

제 2 교시

수학 영역

5지선다형

1. $\frac{\log_4 343}{\log_2 49}$ 의 값은? [2점]

- ① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{3}{4}$ ④ 1 ⑤ $\frac{5}{4}$

2. $x > 0$ 에서 정의된 함수 $f(x) = x^x$ 에 대하여 $\frac{f'(e^2)}{f(e^2)}$ 의 값은? [2점]

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{3n}{3n+k}}$ 의 값은? [2점]

- ① $4\sqrt{3}-6$ ② $\sqrt{3}-1$ ③ $5\sqrt{3}-8$
 ④ $2\sqrt{3}-3$ ⑤ $3\sqrt{3}-5$

4. 모든 항이 음이 아닌 등차수열 $\{a_n\}$ 이 $4a_4 = a_{10} + 6$ 을 만족시킬 때, a_6 의 최댓값은? [3점]

- ① 6 ② 8 ③ 10 ④ 12 ⑤ 14

5. 다음 <조건>을 만족하는 세 자연수 x, y, z 의 순서쌍 (x, y, z) 의 개수는? [3점]

<조 건>

(가) $x + y + z = 15$
 (나) y 는 x, z 의 산술평균보다 작지 않다.

- ① 33 ② 36 ③ 39 ④ 42 ⑤ 45

6. 주기가 3인 함수 $f(x)$ 가 다음 <조건>을 만족시킬 때,

$\int_0^{14} f(x)dx$ 의 값은? [3점]

<조 건>

(가) $\int_5^9 f(x)dx = 7$

(나) $\int_{12}^{17} f(x)dx = 8$

- ① 20 ② 21 ③ 22 ④ 23 ⑤ 24

7. 좌표평면 위의 세 점 A, B, C가 다음 <조건>을 만족할 때, $\overline{AB} + \overline{BC} - \overline{CA}$ 의 값을 구하시오. [3점]

<조 건>

(가) 세 점 A, B, C의 x 좌표를 각각 x_1, x_2, x_3 라 하면
 $2(x_2 - x_1) = x_3 - x_2 = 4$ 이다.
 (나) $6\sin(\angle CAB) = 3\sin(\angle ABC) = 2\sin(\angle BCA)$

- ① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

8. 실수 전체 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$ 가 상수 k 에 대해

$$f(x) = f'(x) + k$$

를 만족시킨다. $f'(1) = 2e$, $(f \circ f)(0) = 2e^3 + 1$ 일 때, $f(k)$ 의 값은? [3점]

- ① $\frac{2}{e^2} + 1$ ② $\frac{2}{e} + 1$ ③ 3 ④ $2e + 1$ ⑤ $2e^2 + 1$

9. $f(x) = \frac{2}{\cot^3 x}$ 에 대하여 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x) dx = \ln \frac{m}{e^n}$ 으로 나타

내어진다. $m + n$ 의 값은? (단, m, n 은 자연수이다.) [3점]

- ① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

10. 수직선 위를 움직이는 점 P의 시간 t 에서의 속도 $v(t)$ 가

$$e^{v(t)} = t + \sqrt{t^2 + 1}$$

을 만족시킨다. 점 P가 시간 $t = \frac{3}{4}$ 에서부터 $t = \frac{4}{3}$ 까지

움직인 거리를 d 라 할 때, e^{12d-5} 의 값은? [3점]

- ① $\frac{3^{14}}{2^7}$ ② $\frac{3^{15}}{2^8}$ ③ $\frac{3^{16}}{2^9}$ ④ $\frac{3^{17}}{2^{10}}$ ⑤ $\frac{3^{18}}{2^{11}}$

11. 열린구간 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 에서 정의된 함수 $f(x)$ 와 도함수 $f'(x)$ 가 다음 <조건>을 만족시킬 때, $f(a)=1$ 을 만족하는 상수 a 의 값은? [3점]

<조 건>

(가) $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0$

(나) $f'(x) = 1 + \{f(x)\}^2$

- ① $\frac{1}{12}\pi$ ② $\frac{1}{6}\pi$ ③ $\frac{1}{4}\pi$ ④ $\frac{1}{3}\pi$ ⑤ $\frac{5}{12}\pi$

12. $x > 0$ 에서 미분가능한 함수 $f(x)$ 가

$$f(x) + \frac{x}{2}f'(x) = \left(1 + \frac{2}{x}\right)\ln x$$

를 만족한다. $f(1) = -\frac{9}{2}$ 일 때, $f(e)$ 의 값은? [3점]

- ① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{5}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

13. 실수 전체의 집합에서 정의되고 공역이 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 인
 미분가능한 함수 $f(x)$ 가 다음 <조건>을 만족시킬 때, 함수
 $g(x)$ 가 $g(x) = \int \{f^{-1}(x)\}^3 dx$, $g(0) = 0$ 을 만족한다.
 두 자연수 p, q 에 대하여 $2g\left(\frac{\pi}{3}\right) = p - \ln q$ 로 나타내어질 때,
 $p+q$ 의 값은? [3점]

<조 건>

(가) $f(0) = 0$
 (나) $f'(x) = \cos^2 f(x)$

- ① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

14. 다음 <조건>을 만족하는 $0 \leq x \leq 1$ 에서 정의된 함수 $f(x)$
 에 대하여 함수 $g(f(x))$ 를 $g(f(x)) = \int_0^1 \sqrt{1 + \{f'(x)\}^2} dx$
 로 정의할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?
 [4점]

<조 건>

(가) $f(x)$ 는 닫힌 구간 $[0, 1]$ 에서 연속이고
 열린 구간 $(0, 1)$ 에서 미분가능하다.
 (나) $f(x) \geq e^x$

<보 기>

ㄱ. $\int_0^1 f(x) dx$ 는 $f(x) = e^x$ 일 때 최소이다.
 ㄴ. $g(f(x))$ 는 $f(x) = (e-1)x+1$ 일 때 최소이다.
 ㄷ. 모든 $f(x)$ 에 대하여 $g'(f(c)) = \frac{e-1}{f'(c)}$ 을 만족하는
 실수 c 가 열린 구간 $(0, 1)$ 에 적어도 하나 존재한다.

- ① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
 ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

15. 다음 <과정>은 $p > 0$ 일 때, 함수 $f(x) = (\cos x)^{(\csc x)^p}$ 에 대하여 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ 의 값을 p 의 범위에 따라 구하는 과정이다.

<과 정>

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (\cos x)^{(\csc x)^p}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \{1 + (\cos x - 1)\} \frac{1}{\sin^p x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} (\boxed{\text{(가)}}) \frac{(\cos x - 1)}{\sin^p x} \text{ 이다.}$$

한편, p 의 범위에 따라 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\cos x - 1)}{\sin^p x}$ 을 구해 보면,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\cos x - 1)}{\sin^p x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos^2 x - 1}{\sin^p x (\cos x + 1)}$$

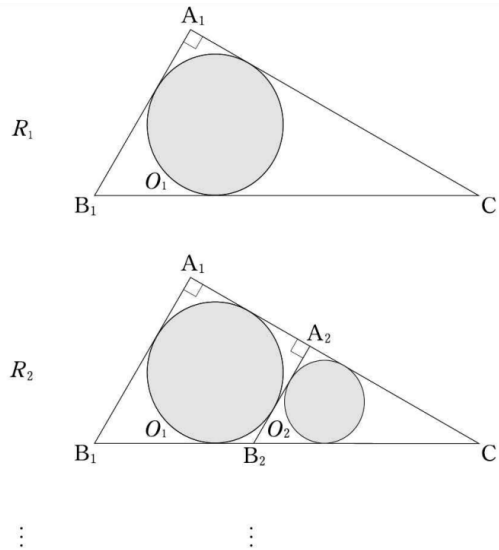
$$= -\frac{1}{2} \times \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin^2 x}{\sin^p x} = -\frac{1}{2} \times \lim_{x \rightarrow 0^+} \sin^{2-p} x \text{ 이므로,}$$

(i) $p > \boxed{\text{(나)}}$ 인 경우, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \boxed{\text{(다)}}$ 이고,
 (ii) $p < \boxed{\text{(나)}}$ 인 경우, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \boxed{\text{(라)}}$ 이고,
 (iii) $p = \boxed{\text{(나)}}$ 인 경우, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \boxed{\text{(마)}}$ 이다.

위의 (가), (나), (다), (라), (마)에 알맞은 수를 각각 a, b, c, d, e 라 할 때, $[a+b+c+d+e^2]$ 의 값은?
 (단, $[x]$ 는 x 보다 작지 않은 최소의 정수를 의미한다.) [4점]

- ① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

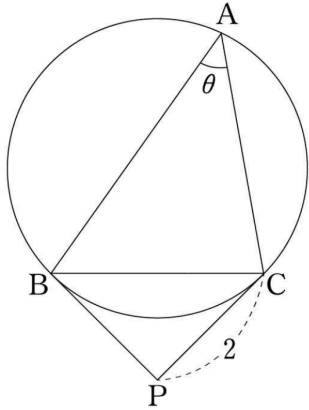
16. $\overline{A_1 B_1} = 1$ 이고 $\angle A_1 = \frac{\pi}{2}$, $\angle B_1 = \frac{\pi}{3}$ 인 삼각형 $A_1 B_1 C$ 가 있다. 그림과 같이 삼각형 $A_1 B_1 C$ 에 내접하는 원을 O_1 이라 하고, 원 O_1 의 내부에 색칠하여 얻은 그림을 R_1 이라 하자. 그림 R_1 에서 선분 $A_1 B_1$ 에 평행하고 원 O_1 에 접하는 직선이 두 선분 $A_1 C$, $B_1 C$ 와 만나는 점을 각각 A_2 , B_2 라 하자. 삼각형 $A_2 B_2 C$ 에 내접하는 원을 O_2 라 하고 원 O_2 의 내부에 색칠하여 얻은 그림을 R_2 라 하자. 이와 같은 과정을 반복하여 n 번째 얻은 그림 R_n 에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n 이라 할 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ 의 값은? [4점]



- ① $\frac{6 - \sqrt{3}}{4} \pi$ ② $\frac{6 - 2\sqrt{3}}{4} \pi$ ③ $\frac{6 + 2\sqrt{3}}{4} \pi$
 ④ $\frac{6 - 3\sqrt{3}}{4} \pi$ ⑤ $\frac{3 - 2\sqrt{3}}{4} \pi$

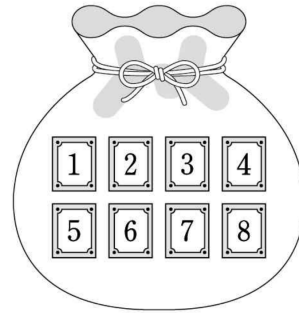
17. 그림과 같이 $\angle BAC = \theta$ 인 삼각형 ABC에 외접하는 원에 대하여 원 밖의 한 점 P에서 원에 그은 두 접선의 접점을 각각 B, C라 할 때, $\overline{PC} = 2$ 이다. 삼각형 ABC의 외접원의 넓이를 $f(\theta)$, 삼각형 PBC의 넓이를 $g(\theta)$ 라 할 때,

$\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{f(\theta) \times \sin^3 \theta}{g(\theta)}$ 의 값은? [4점]



- ① π
- ② 2π
- ③ 3π
- ④ 4π
- ⑤ 5π

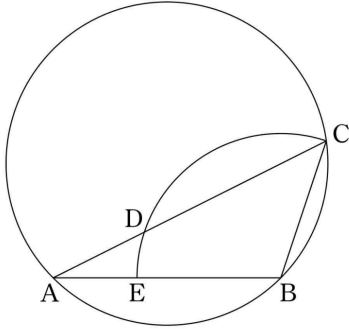
18. 주머니에 1부터 8까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 8장의 카드가 들어 있다. 이 주머니에서 임의로 1장의 카드를 꺼내어 카드에 적혀 있는 숫자를 확인하고 다시 주머니에 넣는 것을 '시행'이라 하자. 세 번의 '시행'을 할 때, 꺼낸 카드에 적혀 있는 숫자를 순서대로 a_1, a_2, a_3 이라 하자. $a_1 + a_2 + a_3 \leq 12$ 일 때, $(a_1 - 1)(a_2 - 2) = 0$ 일 확률은 $\frac{q}{p}$ 이다. $p+q$ 의 값을 구하면?
(단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.) [4점]



- ① 70
- ② 71
- ③ 72
- ④ 73
- ⑤ 74

19. 그림과 같이 넓이가 5π 인 원에 내접하는 삼각형 ABC가 있다. 선분 BC를 반지름으로 하는 부채꼴이 선분 AC를 1:2로 내분하는 점 D를 지날 때, $\tan(\angle CAB) = \frac{1}{2}$ 이다.

$\overline{DE}^2 = p + q\sqrt{10}$ 일 때, $5(p+q)$ 의 값은?
(단, p, q 는 유리수이다.) [4점]



- ① 23 ② 28 ③ 33 ④ 38 ⑤ 43

20. 닫힌구간 $[e, 2e]$ 에서 연속이고 열린구간 $(e, 2e)$ 에서 미분가능한 함수 $f(x)$ 가 $f(e) = 2e, f(2e) = e$ 를 만족할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

- ㄱ. $f(c_1) = c_1$ 를 만족하는 실수 c_1 이 열린구간 $(e, 2e)$ 에 적어도 하나 존재한다.
- ㄴ. $e \times \int_e^{2e} f(x)dx = f(c_2)$ 를 만족하는 실수 c_2 가 열린구간 $(e, 2e)$ 에 적어도 하나 존재한다.
- ㄷ. $f'(c_3)f'(c_4) = -1$ 을 만족하는 실수 c_3, c_4 의 순서쌍 (c_3, c_4) ($e < c_3 < 2e, e < c_4 < 2e, c_3 \neq c_4$)가 적어도 하나 존재한다.

- ① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
 ④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

21. 닫힌구간 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 에서 연속이고 열린구간 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 에서

미분가능한 함수 $f(x)$ 가 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 인 모든 실수 x 에 대하여 $f'(x) \times \sin x > f(x) \times \sec x$ 를 만족시킬 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. 함수 $f(x)$ 는 열린구간 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 에서 증가한다.

ㄴ. $f\left(\frac{\pi}{4}\right) > 2 \times f\left(\frac{\pi}{6}\right)$ 이다.

ㄷ. $f\left(\frac{\pi}{3}\right) > 3 \times f\left(\frac{\pi}{6}\right)$ 이다.

- ① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
 ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

단답형

22. $(x^3 + x^2y + xy^2 + y^3)^4$ 의 전개식에서 x^4y^8 의 계수는? [3점]

23. 함수 $f(x)$ 는 $f(0) = 0$, $f'(x) = x^n \ln x$ 를 만족한다.
 $f(\sqrt[n]{e}) = 0$ 일 때, 자연수 n 의 값은? [3점]

24. 한 변의 길이가 6인 정육면체 $ABCD-EFGH$ 에서 선분 AB 를 2:1로 내분하는 점을 M , 선분 AD 를 3:2로 외분하는 점을 N 이라 할 때, 삼각형 EMN 내부의 영역 중 정육면체 $ABCD-EFGH$ 내부에 포함되지 않는 부분의 넓이는 $\frac{q}{p}$ 이다. $p+q$ 의 값은? (단, p, q 는 서로소인 자연수이다.) [3점]

25. 수열 $\{a_n\}$ 은 모든 자연수 n 에 대하여 $2^n a_n = 2n - 1$ 을 만족한다. $2^{10} \times \sum_{k=1}^{10} a_k$ 의 값은? [3점]

26. 연속확률변수 X 가 갖는 값의 범위는 $0 \leq X \leq \frac{\pi}{4}$ 이고,

X 의 확률밀도함수는 $f(x)$ 이다. $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$ 에서

$$f(x) = k \times \tan^7 x$$

일 때, 세 자연수 a, b, c 에 대하여 $k = \frac{b}{a} - \ln \sqrt{c}$ 이다.

$a+b+c$ 의 값은? [4점] (단, a, b 는 서로소이다.)

27. 다음 <조건>을 만족하는 1 이 아닌 자연수 n 과 자연수 a_1, a_2, \dots, a_n 에 대하여 $a_1 + a_2 + n$ 의 값은? [4점]

<조 건>

(가) $2 < a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$

(나) a_1, a_2, \dots, a_n 은 모두 $15^{25} + 1$ 의 약수이다.

(다) $\frac{2 \times 15^{25}}{15^{25} + 1} = \left(1 - \frac{2}{a_1}\right) + \left(1 - \frac{2}{a_2}\right) + \dots + \left(1 - \frac{2}{a_n}\right)$

28. $6n^2 - 192n + 1538$ 이 세제곱수가 되도록 하는 가장 작은 자연수 n 의 값은? [4점]

29. 최고차항의 계수가 $\frac{1}{3}$ 인 사차함수 $f(x)$ 가 다음 <조건>을 만족시킨다.

- <조 건>
- (가) $f(x)$ 의 서로 다른 극값의 수는 $f'(k) = 0$ 을 만족하는 서로 다른 k 의 개수보다 적다.

(나) $f'(0) = 0$

(다) $f(0) = f(3) = 4$

실수 p 에 대하여 $f(p)$ 로 가능한 값을 a_1, a_2, \dots, a_n ($a_1 < a_2 < \dots < a_n$) 이라 할 때, a_1, a_2, \dots, a_n 이 공차가 16 인 등차수열을 이루도록 하는 양수 p 에 대하여 $n+p$ 의 값은? [4점]

30. $x > 0$ 에서 정의되고 $x > 0$ 에서 미분가능한 함수 $f(x)$ 가 다음 <조건>을 만족시킨다.

- <조 건>
- (가) 집합 $\{a \mid f(a) \leq 0, a > 0\}$ 은 공집합이다.

(나) $2x\sqrt{x}f'(x) = \sqrt{x}\ln f(x)^{f(x)} + 2x^4f(x)$

(다) $f(1) = e$

$\ln f(9)$ 의 값은? [4점]

* 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인 하시오.