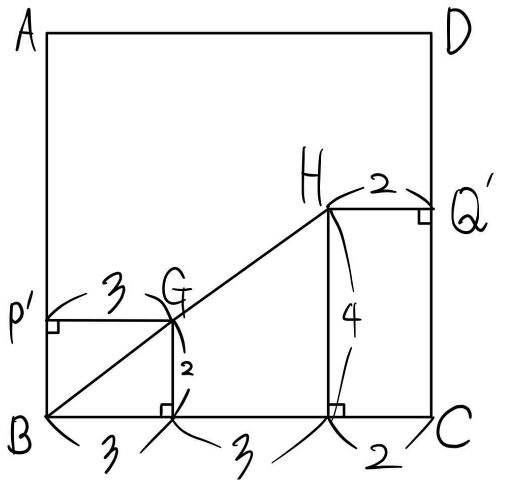
이 그림에서 $\overline{\mathrm{BG}} : \overline{\mathrm{BH}} = 1:2$입니다. 문제에서 주어진 조건에 따르면 $\overline{\mathrm{PG}} : \overline{\mathrm{QH}} = 1:2$입니다.



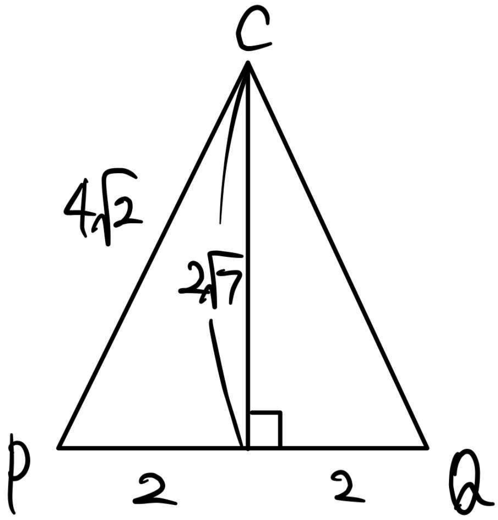
세 점 B, P, Q가 한 직선 위에 있습니다. 그러므로 위에서 얘기했던 점 R는 B이고, 두 평면의 교선은 직선 BC입니다.

평면 PCQ는 곧 평면 BCQ와 같습니다. 점 Q에서 평면 ABCD에 내린 수선의 발이 H입니다. 이면각의 정의를 이용하기 위해 점 H에서 직선 BC에 내린 수선의 발을 H′이라 하면, $\theta = \angle \mathrm{QH'H}$입니다. $\overline{\mathrm{QH}} = 2\sqrt{3}$, $\overline{\mathrm{HH'}} = 4$이므로 $\tan\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$이고, $\cos\theta = \dfrac{2}{\sqrt{7}}$입니다. 그러므로 $70\cos^2\theta = 40$입니다.

풀이 ②
풀이 ①과 같이 다음부터 풀이를 진행하겠습니다.



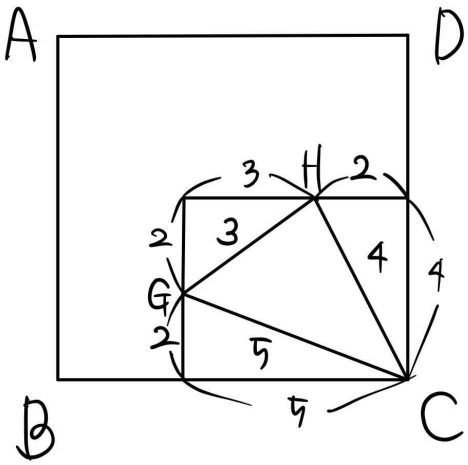
정사영으로 풀려면 삼각형 PCQ의 넓이와 삼각형 GCH의 넓이를 계산해야 하겠습니다.
$\overline{\mathrm{CG}}=\sqrt{29}$이고 $\overline{\mathrm{CP}}=4\sqrt{2}$입니다. 또 $\overline{\mathrm{CH}}=2\sqrt{5}$이고 $\overline{\mathrm{CQ}}=4\sqrt{2}$입니다.
$\overline{\mathrm{GH}}=\sqrt{13}$이고 두 점 P, Q의 높이 차가 $\sqrt{3}$입니다. 그러므로 $\overline{\mathrm{PQ}}=4$입니다.



삼각형 PCQ의 넓이는 $4\sqrt{7}$입니다.

삼각형 GCH의 넓이를 구하는 방법이 여러 가지가 있겠습니다.
(1) 코사인법칙 이용
$\overline{\mathrm{CG}}=\sqrt{29}$, $\overline{\mathrm{CH}}=2\sqrt{5}$, $\overline{\mathrm{GH}}=\sqrt{13}$이므로 $\cos(\angle\mathrm{GCH})=\dfrac{29+20-13}{2\times\sqrt{29}\times2\sqrt{5}}=\dfrac{9}{\sqrt{29}\times\sqrt{5}}$입니다.
$\sin(\angle\mathrm{GCH})=\dfrac{8}{\sqrt{29}\times\sqrt{5}}$이므로 삼각형 GCH의 넓이는 $\dfrac{1}{2}\times\sqrt{29}\times2\sqrt{5}\times\dfrac{8}{\sqrt{29}\times\sqrt{5}}=8$입니다.

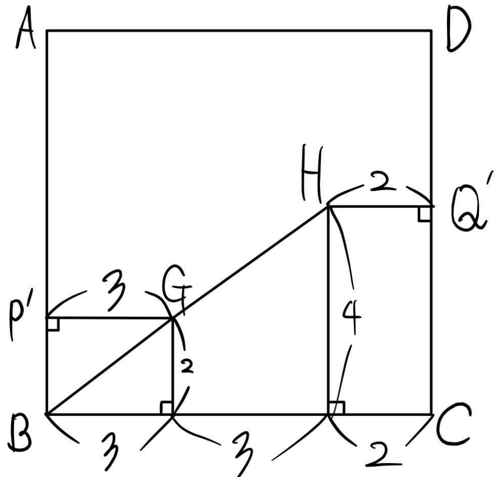
(2) 그림 이용



삼각형 GCH의 넓이는 가로의 길이가 5이고 세로의 길이가 4인 직사각형의 넓이에서 직각삼각형 3개의 넓이를 뺀 값과 같습니다. 즉 8입니다.

삼각형 GCH의 넓이를 어떻게 구했든, $\cos\theta = \dfrac{8}{4\sqrt{7}} = \dfrac{2}{\sqrt{7}}$이고 $70\cos^2\theta = 40$입니다.

풀이 ③
풀이 ①, ②와 같이 다음부터 풀이를 진행하겠습니다.



사각형 ABCD가 정사각형입니다. 평면 ABCD를 xy평면으로 보고, 평면 PCQ의 방정식을 작성하여 두 평면이 이루는 각의 크기를 계산하면 되겠습니다.

C를 원점으로 잡는 것이 계산상 유리하겠습니다. $\mathrm{B}(8,0,0)$, $\mathrm{D}(0,8,0)$으로 잡으면 $\mathrm{P}(5,2,\sqrt{3})$, $\mathrm{Q}(2,4,2\sqrt{3})$입니다.

세 점 $(0,0,0)$, $(5,2,\sqrt{3})$, $(2,4,2\sqrt{3})$을 포함하는 평면의 방정식을 세워야 합니다.
$ax+by+\sqrt{3}cz=0$으로 잡겠습니다. 이렇게 잡는 것은 일단 평면이 원점을 포함하므로 상수항이 0이고, P, Q의 x좌표와 y좌표는 자연수인데 z좌표는 $\sqrt{3}$의 자연수 배이기 때문입니다.

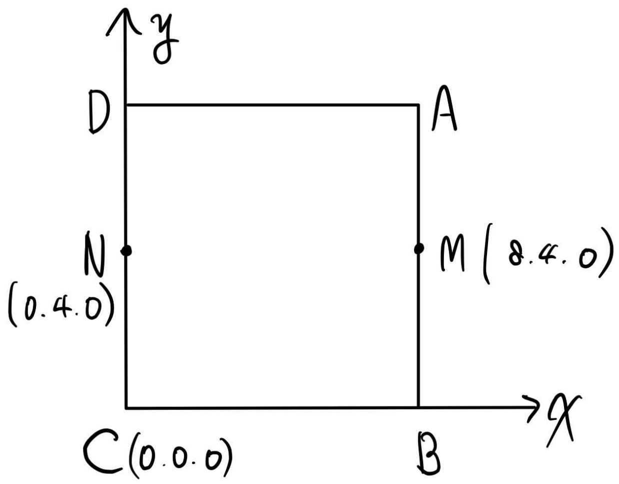
어쨌든 $ax+by+\sqrt{3}cz=0$에 $(5,2,\sqrt{3})$, $(2,4,2\sqrt{3})$을 대입하여 세 미지수 a, b, c의 비를 찾읍시다.

$5a+2b+3c=0$, $2a+4b+6c=0$입니다. $a=0$, $b:c=3:-2$입니다.
그러므로 평면 PCQ의 방정식은 $3y-2\sqrt{3}z=0$입니다.

평면 ABCD의 법선벡터는 $(0,0,1)$이고, 평면 PCQ의 법선벡터는 $(0,3,-2\sqrt{3})$이므로
$\cos\theta=\dfrac{|(0,0,1)\cdot(0,3,-2\sqrt{3})|}{|(0,0,1)||(0,3,-2\sqrt{3})|}=\dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{21}}=\dfrac{2}{\sqrt{7}}$이고, $70\cos^2\theta=40$입니다.

세 풀이를 비교하기 전에 조금 다른 이야기를 해보겠습니다.

G, H, P, Q의 위치를 알아낼 때부터 좌표를 도입하는 것도 좋은 것 같습니다.
평면 ABCD를 xy평면으로 보고, C를 원점으로 둡시다.



점 P의 좌표를 알고 싶습니다. z좌표가 $\sqrt{3}$임은 알고 있습니다. $\overline{\mathrm{PM}}=\overline{\mathrm{PB}}$이므로 P의 y좌표는 2입니다. $\mathrm{P}(a, 2, \sqrt{3})$으로 둘 수 있고, $\overline{\mathrm{PM}}=4$이므로 $a=5$입니다.
그러므로 $\mathrm{P}(5, 2, \sqrt{3})$을 얻을 수 있습니다.

점 Q의 좌표를 알고 싶습니다. z좌표가 $2\sqrt{3}$임은 알고 있습니다. 직선 QN과 직선 CD가 수직이므로 Q의 y좌표는 4입니다. $\mathrm{Q}(b, 4, 2\sqrt{3})$으로 둘 수 있고, $\overline{\mathrm{QN}}=4$이므로 $b=2$입니다.
그러므로 $\mathrm{Q}(2, 4, 2\sqrt{3})$을 얻을 수 있습니다.

$\mathrm{G}(5, 2, 0)$, $\mathrm{H}(2, 4, 0)$도 쉽게 얻을 수 있겠습니다.

풀이 시작을 좌표로 했습니다. 이제 이면각의 크기 계산을 해야 하는데, 세 가지 방법 모두 좋습니다.

① 직선 PQ와 xy평면이 만나는 점을 R라 합시다. R의 z좌표는 0입니다.
$\mathrm{Q}(2, 4, 2\sqrt{3})$, $\mathrm{P}(5, 2, \sqrt{3})$입니다. 선분 QR의 중점이 P입니다. 그러므로 $\mathrm{R}(8, 0, 0)$이고, R은 곧 B입니다. 그러므로 두 평면의 교선은 직선 BC입니다.

② 모든 점의 좌표를 알아냈으니 두 삼각형 PCQ, GCH의 넓이를 계산할 수 있겠습니다.

③ 모든 점의 좌표를 알아냈으니 평면 PCQ의 방정식을 찾으면 되겠습니다.

세 풀이 중에서 특별히 많이 유리하거나 불리한 풀이는 없는 것 같습니다. 다 고만고만해 보입니다.

풀이 ①은 일단 평면 PCQ와 평면 ABCD가 이루는 각의 크기를 구해야 하는 상황에서 교선이 명시되어 있지 않습니다. 물론 교선이 직선 BC임을 찾는 게 많이 어렵지는 않습니다.

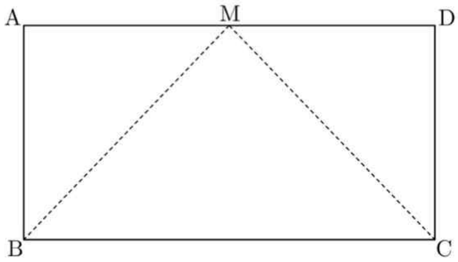
풀이 ②에서 만약 삼각형 PCQ가 특수한 삼각형(이등변삼각형이나 직각삼각형 등)이 아니었다면 계산이 좀 더 많았을 것입니다. 두 삼각형의 넓이 계산이 그렇게까지 힘들지는 않았습니다.

풀이 ③에서 일단 좌표를 잡는 게 쉽습니다. 또 평면 ABCD가 xy평면이라서 평면 PCQ의 방정식만 찾으면 됩니다. 교선이 x축임을 알았다면 방정식을 세우기가 더 쉬웠겠지만, 교선이 x축임을 알았다면 굳이 ③번 풀이로 답을 낼 이유는 없겠습니다.

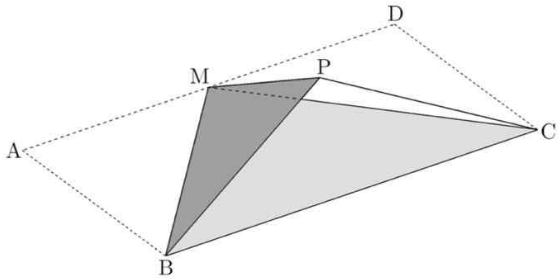
계산량은 ①이 가장 적고, ②와 ③이 비슷한 것 같네요.

3. 22학년도 사관학교 28번

28. [그림 1]과 같이 $\overline{\mathrm{AB}}=3$, $\overline{\mathrm{AD}}=2\sqrt{7}$ 인 직사각형 ABCD 모양의 종이가 있다. 선분 AD의 중점을 M이라 하자. 두 선분 BM, CM을 접는 선으로 하여 [그림 2]와 같이 두 점 A, D가 한 점 P에서 만나도록 종이를 접었을 때, 평면 PBM과 평면 BCM이 이루는 각의 크기를 θ라 하자. $\cos\theta$의 값은? (단, 종이의 두께는 고려하지 않는다.) [4점]



[그림 1]



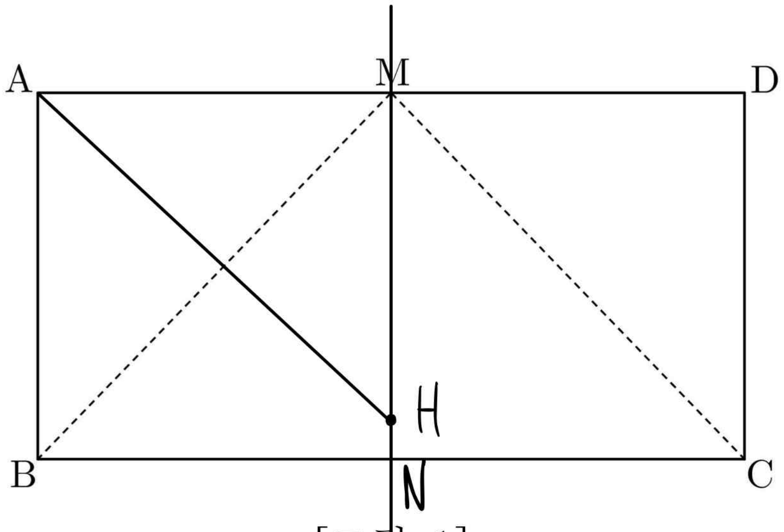
[그림 2]

① $\frac{17}{27}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ $\frac{19}{27}$ ④ $\frac{20}{27}$ ⑤ $\frac{7}{9}$

풀이 ①
종이 접기 문제입니다. 두 평면의 교선은 직선 BM이고, 평면 BCM이 잘 누워 있습니다.
두 삼각형 MAB, MDC가 서로 합동이고, 점 A, D가 만나서 P가 됩니다.

그러면 선분 BC의 중점을 N이라 할 때, 점 P에서 평면 BCM 위에 내린 수선의 발 H가 직선 MN 위에 놓이게 됩니다.

[그림 1]에서 직선 MN을 그어줍시다. A를 지나고 직선 BM과 수직인 직선을 l이라 할 때, 점 H는 직선 l과 직선 MN이 만나는 점입니다.



[그림 1]

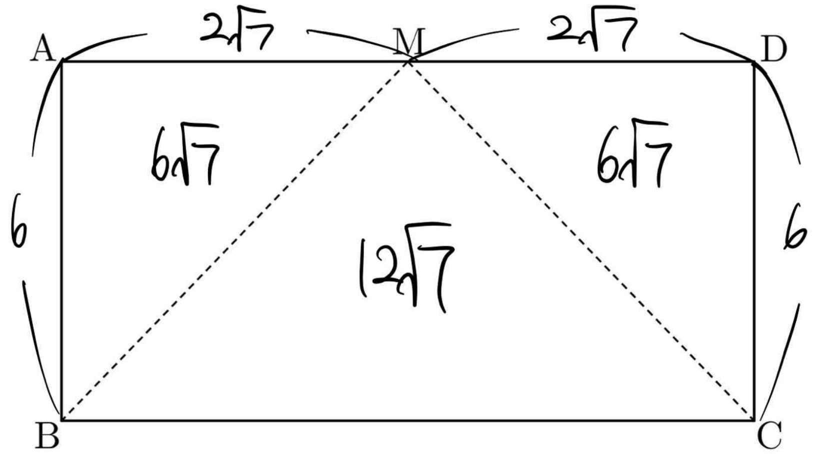
이 그림에서 직선 AH와 직선 BM이 만나는 점을 Q라 하면, $\cos\theta = \frac{\overline{QH}}{\overline{AQ}}$입니다.

계산은 직접 해보시길 바랍니다. $\overline{AQ} = \frac{3\sqrt{7}}{4}$, $\overline{QH} = \frac{7\sqrt{7}}{12}$이어서 $\cos\theta = \frac{7}{9}$입니다.

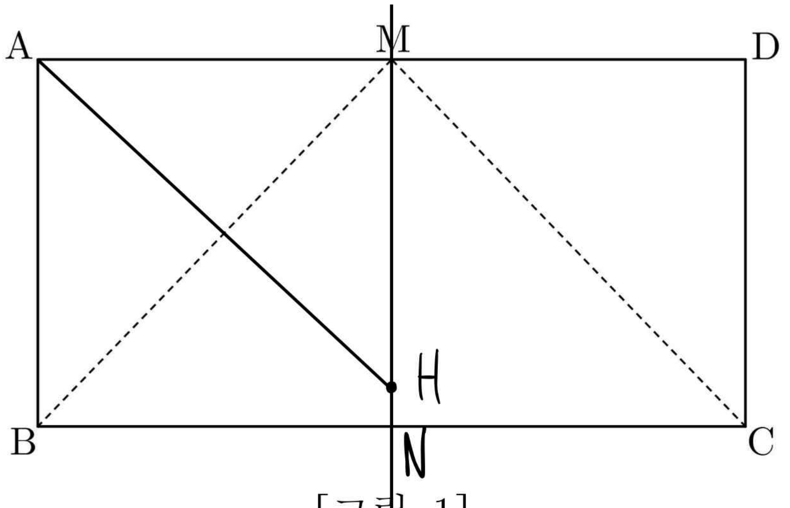
풀이 ② - 1

정사영 풀이가 2가지가 보입니다. 그런데 삼각형 PBM의 넓이가 $\frac{3}{2}\sqrt{7}$입니다. 숫자가 마음에 들지 않습니다. 문제에서 주어진 선분들의 길이에 모두 2를 곱해도 답은 바뀌지 않습니다.

$\overline{AB}=6$, $\overline{AD}=4\sqrt{7}$로 두겠습니다.



삼각형 ABM의 넓이는 $6\sqrt{7}$입니다. 점 P에서 평면 BCM에 내린 수선의 발을 H라 하고, 삼각형 BMH의 넓이를 구해봐야 하겠습니다.



[그림 1]

이 그림에서 $\overline{MH}=\frac{14}{3}$입니다. 그러므로 삼각형 BMH는 밑변의 길이가 $\overline{MH}=\frac{14}{3}$이고 높이가 $\overline{BN}=2\sqrt{7}$입니다. 그래서 삼각형 BMH의 넓이는 $\frac{14\sqrt{7}}{3}$입니다. 그러므로 $\cos\theta=\dfrac{\frac{14\sqrt{7}}{3}}{6\sqrt{7}}=\frac{7}{9}$입니다.

※ $\overline{MH}=\frac{14}{3}$를 구했으면 $\overline{HN}=\frac{4}{3}$도 알 수 있습니다. 삼각형 BNM의 넓이는 $6\sqrt{7}$이고,

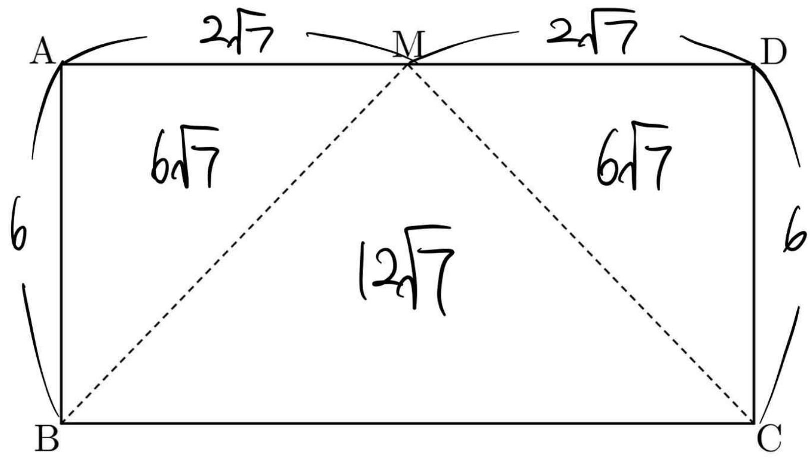
$\overline{\mathrm{MH}} : \overline{\mathrm{HN}} = 7:2$이므로 삼각형 BMH의 넓이는 삼각형 BNM의 넓이의 $\frac{7}{9}$배입니다.

그러므로 $\cos\theta = \dfrac{6\sqrt{7} \times \frac{7}{9}}{6\sqrt{7}} = \dfrac{7}{9}$입니다.

풀이 ② - 2
평면 PBM과 평면 BCM이 이루는 각의 크기는 평면 PCM과 평면 BCM이 이루는 각의 크기와 같습니다.

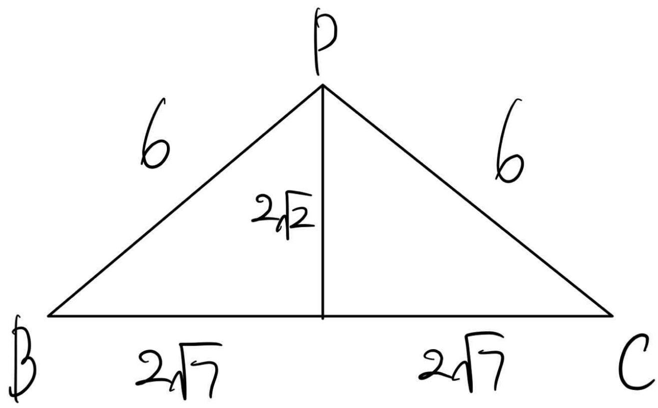
세 삼각형 PBM, PCM, PBC의 평면 BCM 위로의 정사영의 넓이의 합은 삼각형 BCM의 넓이와 같습니다.

풀이 ② - 1처럼 $\overline{\mathrm{AB}}=6$, $\overline{\mathrm{AD}}=4\sqrt{7}$로 두겠습니다.



삼각형 PBC의 넓이를 S라 하고 평면 PBC와 평면 BCM이 이루는 예각의 크기를 θ'이라 하면 $6\sqrt{7}\times\cos\theta+6\sqrt{7}\times\cos\theta+S\cos\theta'=12\sqrt{7}$이 성립합니다. S의 값과 $\cos\theta'$의 값을 알아낸다면 $\cos\theta$를 얻을 수 있겠습니다. S의 값부터 구해봅시다.

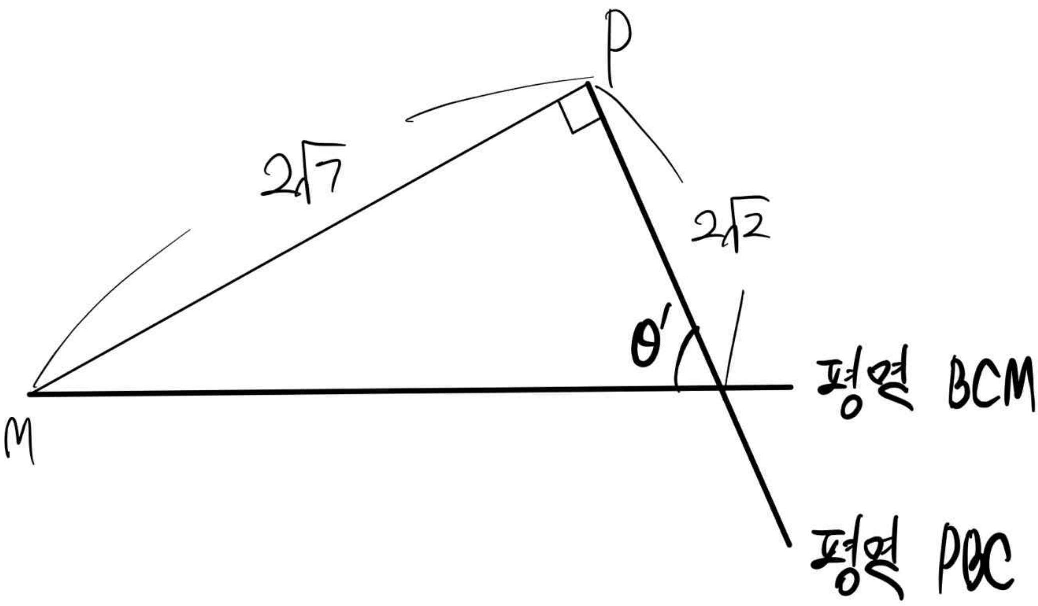
$\overline{\mathrm{PB}}=\overline{\mathrm{AB}}=6$입니다. 마찬가지로 $\overline{\mathrm{PC}}=6$입니다. $\overline{\mathrm{BC}}=4\sqrt{7}$도 알고 있습니다.



$S=4\sqrt{14}$입니다.

이제 $\cos\theta'$을 구해야 하는데, 약간 어려울 수 있습니다.
[그림 1]에서 직선 AM과 직선 AB가 서로 수직입니다. 그러므로 [그림 2]에서 직선 PM과 직선 PB가 서로 수직입니다. 마찬가지로 직선 PM과 직선 PC가 서로 수직입니다.

직선 PM이 두 직선 PB, PC와 모두 수직이므로 직선 PM은 평면 PBC와 수직입니다.
다음과 같이 단면화해볼 수 있겠습니다. 두 평면 BCM, PBC의 교선인 직선 BC가 점처럼 보이도록 단면화합니다.



$\tan\theta' = \dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt{2}}$ 이므로 $\cos\theta' = \dfrac{\sqrt{2}}{3}$ 입니다.

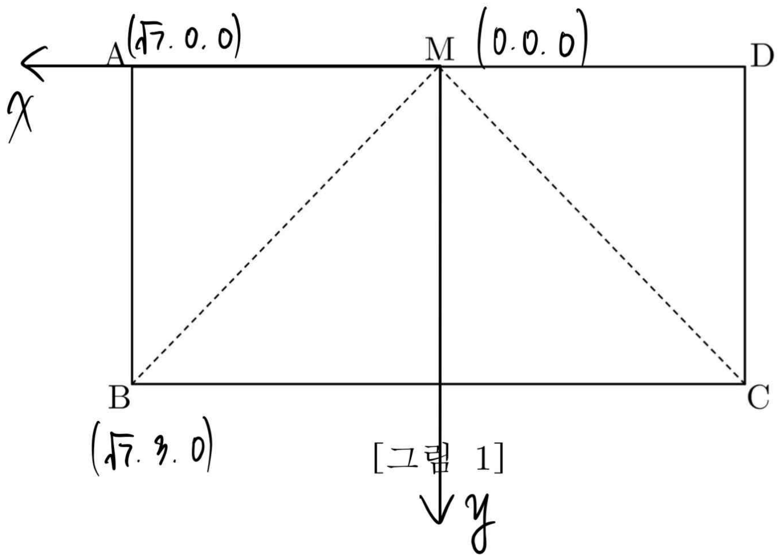
$6\sqrt{7}\times\cos\theta + 6\sqrt{7}\times\cos\theta + S\cos\theta' = 12\sqrt{7}$ 에서 $S = 4\sqrt{14}$, $\cos\theta' = \dfrac{\sqrt{2}}{3}$ 을 대입해봅시다.

$12\sqrt{7}\cos\theta + 4\sqrt{14}\times\dfrac{\sqrt{2}}{3} = 12\sqrt{7}$

$12\sqrt{7}\cos\theta + \dfrac{8\sqrt{7}}{3} = 12\sqrt{7}$ 에서 $\cos\theta = \dfrac{7}{9}$ 입니다.

풀이 ③

다음과 같이 좌표를 설정합시다.



[그림 1]

평면 BCM은 xy평면입니다. 점 P의 좌표를 찾아서 평면 PBM의 방정식을 얻읍시다.

점 P에서 평면 BCM에 내린 수선의 발을 H라 하면, H는 y축 위의 점이고, $\overline{\mathrm{MH}} = \dfrac{7}{3}$입니다.

그러므로 점 $\mathrm{H}\left(0,\, \dfrac{7}{3},\, 0\right)$이고, $\mathrm{P}\left(0,\, \dfrac{7}{3},\, k\right)$로 둘 수 있겠습니다.

$\overline{\mathrm{MP}} = \sqrt{7}$ 이므로 $k = \dfrac{\sqrt{14}}{3}$을 얻을 수 있습니다.

세 점 $(0, 0, 0)$, $(\sqrt{7}, 3, 0)$, $\left(0,\, \dfrac{7}{3},\, \dfrac{\sqrt{14}}{3}\right)$를 포함하는 평면의 방정식을 찾아야 합니다.

일반적인 평면의 방정식은 $ax + by + cz = d$인데, 원점을 포함하는 평면의 방정식에서 $d = 0$입니다.

$(\sqrt{7}, 3, 0)$을 대입해봅시다. $a : b = 3 : -\sqrt{7}$ 입니다.

$\left(0,\, \dfrac{7}{3},\, \dfrac{\sqrt{14}}{3}\right)$을 대입해볼 건데, $\dfrac{7}{3} : \dfrac{\sqrt{14}}{3} = \sqrt{7} : \sqrt{2}$ 입니다. 그러므로 $b : c = -\sqrt{2} : \sqrt{7}$ 입니다.

그러므로 $a : b : c = 3\sqrt{2} : -\sqrt{14} : 7$입니다. 평면 PBM의 방정식은 $3\sqrt{2}\,x - \sqrt{14}\,y + 7z = 0$입니다.

평면 BCM의 법선벡터는 $(0, 0, 1)$이고, 평면 PBM의 법선벡터는 $(3\sqrt{2},\, -\sqrt{14},\, 7)$이므로

$$\cos\theta = \frac{|(0, 0, 1) \cdot (3\sqrt{2},\, -\sqrt{14},\, 7)|}{|(0, 0, 1)|\,|(3\sqrt{2},\, -\sqrt{14},\, 7)|} = \frac{7}{\sqrt{18 + 14 + 49}} = \frac{7}{9}$$ 입니다.

종이 접기 문제를 잘 알고 있다면(잘 알아두셔야 합니다) ① 풀이가 가장 유리하겠습니다.
선분 길이 두 개만 찾으면 되니까요.
종이 접기 문제에는 접는 선에 대해서 삼수선 정리가 숨어 있다고 보면 됩니다.

풀이 ② - 1은 조금 낯설지만 할 만한 것 같고 ② - 2는 살짝 돌아가는 느낌이 있지만 재밌습니다.

풀이 ③은.. 계산이 심하게 더럽지는 않은 것 같습니다만 ①, ②에 비하면 계산이 많네요.

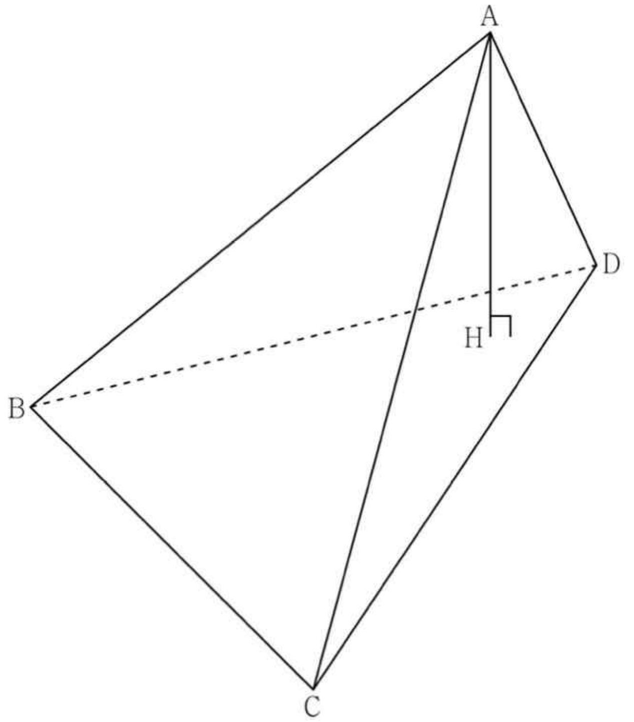
그럴 가능성이 낮다고 생각합니다만 만약 ①, ②가 잘 안 떠오른다면 시도는 해볼 법하다고 생각합니다.

4. 21년 10월 교육청 30번

30. 한 변의 길이가 4인 정삼각형 ABC를 한 면으로 하는 사면체 ABCD의 꼭짓점 A에서 평면 BCD에 내린 수선의 발을 H라 할 때, 점 H는 삼각형 BCD의 내부에 놓여 있다. 직선 DH가 선분 BC와 만나는 점을 E라 할 때, 점 E가 다음 조건을 만족시킨다.

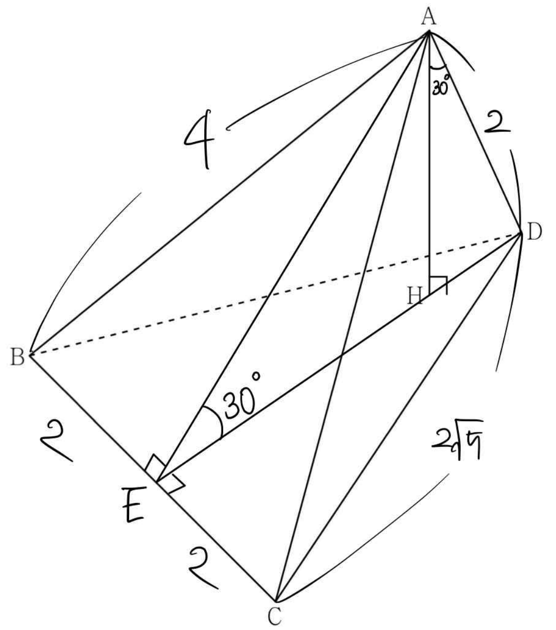
> (가) $\angle \mathrm{AEH} = \angle \mathrm{DAH}$
> (나) 점 E는 선분 CD를 지름으로 하는 원 위의 점이고 $\overline{\mathrm{DE}} = 4$이다.

삼각형 AHD의 평면 ABD 위로의 정사영의 넓이는 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



풀이 ①

(가)에 따르면 $\angle\mathrm{EAD}=\frac{\pi}{2}$이고, (나)에 따르면 점 E는 선분 BC의 중점입니다.



문제에서 주어진 선분들의 길이의 비에 따르면 $\angle\mathrm{AEH}=\angle\mathrm{DAH}=30^\circ$ 입니다.

구하고자 하는 값은 삼각형 AHD의 평면 ABD 위로의 정사영의 넓이입니다.
삼각형 AHD의 넓이를 구하고, 두 평면 AHD, ABD가 이루는 각의 크기를 계산해야 하겠습니다.

삼각형 AHD의 넓이는 $\overline{\mathrm{DH}}=1$, $\overline{\mathrm{AH}}=\sqrt{3}$이므로 $\frac{\sqrt{3}}{2}$입니다.

두 평면 AHD, ABD가 이루는 각의 크기를 계산해야 합니다. 두 평면의 교선은 직선 AD입니다.

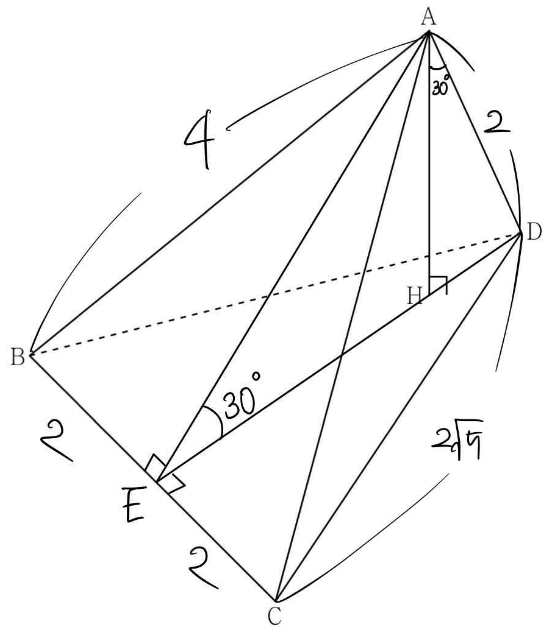
그림에서 직선 EA와 직선 BC가 수직이고, 직선 ED와 직선 BC가 수직임을 표시했습니다.
직선 BC는 평면 EAD와 수직입니다. 그러므로 직선 BC는 평면 EAD 위의 직선 AD와 수직입니다.

한편 (가)에서 직선 AD와 직선 AE가 수직임을 알아냈습니다.
직선 AD와 직선 BC가 수직이고, 직선 AD와 직선 AE가 수직입니다. 그러므로 직선 AD와 평면 ABC는 수직입니다.

평면 ABD 위의 직선 AB와 교선 AD가 수직입니다. 또, 평면 AHD(AED) 위의 직선 AE와 교선 AD가 수직입니다. 그러므로 두 평면 ABD, AHD가 이루는 각의 크기는 두 직선 AB, AE가 이루는 각의 크기와 같고, 그 값은 30° 입니다. 그러므로 구하고자 하는 값은 $\frac{\sqrt{3}}{2}\cos30^\circ=\frac{3}{4}$입니다.

풀이 ②

풀이 ①과 풀이가 거의 비슷하고 이면각의 크기를 구하는 과정만 살짝 다릅니다.



이 그림을 얻었고, 삼각형 AHD의 넓이가 $\frac{\sqrt{3}}{2}$인 것까지 얻었다고 합시다.

직선 BC가 평면 AED와 수직인 걸 확인하는 것까지는 똑같습니다.

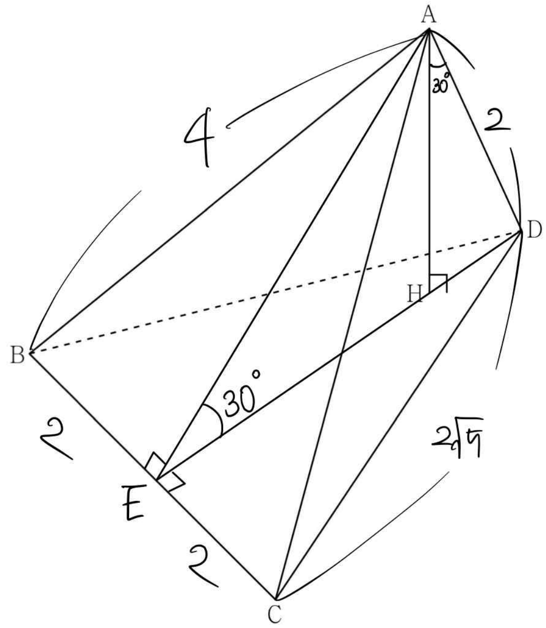
두 평면 AHD, ABD가 이루는 각의 크기를 구해야 합니다. 여기서 정사영을 이용할 수 있습니다.

삼각형 ABD의 평면 AHD 위로의 정사영은 삼각형 AED입니다. 두 삼각형 ABD, AED의 넓이를 계산해서 두 평면의 이면각의 크기를 계산할 수 있겠습니다.

삼각형 ABD의 넓이는 4이고, 삼각형 AED의 넓이는 $2\sqrt{3}$이므로 $\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$입니다. 그러므로 구하고자 하는 값은 $\frac{3}{4}$입니다.

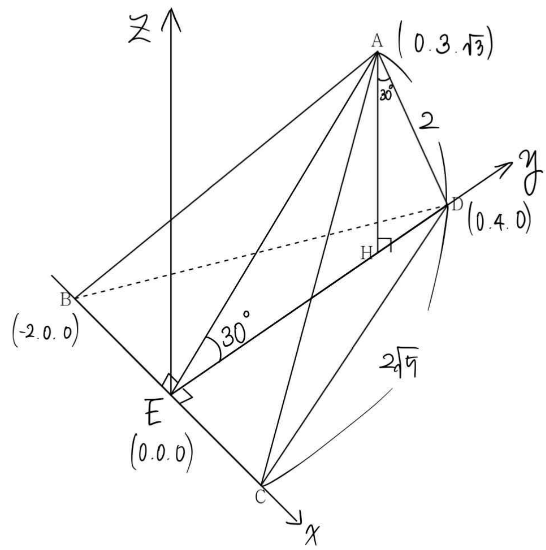
풀이 ③

위에서처럼 이 그림을 얻었다고 합시다.



삼각형 AHD의 넓이가 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$인 건 구했다고 치고, 평면의 방정식을 작성하여 두 평면이 이루는 각의 크기를 계산하고 싶습니다.

그러려면 좌표가 필요한데, 다음과 같이 좌표를 설정하면 되겠습니다.



평면 AHD는 yz평면입니다. 세 점 $(-2,0,0)$, $(0,4,0)$, $(0,3,\sqrt{3})$을 지나는 평면 ABD의 방정식을 계산합시다. 평면의 방정식을 $\dfrac{x}{-2}+\dfrac{y}{4}+cz=1$로 둘 수 있고, $(0,3,\sqrt{3})$을 대입하여 미지수 c의 값을 찾읍시다. 대입해보면 $c=\dfrac{1}{4\sqrt{3}}$입니다.

$\frac{x}{-2}+\frac{y}{4}+cz=1$의 양변에 $4\sqrt{3}$을 곱하여 정리하면 평면 ABD의 방정식은
$-2\sqrt{3}x+\sqrt{3}y+z=4\sqrt{3}$입니다.

평면 AHD의 법선벡터는 $(1,0,0)$이고 평면 ABD의 법선벡터는 $(-2\sqrt{3},\sqrt{3},1)$이므로
$\cos\theta=\frac{|(1,0,0)\cdot(-2\sqrt{3},\sqrt{3},1)|}{|(1,0,0)||(-2\sqrt{3},\sqrt{3},1)|}=\frac{2\sqrt{3}}{4}=\frac{\sqrt{3}}{2}$입니다.

그러므로 구하고자 하는 값은 $\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta=\frac{3}{4}$입니다.

세 풀이 모두 비슷한 것 같고, 크게 유리하거나 불리한 풀이는 없어보입니다.

풀이 ③을 쓰려면 좌표를 도입하고 계산을 해야 하는데, 좌표 도입이 쉽고, 두 평면 중 한 평면이 yz 평면이라서 계산이 크게 부담스럽지 않습니다.

풀이 ①, ②에서는 계산이 ③보다는 적지만, 직선 BC와 평면 AED가 수직임을 논리적으로 보여야 합니다. (풀이 ①에서는 추가로 직선 AD와 평면 ABC가 수직인 것도 보여야 하겠습니다.)

5. 22학년도 수능 30번

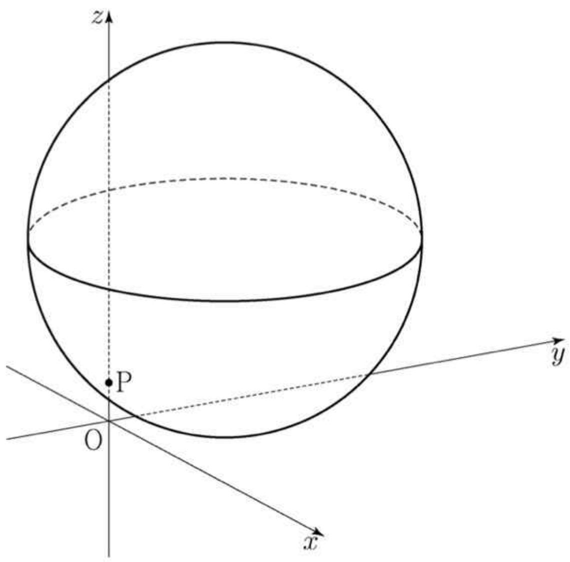
30. 좌표공간에 중심이 $C(2, \sqrt{5}, 5)$이고 점 $P(0, 0, 1)$을 지나는 구

$$S : (x-2)^2+(y-\sqrt{5})^2+(z-5)^2=25$$

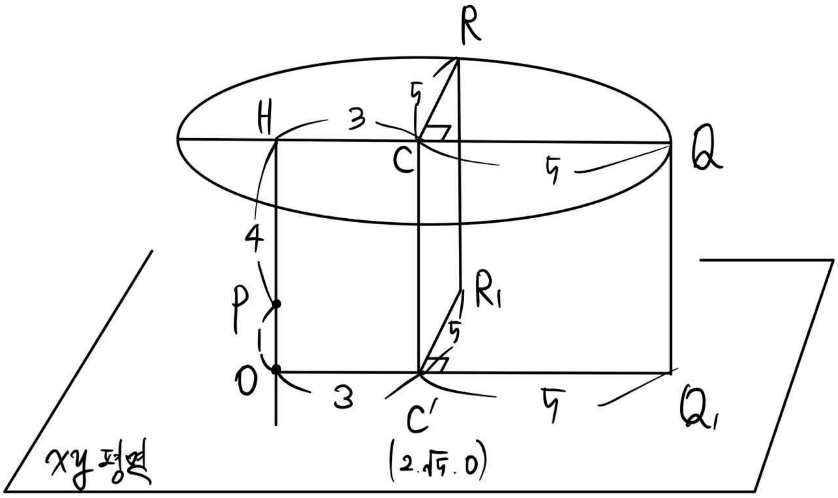
가 있다. 구 S가 평면 OPC와 만나서 생기는 원 위를 움직이는 점 Q, 구 S 위를 움직이는 점 R에 대하여 두 점 Q, R의 xy평면 위로의 정사영을 각각 Q_1, R_1이라 하자.

삼각형 OQ_1R_1의 넓이가 최대가 되도록 하는 두 점 Q, R에 대하여 삼각형 OQ_1R_1의 평면 PQR 위로의 정사영의 넓이는 $\frac{q}{p}\sqrt{6}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.

(단, O는 원점이고 세 점 O, Q_1, R_1은 한 직선 위에 있지 않으며, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



풀이 ①
두 점 Q, R의 위치를 찾는 과정은 여기서 설명하지 않고 결과만 적겠습니다.



삼각형 $\mathrm{OQ_1R_1}$의 넓이는 20입니다.

두 평면 $\mathrm{OQ_1R_1}$, PQR가 이루는 각의 크기를 찾아야 합니다.
평면 $\mathrm{OQ_1R_1}$과 평면 HQR는 서로 평행하므로 평면 HQR, PQR가 이루는 각의 크기를 구하면 되겠습니다.

두 평면의 교선은 직선 QR입니다. 평면 HQR이 잘 누워 있으니 점 P에 대하여 삼수선의 정리를 쓰면 되겠습니다.
점 P에서 평면 HQR에 내린 수선의 발은 H입니다. H에서 직선 QR에 내린 수선의 길이를 찾아야 합니다. 그 값을 d라 하겠습니다.

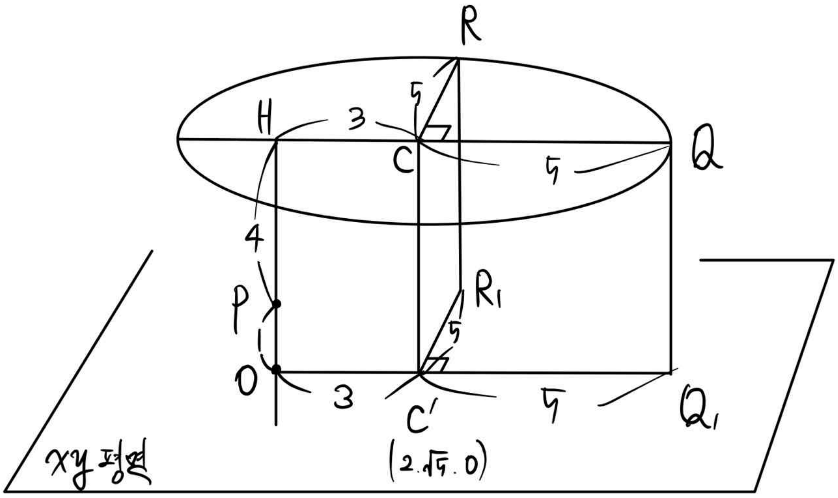
삼각형 HQR의 넓이를 두 번 표현하여 d의 값을 얻을 수 있습니다.
$\frac{1}{2}\times 8\times 5=\frac{1}{2}\times d\times \overline{\mathrm{QR}}$에서 $\overline{\mathrm{QR}}=5\sqrt{2}$이므로 $d=4\sqrt{2}$입니다.

두 평면 HQR, PQR가 이루는 예각의 크기 θ에 대하여 $\tan\theta=\frac{\overline{\mathrm{PH}}}{d}=\frac{1}{\sqrt{2}}$이므로

$\cos\theta=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$입니다.

그러므로 삼각형 $\mathrm{OQ_1R_1}$의 평면 PQR 위로의 정사영의 넓이는 $20\cos\theta=\frac{20}{3}\sqrt{6}$입니다.

풀이 ②
풀이 ①과 같은 부분에서 출발하겠습니다.

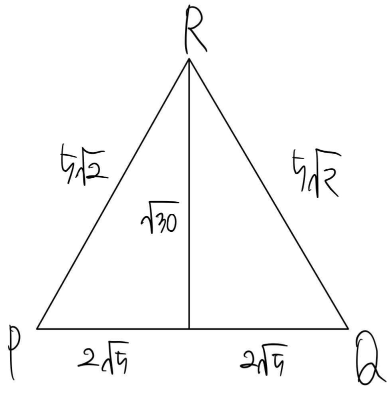


삼각형 OQ_1R_1의 넓이는 20입니다.

평면 PQR와 평면 HQR가 이루는 각의 크기를 구하면 되겠는데, 삼각형 PQR의 평면 HQR 위로의 정사영은 삼각형 HQR이고, 넓이가 20입니다.
삼각형 PQR의 넓이만 계산하면 두 평면이 이루는 각의 크기를 얻을 수 있겠습니다.

(1) 풀이 ①에서처럼 H에서 직선 QR에 내린 수선의 길이를 구해서 삼각형 PQR의 넓이를 계산할 수 있습니다. 수선의 길이가 $4\sqrt{2}$이므로 점 P와 직선 QR 사이의 거리는 $4\sqrt{3}$이고, 삼각형 PQR의 넓이는 $\frac{1}{2}\times 5\sqrt{2}\times 4\sqrt{3}=10\sqrt{6}$입니다. 그러므로 두 평면 HQR, PQR가 이루는 예각의 크기 θ에 대하여 $\cos\theta=\frac{20}{10\sqrt{6}}=\frac{2}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$입니다. 그런데 이 풀이는 삼수선 정리와 크게 다를 게 없는 것 같습니다. 굳이 넓이를 계산할 이유가 없겠습니다.

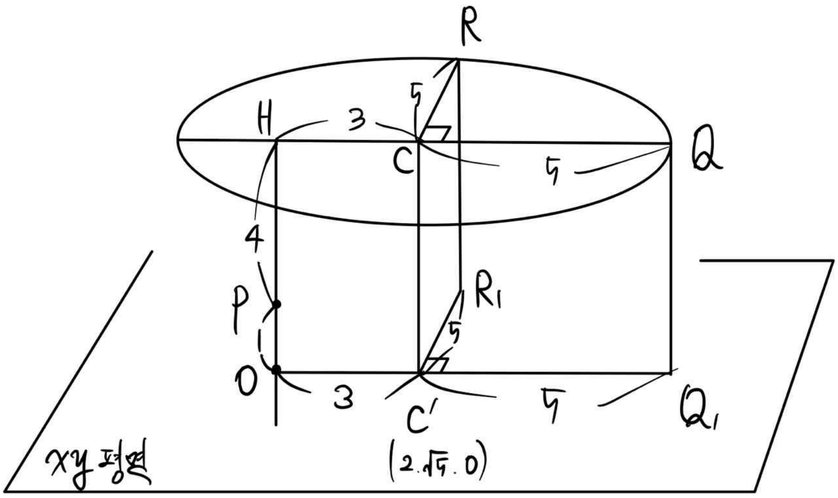
(2) 삼각형 PQR의 세 변의 길이를 알아내어 삼각형 PQR의 넓이를 계산할 수 있습니다.
$\overline{PQ}=4\sqrt{5}$, $\overline{PR}=\overline{QR}=5\sqrt{2}$입니다. 다행히도 이등변삼각형이라서 코사인법칙을 쓸 이유는 없네요.



삼각형 PQR의 넓이는 $10\sqrt{6}$입니다.

풀이 ③

풀이 ①과 같은 부분에서 출발하겠습니다.



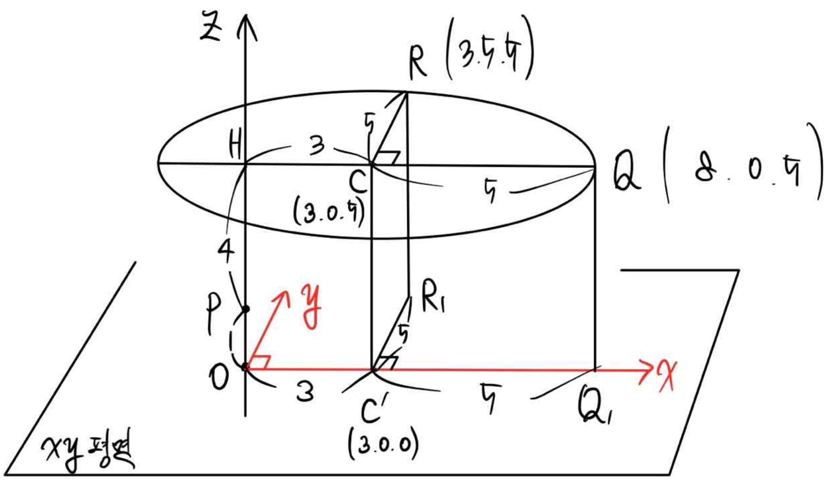
삼각형 OQ_1R_1의 넓이는 20입니다.

평면 OQ_1R_1과 평면 PQR가 이루는 각의 크기를 평면의 방정식을 얻어서 구하고 싶습니다.

평면 OQ_1R_1은 xy평면입니다. 평면 PQR의 방정식을 구해야 하는데 문제가 있습니다. C의 좌표가 마음에 안 든다는 것입니다. 이대로 평면 PQR의 방정식을 계산하기는 어렵습니다. 당장 Q, R의 좌표를 찾는 게 힘듭니다.

C의 좌표가 예쁘다면(Q, R의 좌표를 찾기 쉽다면) 평면 PQR의 방정식을 어렵지 않게 구할 수 있겠습니다.C의 좌표를 입맛에 맞게 바꾸고 싶습니다. 여기서 주의해야 할 것은 점의 좌표를 바꾸더라도 점들의 위치 관계가 변하면 안 된다는 것입니다.

xy평면은 그대로 xy평면으로 두고(z축은 그대로 z축으로 두고), C의 좌표를 다음과 같이 바꿔보겠습니다.



세 점 $(0,0,1)$, $(8,0,5)$, $(3,5,5)$를 지나는 평면의 방정식을 찾아야 합니다.
평면이 $(0,0,1)$을 포함하므로 $ax+by+cz=c$로 둘 수 있겠습니다.
$(8,0,5)$, $(3,5,5)$를 대입하여 세 미지수 a, b, c의 비를 찾읍시다.

$8a+5c=c$, $3a+5b+5c=c$입니다. $a=b$이고, $a:c=-1:2$입니다.

그러므로 평면 PQR의 방정식은 $-x-y+2z=2$입니다.

평면 $\mathrm{OQ_1R_1}$의 법선벡터는 $(0,0,1)$이고, 평면 PQR의 법선벡터는 $(-1,-1,2)$이므로
$\cos\theta=\dfrac{|(0,0,1)\cdot(-1,-1,2)|}{|(0,0,1)||(-1,-1,2)|}=\dfrac{2}{\sqrt{6}}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$입니다.

그러므로 삼각형 $\mathrm{OQ_1R_1}$의 평면 PQR 위로의 정사영의 넓이는 $20\cos\theta=\dfrac{20}{3}\sqrt{6}$입니다.

이 글에서는 설명하지 않았지만 Q, R의 위치를 찾는 것부터 어려웠을 수 있습니다.
이면각의 크기 계산은 그것보다 쉬워 보이네요.

모든 점들의 위치 관계가 유지된다면 점 C의 좌표를 바꿔도 된다는 생각을 하지 못했다면 평면의 방정식을 구해서 이면각의 크기를 얻는 것은 매우 힘들었을 것입니다.

C의 좌표를 바꿔서 평면의 방정식을 찾는 게 발상적이라고 생각할 수도 있겠습니다. 그렇지만 교과 외를 공부하실 분들이라면 점의 좌표를 바꿔도 됨을 기억하고, 연습도 해보면 좋겠습니다.

풀이 ①이 가장 편한 것 같기는 합니다. 그래도 풀이 ② - (2)까지는 가져가시면 좋겠습니다.