제 2 교시

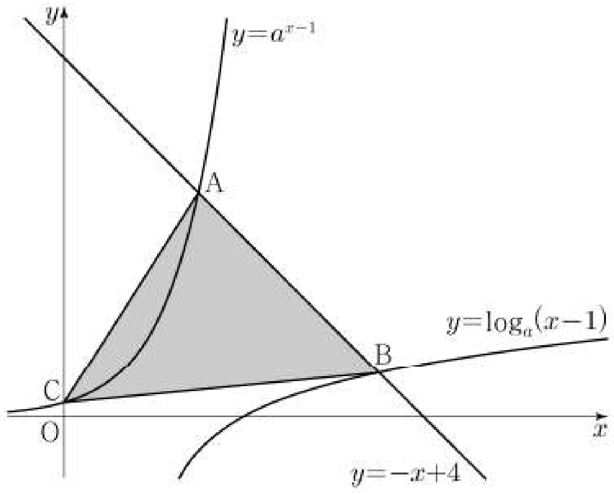
수학 영역

원본문제 2022.09 평가원 21번 [수학 I]

1. $a>1$인 실수 a에 대하여 직선 $y=-x+4$가 두 곡선

$$y=a^{x-1},\ y=\log_a(x-1)$$

과 만나는 점을 각각 A, B라 하고, 곡선 $y=a^{x-1}$이 y축과 만나는 점을 C라 하자. $\overline{\mathrm{AB}}=2\sqrt{2}$일 때, 삼각형 ABC의 넓이는 S이다. $50\times S$의 값을 구하시오. [4점]

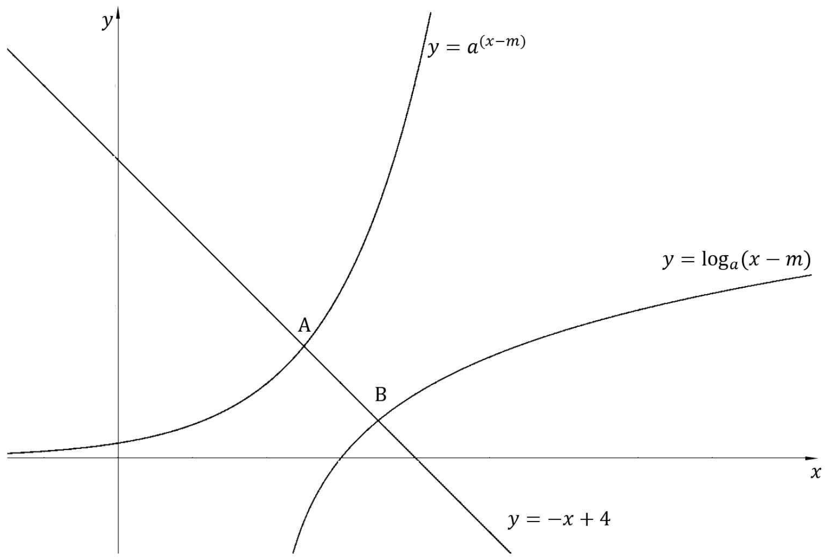


변형문제 [출제] 유수진

2. 그림과 같이 $a>1$인 실수 a에 대하여 직선 $y=-x+4$가 두 곡선

$$y=a^{x-m},\ y=\log_a(x-m)$$

과 만나는 점을 각각 A, B라 하자. $\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{2}$이고, 점 A와 점 B의 중점의 좌표가 $(3,1)$일 때, $a+m$의 값은? [3점]



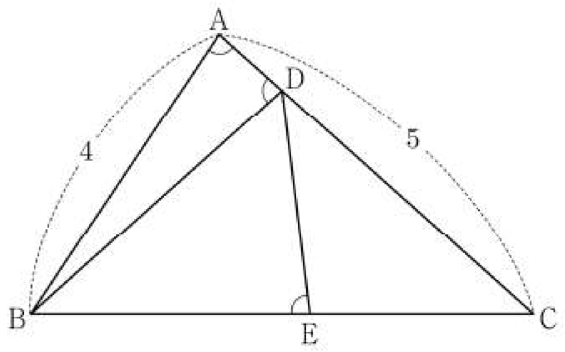
① $\frac{7}{2}$ ② $\frac{15}{4}$ ③ 4 ④ $\frac{17}{4}$ ⑤ $\frac{9}{2}$

원본문제 2022.06 평가원 12번 [수학 I]

3. 그림과 같이 $\overline{AB}=4$, $\overline{AC}=5$이고 $\cos(\angle BAC)=\frac{1}{8}$인 삼각형 ABC가 있다. 선분 AC 위의 점 D와 선분 BC 위의 점 E에 대하여

$$\angle BAC=\angle BDA=\angle BED$$

일 때, 선분 DE의 길이는? [4점]



① $\frac{7}{3}$ ② $\frac{5}{2}$ ③ $\frac{8}{3}$ ④ $\frac{17}{6}$ ⑤ 3

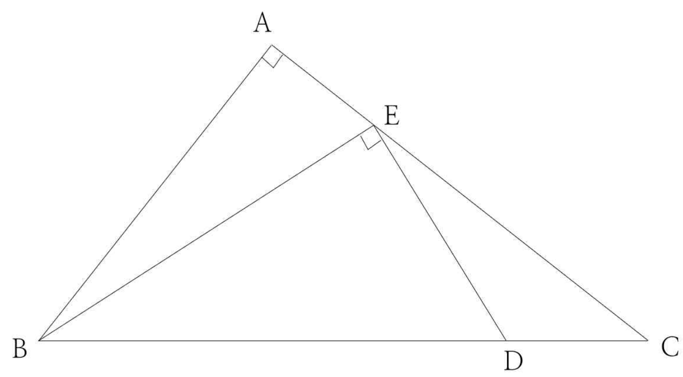
변형문제 [출제] 박진우

4. 그림과 같이

$$\angle BAC=\angle BED=\frac{\pi}{2}$$

인 두 삼각형 ABC, BDE가 있다. $\overline{BE}=10$, $\overline{AE}=\overline{DC}$이고, 삼각형 ABE, EDC의 외접원의 중심을 각각 O, O′라 할 때, $\overline{OO'}=6$이다. 이때 삼각형 ABE의 외접원과 삼각형 EDC의 외접원이 만나서 생기는 두 점을 이은 선분의 길이를 구하시오.

[4점]



원본문제 2022.09 평가원 15번 [수학 I]

5. 수열 $\{a_n\}$은 $|a_1| \le 1$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1} = \begin{cases} -2a_n - 2 & \left(-1 \le a_n < -\frac{1}{2}\right) \\ 2a_n & \left(-\frac{1}{2} \le a_n \le \frac{1}{2}\right) \\ -2a_n + 2 & \left(\frac{1}{2} < a_n \le 1\right) \end{cases}$$

을 만족시킨다. $a_5 + a_6 = 0$이고 $\sum_{k=1}^{5} a_k > 0$이 되도록 하는 모든 a_1의 값의 합은? [4점]

① $\frac{9}{2}$ ② 5 ③ $\frac{11}{2}$ ④ 6 ⑤ $\frac{13}{2}$

변형문제 [출제] 유수진

6. 수열 $\{a_n\}$은 $|a_1| \le 1$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1} = \sin(\pi a_n)$$

을 만족시킨다. $a_5 \times a_6 = 0$이고 $\sum_{k=1}^{5} a_k > 0$이 되도록 하는 모든 a_1의 값의 합은? [4점]

① $\frac{13}{2}$ ② $\frac{15}{2}$ ③ $\frac{17}{2}$ ④ $\frac{19}{2}$ ⑤ $\frac{21}{2}$

원본문제 2020.06 평가원 나형 15번 [수학Ⅱ]

7. 두 함수

$$f(x)=\begin{cases} -2x+3 & (x<0) \\ -2x+2 & (x \geq 0) \end{cases},$$

$$g(x)=\begin{cases} 2x & (x<a) \\ 2x-1 & (x \geq a) \end{cases}$$

가 있다. 함수 $f(x)g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 상수 a의 값은? [4점]

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

변형문제 [출제] 나동하

8. 함수 $f(x)=\dfrac{2x^2+(a+1)x+4}{x^2+ax+5a}$에 대하여 함수 $\dfrac{1}{f(x)}$이 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 모든 정수 a의 값의 합을 구하시오. [3점]

원본문제 2022.09 평가원 22번 [수학Ⅱ]

9. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$g(x)=f(x-3)\times\lim_{h\to 0+}\frac{|f(x+h)|-|f(x-h)|}{h}$$

가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(5)$의 값을 구하시오. [4점]

> (가) 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.
>
> (나) 방정식 $g(x)=0$은 서로 다른 네 실근 α_1, α_2, α_3, α_4를 갖고 $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4=7$이다.

변형문제 [출제] 나동하

10. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (0\le x\le 2) \\ (x-1)f(x) & (x<0 \text{ 또는 } x>2) \end{cases}$$

와 상수 k는 다음 조건을 만족시킨다. (단, $g(2)\neq 0$)

> (가) 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.
>
> (나) 함수 $g(x)$가 미분가능하지 않은 점의 개수는 1이다.
>
> (다) $g(k)=0$, $g'(k)=18$

$g(4)\displaystyle\int_0^k|f(x)|dx$의 값을 구하시오. [4점]

원본문제 2022 수능 20번 [수학Ⅱ]

11. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 닫힌구간 $[0, 1]$에서 $f(x)=x$이다.
> (나) 어떤 상수 a, b에 대하여 구간 $[0, \infty)$에서 $f(x+1)-xf(x)=ax+b$이다.

$60\times\int_1^2 f(x)dx$의 값을 구하시오. [4점]

변형문제 [출제] 나동하

12. 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $0\le x\le 1$에서 $f(x)=-x^2+2$이다.
> (나) 모든 실수 x에 대하여 $f(1-x)=f(1+x)$이다.
> (다) 모든 실수 x에 대하여 $f(x+2)=f(x)$이다.

수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$a_1+2a_2+3a_3+\cdots+na_n=\int_{-n}^{n} f(x)dx \quad (n=1, 2, 3, \cdots)$$

일 때, $\sum_{n=1}^{15} n^2 a_n$의 값을 구하시오. [4점]

원본문제 2022.09 평가원 30번 [확률과 통계]

13. 네 명의 학생 A, B, C, D에게 같은 종류의 사인펜 14개를 다음 규칙에 따라 남김없이 나누어 주는 경우의 수를 구하시오.

[4점]

(가) 각 학생은 1개 이상의 사인펜을 받는다.
(나) 각 학생이 받는 사인펜의 개수는 9 이하이다.
(다) 적어도 한 학생은 짝수 개의 사인펜을 받는다.

변형문제 [출제] 박재형

14. 네 명의 학생 A, B, C, D에게 같은 종류의 사인펜 10개를 다음 규칙에 따라 남김없이 나누어 주는 경우의 수를 구하시오.

[4점]

(가) 적어도 한 학생은 사인펜을 받지 못한다.
(나) 각 학생이 받는 사인펜의 개수는 6 이하이다.

원본문제 2022 수능 30번 [확률과 통계]

15. 흰 공과 검은 공이 각각 10개 이상 들어 있는 바구니와 비어 있는 주머니가 있다. 한 개의 주사위를 사용하여 다음 시행을 한다.

주사위를 한 번 던져 나온 눈의 수가 5 이상이면 바구니에 있는 흰 공 2개를 주머니에 넣고, 나온 눈의 수가 4 이하이면 바구니에 있는 검은 공 1개를 주머니에 넣는다.

위의 시행을 5번 반복할 때, $n(1 \le n \le 5)$번째 시행 후 주머니에 들어 있는 흰 공과 검은 공의 개수를 각각 a_n, b_n이라 하자. $a_5 + b_5 \ge 7$일 때, $a_k = b_k$인 자연수 $k(1 \le k \le 5)$가 존재할 확률은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.

(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

변형문제 [출제] 박재형

16. 흰 공과 검은 공이 각각 10개 이상 들어 있는 바구니와 비어 있는 주머니가 있다. 한 개의 주사위를 사용하여 다음 시행을 한다.

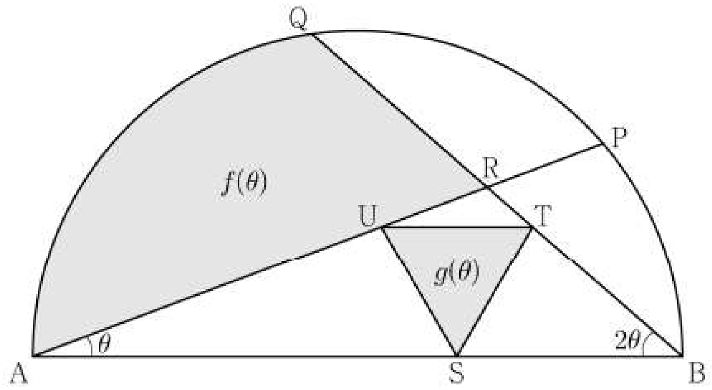
주사위를 한 번 던져 나온 눈의 수가 5 이상이면 바구니에 있는 흰 공 2개를 주머니에 넣고, 나온 눈의 수가 4 이하이면 바구니에 있는 검은 공 1개를 주머니에 넣는다.

위의 시행을 5번 반복할 때, 5번째 시행 후 흰 공과 검은 공의 개수를 각각 a, b라 하면 $a+b \le 6$이다. 5번째 시행 후 주머니에서 한 공을 뽑았을 때 그 공이 검은색일 확률을 $\frac{q}{p}$라 할 때, $p+q$의 값을 구하시오.

(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

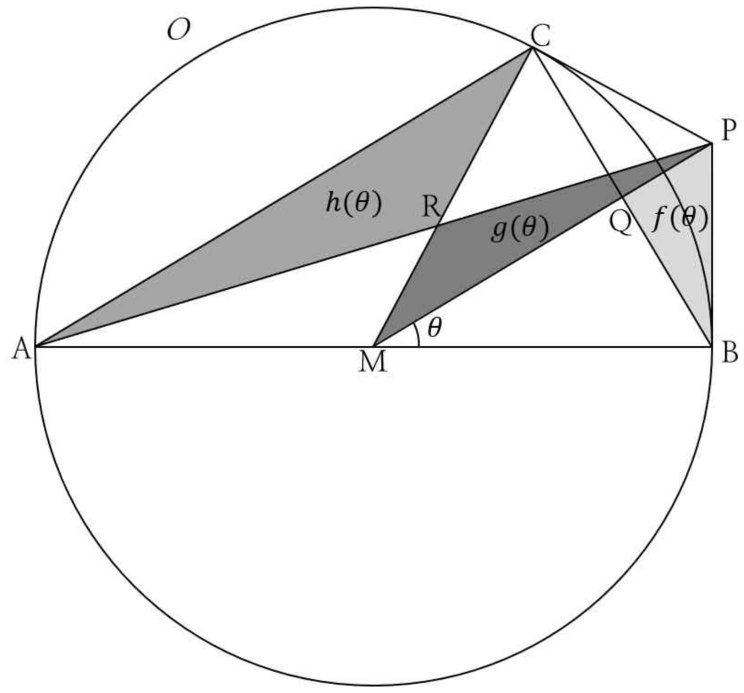
원본문제 2022 수능 29번 [미적분]

17. 그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원이 있다. 호 AB 위에 두 점 P, Q를 $\angle \mathrm{PAB}=\theta$, $\angle \mathrm{QBA}=2\theta$가 되도록 잡고, 두 선분 AP, BQ의 교점을 R라 하자.
선분 AB 위의 점 S, 선분 BR 위의 점 T, 선분 AR 위의 점 U를 선분 UT가 선분 AB에 평행하고 삼각형 STU가 정삼각형이 되도록 잡는다. 두 선분 AR, QR와 호 AQ로 둘러싸인 부분의 넓이를 $f(\theta)$, 삼각형 STU의 넓이를 $g(\theta)$라 할 때, $\lim_{\theta\to 0+}\frac{g(\theta)}{\theta\times f(\theta)}=\frac{q}{p}\sqrt{3}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.
(단, $0<\theta<\frac{\pi}{6}$이고, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



변형문제 [출제] 장재훈

18. 그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 원 O가 있다. 호 AB 위의 A와 B가 아닌 한 점 C에 대하여 원 O의 B에서의 접선과 C에서의 접선이 만나는 점을 P라 하자. 선분 AB의 중점을 M이라 할 때, 선분 PM과 선분 BC의 교점을 Q라 하고, 선분 AP와 선분 CM의 교점을 R라 하자. $\angle \mathrm{PMB}=\theta$일 때, 삼각형 BPQ의 넓이를 $f(\theta)$, 삼각형 PRM의 넓이를 $g(\theta)$, 삼각형 ARC의 넓이를 $h(\theta)$라 하자. $\lim_{\theta\to 0+}\frac{h(\theta)}{g(\theta)}\times\frac{f(\theta)}{\theta^3}=a$일 때, $60a^2$의 값을 구하시오.
(단, $0<\theta<\frac{\pi}{2}$) [4점]



원본문제 2020.06 평가원 21번 [미적분]

19. 함수 $f(x)=\frac{\ln x}{x}$와 양의 실수 t에 대하여 기울기가 t인 직선이 곡선 $y=f(x)$에 접할 때 접점의 x좌표를 $g(t)$라 하자. 원점에서 곡선 $y=f(x)$에 그은 접선의 기울기가 a일 때, 미분가능한 함수 $g(t)$에 대하여 $a\times g'(a)$의 값은? [4점]

① $-\frac{\sqrt{e}}{3}$ ② $-\frac{\sqrt{e}}{4}$ ③ $-\frac{\sqrt{e}}{5}$
④ $-\frac{\sqrt{e}}{6}$ ⑤ $-\frac{\sqrt{e}}{7}$

변형문제 [출제] 박진우

20. 함수 $f(x)=(x^2+2x)e^x$에 대하여 x에 대한 방정식

$$f(x)=tf'(t)\ (t\text{는 실수})$$

의 실근 중 가장 작은 것을 $\alpha(t)$, 가장 큰 것을 $\beta(t)$라 하자. $\beta(k)-\alpha(k)=2$인 상수 k에 대하여 $\beta'(k)-\alpha'(k)$의 값은?
(단, $-2+\sqrt{2}<t$, $tf'(t)<f(-2-\sqrt{2})$) [4점]

① $1+e^2$ ② $2+e^2$ ③ $1+2e^2$
④ $2+2e^2$ ⑤ $3+2e^2$

추가문제 [출제] 이강록·장재훈

21. 함수 $f(x)=\left(\frac{1}{3}x^2+ax+b\right)e^{x-3}$과 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

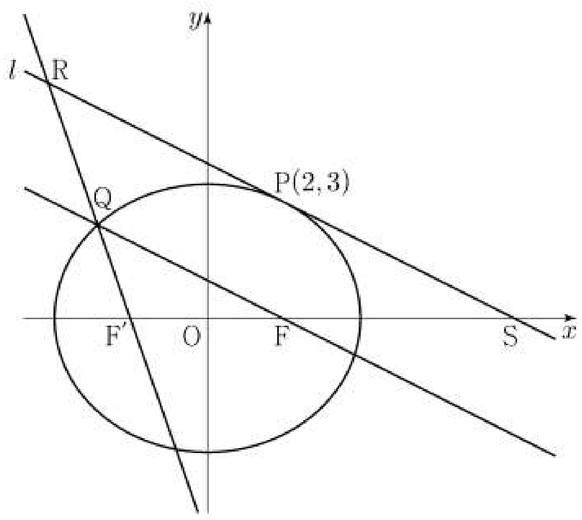
> (가) 모든 실수 x에 대하여 $\{f(x)\}^2-\{g(x)\}^2=0$
> (나) 함수 $g(x)$는 $x=-2$에서 극솟값을 갖고, 극댓값은 갖지 않는다.

$f(3)$의 값은? [4점]

① $\frac{3}{2}$ ② 3 ③ $\frac{9}{2}$ ④ 6 ⑤ $\frac{15}{2}$

원본문제 2022.09 평가원 28번 [기하]

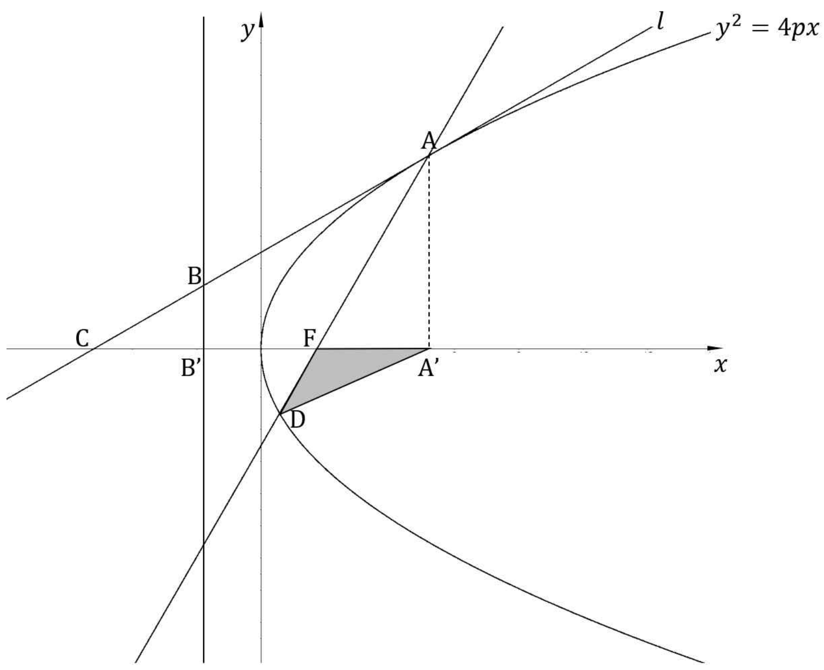
22. 그림과 같이 두 점 $\mathrm{F}(c,0)$, $\mathrm{F}'(-c,0)(c>0)$을 초점으로 하는 타원 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$ 위의 점 $\mathrm{P}(2,3)$에서 타원에 접하는 직선을 l이라 하자. 점 F를 지나고 l과 평행한 직선이 타원과 만나는 점 중 제2사분면 위에 있는 점을 Q라 하자. 두 직선 F$'$Q와 l이 만나는 점을 R, l과 x축이 만나는 점을 S라 할 때, 삼각형 SRF$'$의 둘레의 길이는? [4점]



① 30 ② 31 ③ 32 ④ 33 ⑤ 34

변형문제 [출제] 이강록

23. 그림과 같이 초점이 F인 포물선 $y^2=4px$ 위의 한 점 $\mathrm{A}(k,6)$에서 포물선에 접하는 직선을 l이라 하자. 직선 l이 포물선의 준선과 만나는 점을 B, x축과 만나는 점을 C라 하고, 두 점 A와 B에서 x축에 내린 수선의 발을 각각 A$'$, B$'$이라 하자. 삼각형 CBB$'$의 넓이를 S_1, 삼각형 AFA$'$의 넓이를 S_2라 할 때, $3S_1=S_2$이다. 두 점 A, F를 지나는 직선이 이 포물선과 만나는 점 중 A가 아닌 점을 D라 할 때, 삼각형 FDA$'$의 넓이는? (단, $k>p>0$) [4점]



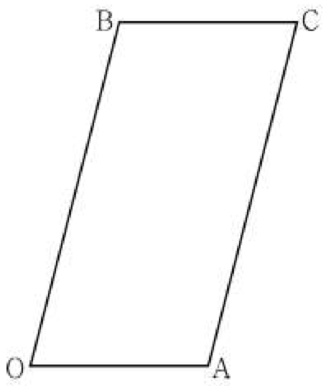
① 3 ② $2\sqrt{3}$ ③ $\sqrt{15}$ ④ $3\sqrt{2}$ ⑤ $\sqrt{21}$

원본문제 2022 수능 29번 [기하]

24. 좌표평면에서 $|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=\sqrt{2}$, $|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=2\sqrt{2}$이고 $\cos(\angle \mathrm{AOB})=\frac{1}{4}$인 평행사변형 OACB에 대하여 점 P가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ $(0 \le s \le 1, 0 \le t \le 1)$
(나) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{BP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=2$

점 O를 중심으로 하고 점 A를 지나는 원 위를 움직이는 점 X에 대하여 $|3\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OX}}|$의 최댓값과 최솟값을 각각 M, m이라 하자. $M\times m=a\sqrt{6}+b$일 때, a^2+b^2의 값을 구하시오.
(단, a와 b는 유리수이다.) [4점]



변형문제 [출제] 이강록

25. 좌표평면 위의 두 점 A$(0, 8)$, B$(k, 0)$과 세 점 P, Q, R가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 두 점 P, Q는 점 A를 중심으로 하고 반지름의 길이가 4인 원 위를 움직인다.
(나) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OR}}=0$, $\overrightarrow{\mathrm{OR}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BR}}=0$

$\overrightarrow{\mathrm{OX}}=\overrightarrow{\mathrm{OQ}}+\overrightarrow{\mathrm{BR}}$라 할 때, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OX}}$의 최댓값과 최솟값의 합이 -16이다. 양의 실수 k의 값은? (단, O는 원점) [4점]

① $2\sqrt{3}$ ② 4 ③ $4\sqrt{3}$ ④ 8 ⑤ $8\sqrt{3}$

＊ 확인 사항 ○ 썸튜브 구독 버튼을 홀수 번 눌렀는지 확인하시오.

제 2 교시

빠른 정답

빠른 정답									
1	192	2	④	3	③	4	8	5	①
6	③	7	④	8	10	9	108	10	324
11	110	12	400	13	218	14	126	15	191
16	985	17	11	18	240	19	②	20	①
21	②	22	①	23	②	24	100	25	④

제 2 교시

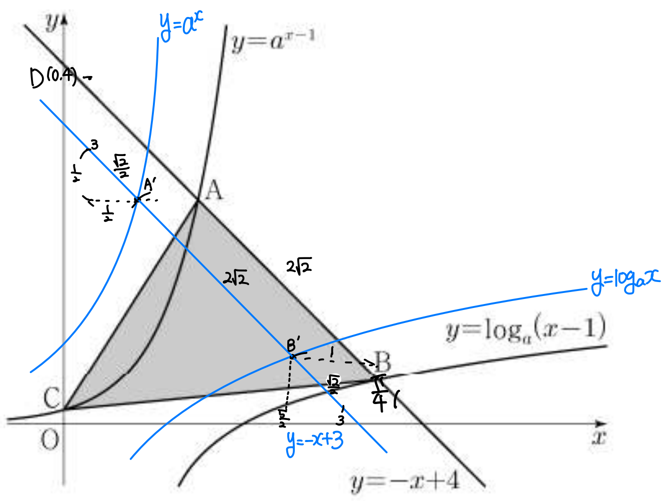
수학 영역

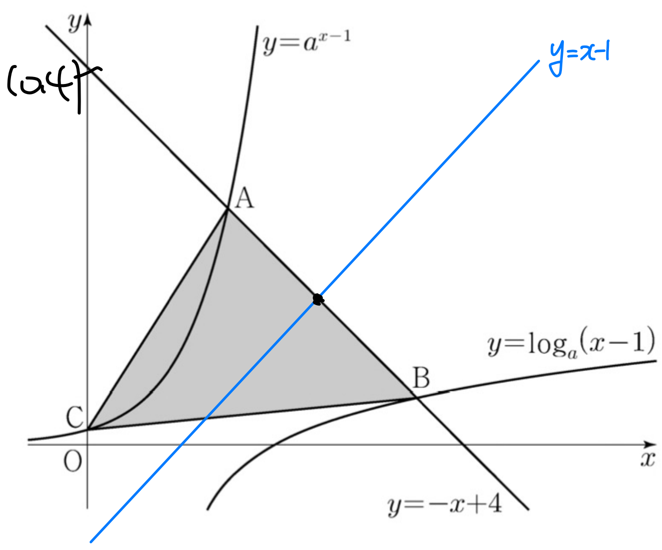
원본문제 [손풀이] 유수진 | [해설강의] 유수진

1. $a>1$인 실수 a에 대하여 직선 $y=-x+4$가 두 곡선

$$y=a^{x-1},\quad y=\log_a(x-1)$$

과 만나는 점을 각각 A, B라 하고, 곡선 $y=a^{x-1}$이 y축과 만나는 점을 C라 하자. $\overline{\mathrm{AB}}=2\sqrt{2}$일 때, 삼각형 ABC의 넓이는 S이다. $50\times S$의 값을 구하시오. [4점]





첫번째풀이) Point 평행이동하기 전 함수 찾기

$y=a^{x-1}$은 $y=a^x$ 그래프를 x축의 방향으로 1만큼 평행이동한 함수이다.

$y=\log_a(x-1)$은 $y=\log_a x$ 그래프를 x축의 방향으로 1만큼 평행이동한 함수이다.

점 A'을 x축의 방향으로 1만큼 이동한 것이 점 A라고 하고,

점 B'을 x축의 방향으로 1만큼 이동한 것이 점 B라 하면,

$\overline{A'B'}=\overline{AB}=2\sqrt{2}$ 이고, 점 A', 점 B'은 $y=-x+3$ 위의 점이다.

점 A'과 점 B'는 $y=x$에 대하여 대칭이므로, (3,0)과 B'사이 거리 = (0,3)과 A' 사이거리 $=\frac{\sqrt{2}}{2}$이다.

따라서 점 B'의 좌표는 $\left(\frac{5}{2},\frac{1}{2}\right)$ 점A'의 좌표는 $\left(\frac{1}{2},\frac{5}{2}\right)$이다.

점A을 이용해 a값을 구하면 $a^{\frac{1}{2}}=\frac{5}{2}$이고 $a=\frac{25}{4}$이다

점 C 의 좌표는 $\left(0,\frac{1}{a}\right)$이므로 $\left(0,\frac{4}{25}\right)$이다.

점(0,4)를 D라하면 $\triangle ABC$의 넓이는 $\triangle DCB$ 의 넓이 − $\triangle DCA$의 넓이와 같다.

$\triangle DCB$의 넓이 $=\overline{DC}\times\frac{7}{2}\times\frac{1}{2}$ 이고 $\triangle DCA$의 넓이$=\overline{DC}\times\frac{3}{2}\times\frac{1}{2}$이다.

$\triangle ABC$의 넓이$=\overline{DC}\times\left(\frac{7}{4}-\frac{3}{4}\right)=\overline{DC}=4-\frac{4}{25}=\frac{96}{25}$

$\therefore 50S=192$

두번째 풀이 Point 대칭이동한 함수는 어떤 직선에 대하여 대칭인가.

cf) $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$

특수각과 관련된 숫자 이용!

$y=a^x$ 와 $y=\log_a x$ 는 $y=x$에 대하여 서로 대칭이다.

$y=a^x$ 와 $y=\log_a x$를 각각 x축 방향으로 1만큼 평행이동하면, $y=a^{x-1}$ $y=\log_a(x-1)$이다.

따라서 $y=a^{x-1}$과 $y=\log_a(x-1)$은 $y=x$를 x축 방향으로 1만큼 이동한 $y=x-1$에 대하여 대칭이다.

직선 $y=x-1$과 $y=-x+4$가 만나는 교점 M은 선분 AB의 중점이다.

M의 좌표는 $\left(\frac{5}{2},\frac{3}{2}\right)$이고 $\overline{AB}=2\sqrt{2}$ 이므로 $A\left(\frac{3}{2},\frac{5}{2}\right)$ 이고 $B\left(\frac{5}{2},\frac{3}{2}\right)$이다.

점A를 이용해 a를 구하면 $a^{\frac{1}{2}}=\frac{5}{2}$ 이므로 $a=\frac{25}{4}$이고 C의좌표는 $\left(0,\frac{4}{25}\right)$이다.

점(0,4)를 D라하면 $\triangle ABC$의 넓이는 $\triangle DCB$ 의 넓이 − $\triangle DCA$의 넓이와 같다.

$\triangle DCB$의 넓이 $=\overline{DC}\times\frac{7}{2}\times\frac{1}{2}$ 이고 $\triangle DCA$의 넓이$=\overline{DC}\times\frac{3}{2}\times\frac{1}{2}$이다.

$\triangle ABC$의 넓이$=\overline{DC}\times\left(\frac{7}{4}-\frac{3}{4}\right)=\overline{DC}=4-\frac{4}{25}=\frac{96}{25}$

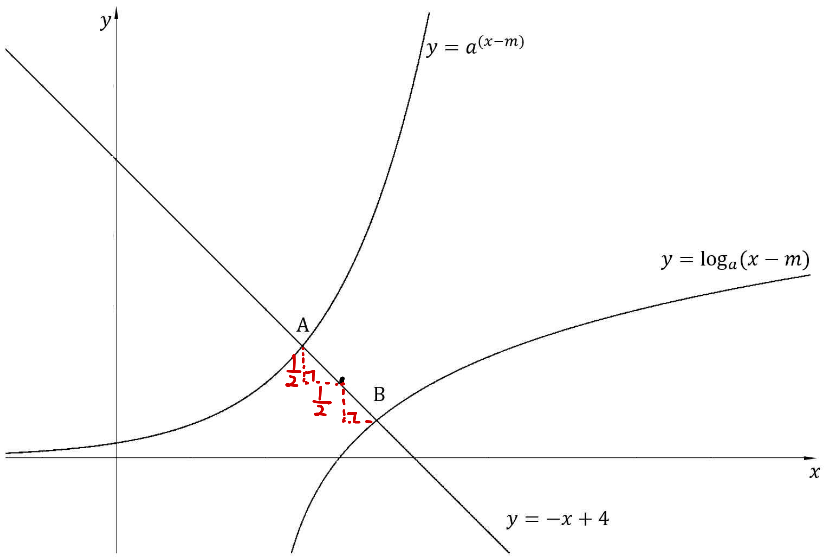
$\therefore 50S=192$

변형문제 [손풀이] 유수진 | [해설강의] 유수진

2. 그림과 같이 $a>1$인 실수 a에 대하여 직선 $y=-x+4$가 두 곡선

$$y=a^{x-m},\ y=\log_a(x-m)$$

과 만나는 점을 각각 A, B라 하자. $\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{2}$이고, 점 A와 점 B의 중점의 좌표가 $(3,1)$일 때, $a+m$의 값은? [3점]



① $\frac{7}{2}$ ② $\frac{15}{4}$ ③ 4 ④ $\frac{17}{4}$ ⑤ $\frac{9}{2}$

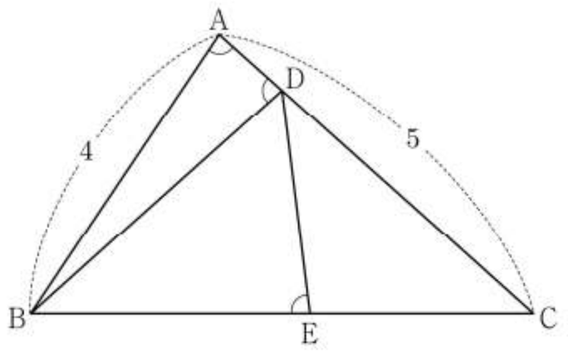
$y=a^{x-m}$과 $y=\log_a(x-m)$은 각각 $y=a^x$와 $y=\log_a x$를 x축 방향으로 m만큼 평행이동한 함수이다.
따라서 $y=a^{x-m}$과 $y=\log_a(x-m)$은 직선 $y=x-m$에 대하여 대칭이고 선분 AB의 중점 $(3,1)$은 $y=x-m$ 위의 점이므로 $m=2$임을 알 수 있다.
$\overline{AB}=\sqrt{2}$이므로 점 A의 좌표는 $(\frac{5}{2},\frac{3}{2})$ 점 B의 좌표는 $(\frac{7}{2},\frac{1}{2})$이고 $a^{\frac{1}{2}}=\frac{3}{2}$ 즉, $a=\frac{9}{4}$이다.
$a+m=\frac{17}{4}$이다.

원본문제 [손풀이] 유수진 | [해설강의] 유수진

3. 그림과 같이 $\overline{AB}=4$, $\overline{AC}=5$이고 $\cos(\angle BAC)=\frac{1}{8}$인 삼각형 ABC가 있다. 선분 AC 위의 점 D와 선분 BC 위의 점 E에 대하여

$$\angle BAC = \angle BDA = \angle BED$$

일 때, 선분 DE의 길이는? [4점]



① $\frac{7}{3}$ ② $\frac{5}{2}$ ③ $\frac{8}{3}$ ④ $\frac{17}{6}$ ⑤ 3

cf)
SAS조건 : 코사인법칙 or 삼각형의 넓이
SSS조건 : 코사인법칙

① $\angle BAC$를 이용한 코사인법칙 ⇒ $\overline{BC}$

$\overline{AB}^2+\overline{AC}^2-2\times\overline{AB}\times\overline{AC}\times\cos\angle BAC$

$= 16+25-5$

$= 36 = \overline{BC}^2$

$\therefore \overline{BC}=6$

SAS조건→코사인법칙

② $\angle BAD = \angle BDA$ ⇒ $\triangle BAD$ 이등변삼각형

$\overline{BD}=4$

$\cos\angle BAD = \frac{1}{8}$이고 $\triangle BAD$ 이등변삼각형 ⇒ $\overline{AD}=1$

$\therefore \overline{DC}=4$

③ $\triangle DBE$에서 $\angle DEB$를 이용한 사인법칙

or SSS조건 이용한 코사인법칙 코사인으로 사인 구하기 ← $\triangle DBC$는 $\overline{DB}=\overline{DC}=4$인 이등변삼각형 ⇒ $\sin\angle DBC = \frac{\sqrt{7}}{4}$

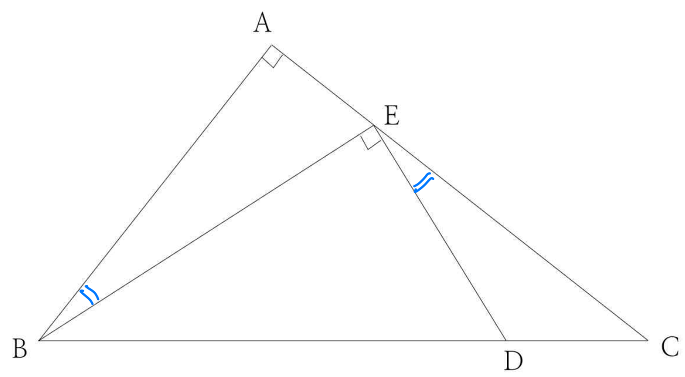
$\frac{\overline{DE}}{\sin\angle DBC} = \frac{\overline{DB}}{\sin\angle DEB}$ $\overline{DE} = \frac{4}{\frac{\sqrt{63}}{8}} \times \frac{\sqrt{7}}{4} = \frac{8}{3}$

변형문제 [손풀이] 유수진 | [해설강의] 유수진

4. 그림과 같이

$$\angle BAC = \angle BED = \frac{\pi}{2}$$

인 두 삼각형 ABC, BDE가 있다. $\overline{BE}=10$, $\overline{AE}=\overline{DC}$이고, 삼각형 ABE, EDC의 외접원의 중심을 각각 O, O′라 할 때, $\overline{OO'}=6$이다. 이때 삼각형 ABE의 외접원과 삼각형 EDC의 외접원이 만나서 생기는 두 점을 이은 선분의 길이를 구하시오. [4점]



① $\angle ABE+\angle AEB = \angle CED+\angle AEB = \frac{\pi}{2}$

$\therefore \angle ABE = \angle CED$ point. 같은 각 찾기

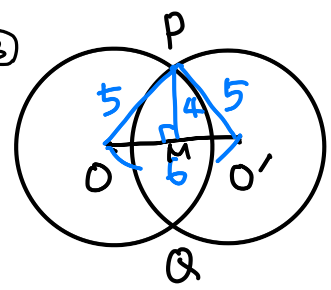
② $\triangle ABE$ 외접원의 반지름을 R_1, $\triangle ECD$의 외접원의 반지름을 R_2라하면

$\frac{\overline{AE}}{\sin(\angle ABE)} = \frac{\overline{CD}}{\sin(\angle CED)} = 2R_1 = 2R_2$ 이므로

$R_1 = R_2$ point. 주어진 조건을 이용한 사인법칙

직각삼각형 $\triangle ABE$에서 외접원의 중심은 $\overline{BE}$의 중점이고 $R_1=5$

$\therefore R_1 = R_2 = 5$

③ 

$\triangle ABE$의 외접원과 $\triangle ECD$의 외접원의 교점을 P, $\overline{OO'}$의 중점을 M이라하면, $\triangle OPO'$은 이등변삼각형이고 $\overline{PM}=4$

$\overline{PQ} = 2\overline{PM} = 8$

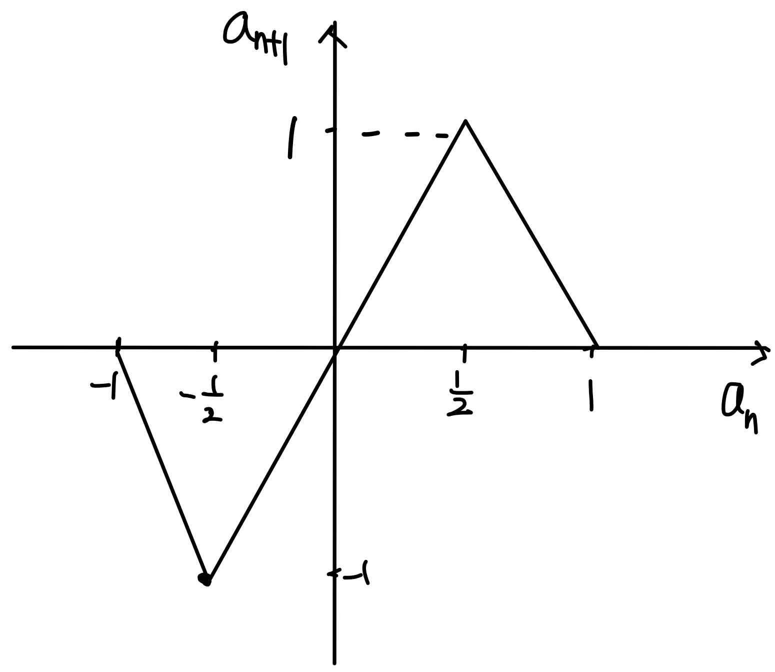
원본문제 [손풀이] 유수진 | [해설강의] 유수진

5. 수열 $\{a_n\}$은 $|a_1| \le 1$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1} = \begin{cases} -2a_n - 2 & \left(-1 \le a_n < -\frac{1}{2}\right) \\ 2a_n & \left(-\frac{1}{2} \le a_n \le \frac{1}{2}\right) \\ -2a_n + 2 & \left(\frac{1}{2} < a_n \le 1\right) \end{cases}$$

을 만족시킨다. $a_5 + a_6 = 0$이고 $\sum_{k=1}^{5} a_k > 0$이 되도록 하는 모든 a_1의 값의 합은? [4점]

① $\frac{9}{2}$ ② 5 ③ $\frac{11}{2}$ ④ 6 ⑤ $\frac{13}{2}$



i) $a_6 = -2a_5 - 2$

$a_5 + (-2a_5 - 2) = 0$, $a_5 = 2$ ($-1 \le a_5 < -\frac{1}{2}$ 이므로 모순)

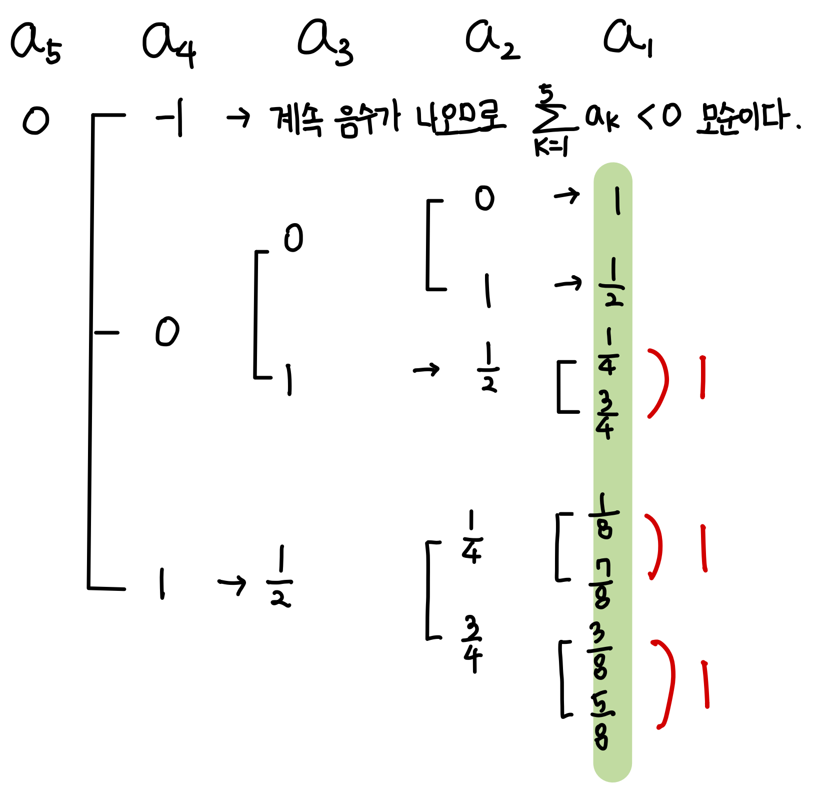
ii) $a_6 = 2a_5$

$a_5 + 2a_5 = 0$, $a_5 = 0$

iii) $a_6 = -2a_5 + 2$

$a_5 + (-2a_5 + 2) = 0$, $a_5 = -2$ ($\frac{1}{2} < a_5 \le 1$ 이므로 모순)

$\therefore a_5 = 0$ 이고 $a_6 = 0$



답: $\frac{9}{2}$

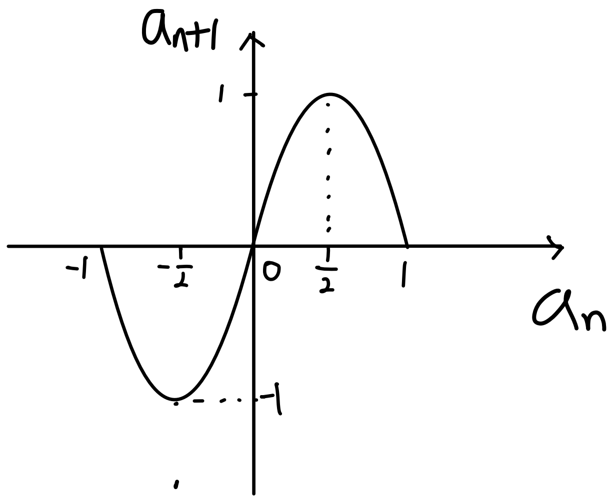
변형문제 [손풀이] 유수진 | [해설강의] 유수진

6. 수열 $\{a_n\}$은 $|a_1| \le 1$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1} = \sin(\pi a_n)$$

을 만족시킨다. $a_5 \times a_6 = 0$이고 $\sum_{k=1}^{5} a_k > 0$이 되도록 하는 모든 a_1의 값의 합은? [4점]

① $\frac{13}{2}$ ② $\frac{15}{2}$ ③ $\frac{17}{2}$ ④ $\frac{19}{2}$ ⑤ $\frac{21}{2}$



point. 그래프의 대칭성 활용
값을 구할 수 없어도 합은 구할 수 있다

① $a_5(\sin\pi a_5) = 0 \Rightarrow a_5 = -1$ or $a_5 = 0$ or $a_5 = 1$

② a_5 a_4 a_3 a_2 a_1

-1 $-\frac{1}{2}$ 계속 음수가 나오므로 $\sum_{k=1}^{5} a_k < 0$ 모순이다.

0: $a_4 = 0$: $a_3 = 0$: $a_2 = 0 \to 1$; $a_2 = 1 \to \frac{1}{2}$

$a_3 = 1 \to \frac{1}{2}$: α_1, β_1 $(\alpha+\beta=1)$

$a_4 = 1 \to \frac{1}{2}$: α_1: α_2, β_2 $(\alpha_2+\beta_2=1)$; β_1: α_3, β_3 $(\alpha_3+\beta_3=1)$

$1 \to \frac{1}{2}$: α_1: α_2: α_4, β_4; β_2: α_5, β_5; β_1: α_3: α_6, β_6; β_3: α_7, β_7 — 4

가능한 모든 a의 값의 합은 $1 + \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{7} \alpha_k + \beta_k = \frac{3}{2} + \sum_{k=1}^{7} 1 = \frac{17}{2}$

원본문제 [손풀이] 신유정 | [해설강의] 나동하

7. 두 함수

$$f(x)=\begin{cases}-2x+3 & (x<0)\\ -2x+2 & (x\geq 0)\end{cases},$$

$$g(x)=\begin{cases}2x & (x<a)\\ 2x-1 & (x\geq a)\end{cases}$$

가 있다. 함수 $f(x)g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 상수 a의 값은? [4점]

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

$f(x)$는 $x=0$ 에서만 불연속

$\begin{cases}\lim_{x\to 0^-} f(x)=3\\ \lim_{x\to 0^+} f(x)=f(0)=2\end{cases}$

i) $a\neq 0$

$g(0)=0$ 이어야 $f(x)g(x)$가 $x=0$에서 연속.

$\begin{cases}a>0 & g(0)=0\\ a<0 & g(0)=-1\end{cases}$ 이므로 $a>0$.

$g(x)$는 $x=a$에서만 불연속.

$\begin{cases}\lim_{x\to a^-} g(x)=2a\\ \lim_{x\to a^+} g(x)=g(a)=2a-1\end{cases}$ → $f(a)=0$ 이어야됨. $-2a+2=0$. $a=1$

ii) $a=0$

$\begin{cases}\lim_{x\to 0^+} f(x)g(x)=f(0)g(0)=4a-2\\ \lim_{x\to 0^-} f(x)g(x)=6a\end{cases}$

$4a-2=6a$. $a=-1$ 이므로 모순.

변형문제 [손풀이] 신유정 | [해설강의] 나동하

8. 함수 $f(x)=\dfrac{2x^2+(a+1)x+4}{x^2+ax+5a}$ 에 대하여 함수 $\dfrac{1}{f(x)}$이 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 모든 정수 a의 값의 합을 구하시오. [3점]

$\dfrac{1}{f(x)}$이 실수전체의 집합에서 연속 → 모든실수 x에 대해 $f(x)\neq 0$

$f(x)=\dfrac{2x^2+(a+1)x+4}{x^2+ax+5a}$.

모든 실수 x에서 $2x^2+(a+1)x+4\neq 0$. $D=(a+1)^2-32<0$

$D=(a+1)^2-32=a^2+2a-31<0$, $-1-4\sqrt{2}<a<-1+4\sqrt{2}$

$x^2+ax+5a=0$ 인 점에서 $f(x)$ 정의 X → $\dfrac{1}{f(x)}$ 불연속이므로

모든실수 x에서 $x^2+ax+5a\neq 0$.

$D=a^2-20a<0$, $0<a<20$

→ $0<a<-1+4\sqrt{2}$ 인 정수 a는 1.2.3.4이다.

$\therefore 10$

원본문제 [손풀이] 신유정 | [해설강의] 나동하

9. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수

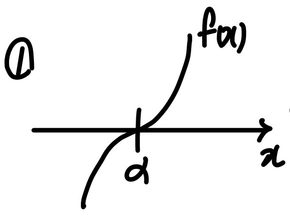
$$g(x)=f(x-3)\times\lim_{h\to 0+}\frac{|f(x+h)|-|f(x-h)|}{h}$$

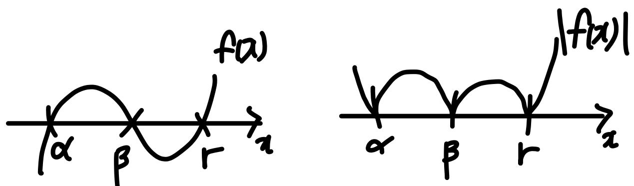
가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(5)$의 값을 구하시오. [4점]

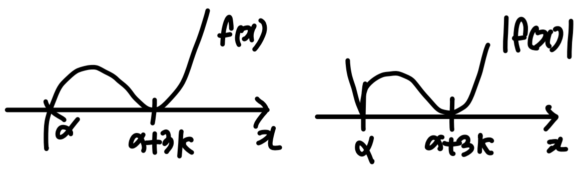
실수전체 연속 / $|f(x)|$의 도함수의 극한

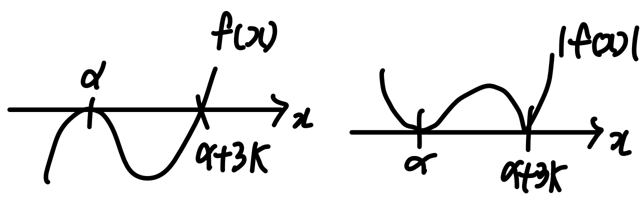
(가) 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.
(나) 방정식 $g(x)=0$은 서로 다른 네 실근 α_1, α_2, α_3, α_4를 갖고 $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4=7$이다.

· $f(x)$의 개형

①

: 조건 (나) 만족 X

②

$\lim_{h\to0^+}\frac{|f(x+h)|-|f(x-h)|}{h}$가 $x=\alpha, \beta, r$에서 불연속.
하지만 $x=\alpha, \beta, r$에서 $f(x-3)\neq0$. 따라서 조건 (가) 만족 X

③

$\lim_{h\to0^+}\frac{|f(x+h)|-|f(x-h)|}{h}$가 $x=\alpha$에서 불연속
$x=\alpha$에서 $f(x-3)\neq0$. 따라서 조건 (가) 만족 X

④

$\lim_{h\to0^+}\frac{|f(x+h)|-|f(x-h)|}{h}$은 $x=\alpha+3k$에서 불연속
$x=\alpha+3$, $\alpha+3k+3$에서 $f(x-3)=0$.
따라서 $\alpha+3=\alpha+3k$, $k=1$
$g(x)$의 실근은 $x=\alpha$, $\alpha+2$, $\alpha+3$, $\alpha+6$
$4\alpha+11=7$, $\alpha=-1$

$\Rightarrow f(x)=(x+1)^2(x-2)$, $f(5)=108$

$\therefore 108$

변형문제 [손풀이] 신유정 | [해설강의] 나동하

10. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (0\le x\le 2)\\ (x-1)f(x) & (x<0 \text{ 또는 } x>2)\end{cases}$$

와 상수 k는 다음 조건을 만족시킨다. (단, $g(2)\neq0$)

(가) 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.
(나) 함수 $g(x)$가 미분가능하지 않은 점의 개수는 1이다.
(다) $g(k)=0$, $g'(k)=18$

$g(4)\int_0^k|f(x)|dx$의 값을 구하시오. [4점]

i) 조건(가)
$\lim_{x\to0^+}g(x)=g(0)=f(0)$, $\lim_{x\to0^-}g(x)=-f(0)$, $f(0)=-f(0)$, $f(0)=0$
$\lim_{x\to2^-}g(x)=g(2)=f(2)$, $\lim_{x\to2^+}g(x)=f(2)$, $f(2)=f(2)$.

ii) 조건(나)
$$g'(x)=\begin{cases} f'(x) & (0\le x\le 2)\\ f(x)+(x-1)f'(x) & (x<0 \text{ 또는 } x>2)\end{cases}$$

1) 또는 2)

1) $x=2$에서 미분불가
$\lim_{x\to0^+}g'(x)=g'(0)=f'(0)$, $\lim_{x\to0^-}g'(x)=f(0)-f'(0)=-f'(0)$
$f'(0)=-f'(0)$, $f'(0)=0$

2) $x=0$에서 미분불가
$\lim_{x\to2^-}g'(x)=g'(2)=f'(2)$, $\lim_{x\to2^+}g'(x)=f(2)+f'(2)$
$f'(2)=f(2)+f'(2)$, $f(2)=0$.

→ 문제에서 $g(2)=f(2)\neq0$이라고 주어졌기 때문에 2)경우는 불가!
따라서 $f'(0)=0$. $f(x)=x^2(x-\alpha)$

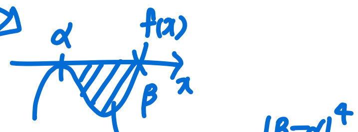
iii) 조건(다)
$g(k)=0$인 k는 0 또는 α
$g'(k)=18$. $g'(0)=0$이므로 $k\neq0$. $k=\alpha$.

1) $0\le\alpha\le2$
$g'(\alpha)=\alpha^2=18$, $\alpha=3\sqrt2$. $0\le\alpha\le2$를 만족 X $\alpha\neq3\sqrt2$.

2) $\alpha<0$ 또는 $\alpha>2$
$g'(\alpha)=\alpha^3-\alpha^2=18$, $\alpha^3-\alpha^2-18=0$,
$(\alpha-3)(\alpha^2+2\alpha+6)=0$이므로 $\alpha=3$.

$$g(x)=\begin{cases} x^2(x-3) & (0\le x\le 2)\\ x^2(x-1)(x-3) & (x<0 \text{ 또는 } x>2)\end{cases}$$

$g(4)\times\int_0^3|f(x)|dx=4^2\times3\times1\times\frac{3^4}{12}=324$


넓이 $=|a|\frac{|\beta-\alpha|^4}{12}$

$\therefore 324$

원본문제 [손풀이] 신유정 | [해설강의] 나동하

11. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 닫힌구간 $[0, 1]$에서 $f(x)=x$이다.
> (나) 어떤 상수 a, b에 대하여 구간 $[0, \infty)$에서 $f(x+1)-xf(x)=ax+b$이다.

$60\times\int_1^2 f(x)dx$의 값을 구하시오. [4점]

i) 실수 전체에서 미분 가능.

$f(0)=0$, $f(1)=1$

$f(x+1)-xf(x)=ax+b$에 $x=0$ 대입. $f(1)=b=1$

$[0.1]$에서 $f(x)=x$ 이므로

$f(x+1)-xf(x)=ax+b$, $f(x+1)=x^2+ax+1$

$x+1=t$로 치환. $1\le t\le 2$. $f(t)=(t-1)^2+a(t-1)+1=t^2+(a-2)t-a+2$

$f'(t)=2t+(a-2)$. $f'(1)=2+a-2=1$. $a=1$

↳ $[0.1]$에서 $f(x)=x$. $f'(x)=1$. $f'(1)=1$

→ $[1.2]$에서 $f(x)=x^2-x+1$

$\int_1^2 f(x)dx=\int_1^2 x^2-x+1=\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+x\right]_1^2=\frac{11}{6}$

$60\times\int_1^2 f(x)dx=60\times\frac{11}{6}=110$

$\therefore 110$

변형문제 [손풀이] 신유정 | [해설강의] 나동하

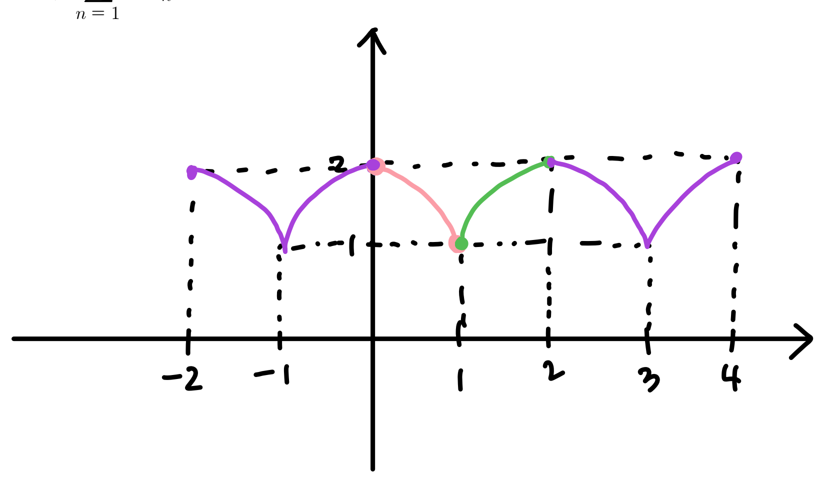
12. 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $0\le x\le 1$에서 $f(x)=-x^2+2$이다.
> (나) 모든 실수 x에 대하여 $f(1-x)=f(1+x)$이다. → $x=1$ 대칭
> (다) 모든 실수 x에 대하여 $f(x+2)=f(x)$이다. → 주기가 2.

수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$a_1+2a_2+3a_3+\cdots+na_n=\int_{-n}^{n} f(x)dx \quad (n=1, 2, 3, \cdots)$$

일 때, $\sum_{n=1}^{15} n^2a_n$의 값을 구하시오. [4점]



$f(x)$가 y축 대칭. $\int_{-n}^{n} f(x)dx=2\int_0^n f(x)dx$.

정수 n에 대하여 $\int_n^{n+1} f(x)dx=\int_0^1 -x^2+2=\frac{5}{3}$로 동일. $\int_0^n f(x)dx=\frac{5}{3}n$

$S_n=\int_{-n}^{n} f(x)dx=\frac{10}{3}n$.

$S_n-S_{n-1}=na_n$. $(n\ge 2)$. $\frac{10}{3}n-\frac{10}{3}n+\frac{10}{3}=\frac{10}{3}=na_n$ $(n\ge 2)$

$S_1=a_1=\frac{10}{3}$. $a_n=\frac{10}{3n}$ $(n\ge 1)$

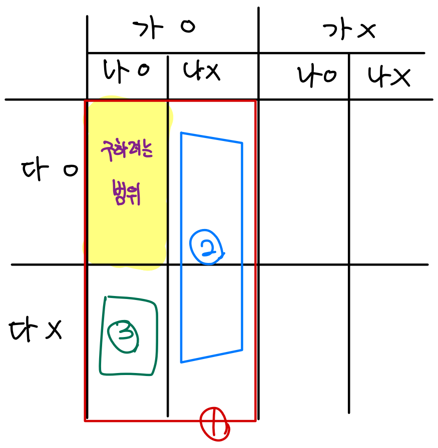
$\sum_{n=1}^{15} n^2a_n=\sum_{n=1}^{15} na_n\times n=\sum_{n=1}^{15}\frac{10}{3}n=\frac{10}{3}\sum_{n=1}^{15} n=\frac{10}{\cancel{3}}\times\frac{\cancel{15}^{5}\times\cancel{16}^{8}}{\cancel{2}}=400$

$\therefore 400$

원본문제 [손풀이] 박재형 | [해설강의] 박재형

13. 네 명의 학생 A, B, C, D에게 같은 종류의 사인펜 14개를 다음 규칙에 따라 남김없이 나누어 주는 경우의 수를 구하시오. [4점]

> (가) 각 학생은 1개 이상의 사인펜을 받는다.
> (나) 각 학생이 받는 사인펜의 개수는 9 이하이다.
> (다) 적어도 한 학생은 짝수 개의 사인펜을 받는다.



① A, B, C, D가 받는 사인펜의 개수를 각각 A, B, C, D라 하면

$A+B+C+D=14$

A ~ D에게 사인펜을 이미 하나씩 줬고, A′~D′개씩 더 준다고 생각하자.
↳ A′~D′ : 음이 아닌 정수

$A'+B'+C'+D'=10$

${}_4H_{10}={}_{13}C_{10}=286$

② $A+B+C+D=14$이고

$A\le9,\ B\le9,\ C\le9,\ D\le9$

$A'\le8,\ B'\le8,\ C'\le8,\ D'\le8$

$A'+B'+C'+D'=10$

9 1 0 0 → $\frac{4!}{2!}=12$
10 0 0 0 → $\frac{4!}{3!}=4$
) 16

③ 모두 홀수개 받음

$A+B+C+D=14$

$A=2a+1,\ B=2b+1,\ C=2c+1,\ D=2d+1$.라 하자. ↝ a~d : 음이 아닌 정수

$a+b+c+d=5 \rightarrow {}_4H_5={}_8C_5=56$

그런데 $A\sim D\le10$ 이므로 $a\sim d\le4$ 이다.

a, b, c, d 중 5 이상이 있는 경우의 수는

(5, 0, 0, 0), (0, 5, 0, 0), (0, 0, 5, 0), (0, 0, 0, 5) ↝ 4가지

$56-4=52$

정답 $=286-16-52=218$

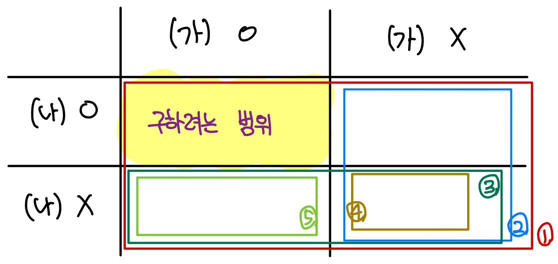
정답: 218

변형문제 [손풀이] 박재형 | [해설강의] 박재형

14. 네 명의 학생 A, B, C, D에게 같은 종류의 사인펜 10개를 다음 규칙에 따라 남김없이 나누어 주는 경우의 수를 구하시오. [4점]

$A+B+C+D=10$

> (가) 적어도 한 학생은 사인펜을 받지 못한다.
> (나) 각 학생이 받는 사인펜의 개수는 6 이하이다.



① $A+B+C+D=10$

↝ ${}_4H_{10}={}_{13}C_{10}=286$

② A ~ D에게 사인펜을 이미 하나씩 줬고, A′~D′개씩 더 준다고 생각하자.
↳ A′~D′ : 음이 아닌 정수

$A'+B'+C'+D'=6$

${}_4H_6={}_9C_6=84$

⑤를 구해서 ①-②-⑤를 구하면 답이 나오지만, 이번엔 다른 방법으로 접근해보자.

③ $A+B+C+D=10$

7 ${}_3H_3={}_5C_3=10$ → 40
8 ${}_3H_2={}_4C_2=6$ → 24
9 1 0 0 → 12
10 0 0 0 → 4
) 80

④ $A+B+C+D=10$

7 1 1 1 → 4

	(가) o	(가) X	합계
(나) o	126	80	206
(나) X	76	4	80
합계	202	84	286

●:직접 구한 값

정답: 126

[강의 영상에 없는 내용]

* ⑤를 직접 구하려면 이런 방법을 활용해보자.
↳ 받지 못하는 학생도 있고, 7개 이상 받는 학생도 있다.

$A+\underline{B+C+D}=10$

7 $B+C+D=3$, ${}_3H_3={}_5C_3=10$ ↝ $4\times10=40$
8 $B+C+D=2$, ${}_3H_2={}_4C_2=6$ ↝ $4\times6=24$
9 0 0 1 ↝ $\frac{4!}{2!}=12$
} 76

⇒ ⑤를 직접 구할 수 있긴 한데,

⑤를 구할 방법이 바로 떠오르지 않으면

처음 풀이처럼 우회적으로 구할 수도 있다.

원본문제 [손풀이] 박재형 | [해설강의] 박재형

15. 흰 공과 검은 공이 각각 10개 이상 들어 있는 바구니와 비어 있는 주머니가 있다. 한 개의 주사위를 사용하여 다음 시행을 한다.

흰 공과 검은 공 모두 충분히 있다는 의미.

주사위를 한 번 던져 나온 눈의 수가 5 이상이면 바구니에 있는 흰 공 2개를 주머니에 넣고,) 사건 A 나온 눈의 수가 4 이하이면 바구니에 있는 검은 공 1개를 주머니에 넣는다.) 사건 B

위의 시행을 5번 반복할 때, $n(1 \le n \le 5)$번째 시행 후 주머니에 들어 있는 흰 공과 검은 공의 개수를 각각 a_n, b_n이라 하자. $\underbrace{a_5 + b_5 \ge 7}_{=☆}$일 때, $\underbrace{a_k = b_k\text{인 자연수 } k(1 \le k \le 5)\text{가 존재할}}_{=□}$ 확률은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.

(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

$\frac{P(□)}{P(☆)}$로 표현 가능

a_5: 2× (사건 A가 일어난 횟수)

b_5: (사건 B가 일어난 횟수)

$a_5 + b_5 \ge 7$

$\begin{cases} A+B=5 \\ 2A+B \ge 7 \end{cases}$ ⇒ $A \ge 2$

즉, 사건 A가 2번 이상 발생해야 함.

① A5 ~ $\left(\frac{1}{3}\right)^5 = \frac{1}{243}$

② A4 B1 ~ $\left(\frac{1}{3}\right)^4 \frac{2}{3}\ {}_5C_4 = \frac{10}{243}$

③ A3 B2 ~ $\left(\frac{1}{3}\right)^3 \left(\frac{2}{3}\right)^2 {}_5C_3 = \frac{40}{243}$

④ A2 B3 ~ $\left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{2}{3}\right)^3 {}_5C_2 = \frac{80}{243}$

$P(☆) = \frac{131}{243}$

$a_k = b_k$ ~ 즉, 흰공 개수와 검은공 개수가 같은 순간이 한번이라도 있나?

그런데 그 순간 검은 공의 개수는 짝수여야 함!

① A5 → $a_k \ne b_k$

② A4 B1 → $a_k \ne b_k$

③ A3 B2 → $\begin{cases} \text{W B B W W} \\ \text{B W B W W} \\ \text{B B W W W} \end{cases}$ ~ $\left(\frac{1}{3}\right)^3 \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot 3 = \frac{12}{243}$

④ A2 B3 → $\begin{pmatrix} \text{W B B} \\ \text{B W B} \\ \text{B B W} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{W B} \\ \text{B W} \end{pmatrix}$ ~ $\left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot 3 \cdot 2 = \frac{48}{243}$

3개 중 하나 / 2개 중 하나

~ $P(□) = \frac{60}{243}$ → $\frac{P(□)}{P(☆)} = \frac{60}{131}$ 정답: 191

변형문제 [손풀이] 박재형 | [해설강의] 박재형

16. 흰 공과 검은 공이 각각 10개 이상 들어 있는 바구니와 비어 있는 주머니가 있다. 한 개의 주사위를 사용하여 다음 시행을 한다.

주사위를 한 번 던져 나온 눈의 수가 5 이상이면 바구니에 있는 흰 공 2개를 주머니에 넣고, 나온 눈의 수가 4 이하이면 바구니에 있는 검은 공 1개를 주머니에 넣는다.

여기까지는 앞문제와 동일

위의 시행을 5번 반복할 때, 5번째 시행 후 흰 공과 검은 공의 개수를 각각 a, b라 하면 $a+b \le 6$이다. 5번째 시행 후 주머니에서 한 공을 뽑았을 때 그 공이 검은색일 확률을 $\frac{q}{p}$라 할 때, $p+q$의 값을 구하시오.

(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

→ 앞 문제에서의 a_5, b_5와 똑같은 문자.

즉, $a_5 + b_5 \le 6$

~ $\begin{cases} 2A+B \le 6 \\ A+B=5 \end{cases}$ ⇒ $\boxed{A \le 1}$

~ 사건 A는 1번 이하로 일어났다.

검은 색이 나올 확률

① A1 B4 $\left(\frac{1}{3}\right)^1 \left(\frac{2}{3}\right)^4 {}_5C_1 = \frac{80}{243}$ W2 B4 ~ $\frac{4}{6}$

② B5 $\left(\frac{1}{3}\right)^0 \left(\frac{2}{3}\right)^5 {}_5C_0 = \frac{32}{243}$ W0 B5 ~ 1

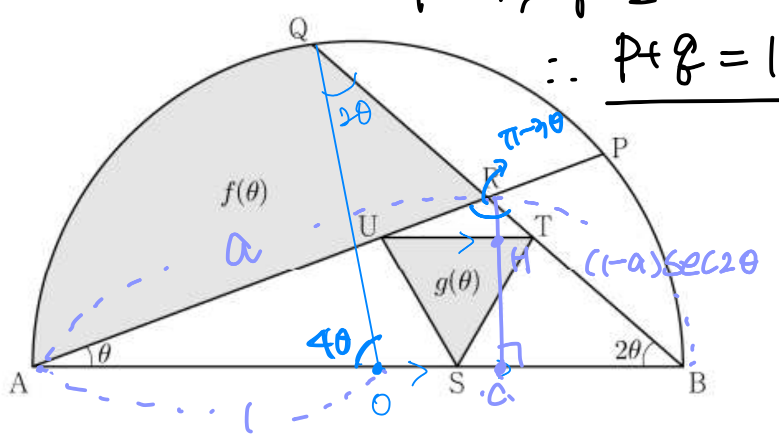
$\frac{80}{243} \times \frac{4}{6} + \frac{32}{243} \times 1 = \frac{160+96}{729} = \frac{256}{729}$

정답: 985

원본문제 [손풀이] 박수빈 | [해설강의] 박수빈

17. 그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원이 있다. 호 AB 위에 두 점 P, Q를 $\angle PAB = \theta$, $\angle QBA = 2\theta$가 되도록 잡고, 두 선분 AP, BQ의 교점을 R라 하자.
선분 AB 위의 점 S, 선분 BR 위의 점 T, 선분 AR 위의 점 U를 선분 UT가 선분 AB에 평행하고 삼각형 STU가 정삼각형이 되도록 잡는다. 두 선분 AR, QR와 호 AQ로 둘러싸인 부분의 넓이를 $f(\theta)$, 삼각형 STU의 넓이를 $g(\theta)$라 할 때, $\lim_{\theta \to 0+} \frac{g(\theta)}{\theta \times f(\theta)} = \frac{q}{p}\sqrt{3}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.
(단, $0 < \theta < \frac{\pi}{6}$이고, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

$p=9,\ q=2$
$\therefore\ p+q=11$



Step1. 각에 대한 정보?
Step2. 도형의 넓이 ⇒ 직접 / 간접 구하기 선택

i) $f(\theta) \rightarrow$ 간접구하기

$$f(\theta) = \underbrace{\text{부채꼴}OAQ + \triangle OBQ}_{①} - \underbrace{\triangle ARB}_{②}$$

① $\frac{1}{2}\cdot(1)^2\cdot 4\theta + \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1\cdot \sin(\pi-4\theta)$
$= 2\theta + \frac{1}{2}\sin 4\theta$

② $\triangle ARB = \frac{1}{2}\cdot 2\cdot \overline{AR}\cdot \sin\theta = \frac{2\sin 2\theta\cdot\sin\theta}{\sin 3\theta}$

· $\overline{AR} = a$라 두면

$$\frac{2}{\sin(\pi-3\theta)} = \frac{a}{\sin 2\theta}$$

$$a = \frac{2\sin 2\theta}{\sin 3\theta}$$

$\therefore f(\theta) = 2\theta + \frac{1}{2}\sin 4\theta - a\sin\theta$

ii) $g(\theta) \rightarrow$ 직접 구하기
정삼각형이니까 한 변의 길이만 알면 됨!

$\overline{UT} = b$라 두자.
$\triangle RUT \backsim \triangle RAB$ (AA 닮음) 이므로
$b : 2 = \overline{RH} : \overline{RC}$
$= a\sin\theta - \frac{\sqrt{3}}{2}b : a\sin\theta$

$2a\sin\theta - \sqrt{3}b = ab\sin\theta$

$$\therefore b = \frac{2a\sin\theta}{\sqrt{3} + a\sin\theta}$$

$$g(\theta) = \frac{\sqrt{3}}{4}\cdot b^2$$

$$\Rightarrow \lim_{\theta\to 0^+} \frac{g(\theta)}{\theta\times f(\theta)} = \lim_{\theta\to 0^+} \frac{\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{4a^2\sin^2\theta}{(\sqrt{3}+a\sin\theta)^2}}{\theta\times\left(2\theta + \frac{1}{2}\sin 4\theta - a\sin\theta\right)}$$

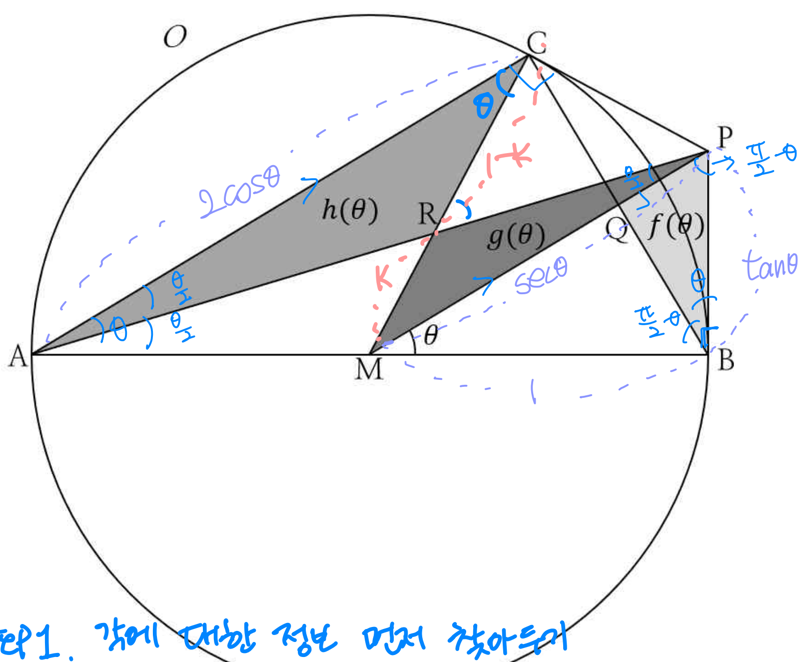
이때 $\lim_{\theta\to 0^+} a = \frac{4}{3}$ 이므로

$$\text{준식} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{4}\times\frac{1}{3}\times\frac{64}{9}}{2+\frac{4}{2}-\frac{4}{3}} = \frac{2}{9}\sqrt{3}$$

변형문제 [손풀이] 박수빈 | [해설강의] 박수빈

18. 그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 원 O가 있다. 호 AB 위의 A와 B가 아닌 한 점 C에 대하여 원 O의 B에서의 접선과 C에서의 접선이 만나는 점을 P라 하자. 선분 AB의 중점을 M이라 할 때, 선분 PM과 선분 BC의 교점을 Q라 하고, 선분 AP와 선분 CM의 교점을 R라 하자. $\angle PMB=\theta$일 때, 삼각형 BPQ의 넓이를 $f(\theta)$, 삼각형 PRM의 넓이를 $g(\theta)$, 삼각형 ARC의 넓이를 $h(\theta)$라 하자. $\lim_{\theta\to0+}\frac{h(\theta)}{g(\theta)}\times\frac{f(\theta)}{\theta^3}=a$일 때, $60a^2$의 값을 구하시오.

(단, $0<\theta<\frac{\pi}{2}$) [4점] 240



Step 1. 각에 대한 정보 먼저 찾아두기
Step 2. 도형의 넓이 → 직접 / 간접 구하기 선택

i) $f(\theta)$ → 직접 구하기

$f(\theta) = (\triangle PQB$ 의 넓이$)$

$= \frac{1}{2}\cdot\overline{PQ}\cdot\overline{BQ}$

$= \frac{1}{2}\cdot\tan\theta\cos\theta\cdot\tan\theta\sin\theta$

$= \frac{1}{2}\cdot\sin\theta\cdot\cos\theta\cdot\tan\theta$

ii- 방법①) $\frac{h(\theta)}{g(\theta)}$ → 직접 구하기

$\overline{RM}=k$ 라 두면 $\overline{CR}=1-k$

$g(\theta)=\frac{1}{2}\cdot k\cdot\tan\theta$

$h(\theta)=\frac{1}{2}\cdot 2\cos\theta\cdot(1-k)\cdot\sin\theta$ 인데

$\triangle RHP$에서

$\frac{\sec\theta}{\sin\frac{3}{2}\theta}=\frac{k}{\sin\frac{\pi}{2}}$, $k=\frac{\sec\theta\cdot\sin\frac{\pi}{2}}{\sin\frac{3}{2}\theta}$

⇒ $g(\theta)$, $h(\theta)$에 k값 대입해서 계산

* Tip

구해야 하는 도형과 관련된 정보 (길이, 각의 크기)는 최대한 많이 알아내고 적어두자!

* Point

① 원주각의 성질 ($\angle ABD=\frac{\pi}{2}$)

② 원 밖의 한 점에서 원에 두 접선을 그으면 그 점과 접점사이의 거리는 같다. ($\overline{CA}=\overline{CB}$)

③ 도형의 닮음 ($\triangle COE \sim \triangle DBO$)

④ 삼각함수의 극한 ($\lim_{x\to0}\frac{\sin\theta}{\theta}=1$, $\lim_{x\to0}\frac{\tan\theta}{\theta}=1$)

ii- 방법②) $\frac{h(\theta)}{g(\theta)}$ → 간접 구하기

$\triangle RMP \sim \triangle RCA$ (AA닮음)

⇒ 넓이비를 구하자

닮음비) $g:h=\sec\theta : 2\cos\theta$

넓이비) $g:h=\sec^2\theta : 4\cos^2\theta$

$h\cdot\sec^2\theta = g\cdot 4\cos^2\theta$

$\frac{h(\theta)}{g(\theta)}=\frac{4\cos^2\theta}{\sec^2\theta}$

$\Rightarrow \lim_{\theta\to0+}\frac{h(\theta)}{g(\theta)}\times\frac{f(\theta)}{\theta^3}$

$=\lim_{\theta\to0+}\frac{4\cos^2\theta}{\sec^2\theta}\times\frac{\sin\theta\cdot\cos\theta\cdot\tan^2\theta}{2\theta^3}$

$=\frac{4}{1}\times\frac{1}{2}=2$

$\therefore a=2$, $60a^2=240$

원본문제 [손풀이] 박수빈 | [해설강의] 박수빈

19. 함수 $f(x)=\frac{\ln x}{x}$와 양의 실수 t에 대하여 기울기가 t인 직선이 곡선 $y=f(x)$에 접할 때 접점의 x좌표를 $g(t)$라 하자. 원점에서 곡선 $y=f(x)$에 그은 접선의 기울기가 a일 때, 미분가능한 함수 $g(t)$에 대하여 $a\times g'(a)$의 값은? [4점]

① $-\frac{\sqrt{e}}{3}$ ② $-\frac{\sqrt{e}}{4}$ ③ $-\frac{\sqrt{e}}{5}$ ④ $-\frac{\sqrt{e}}{6}$ ⑤ $-\frac{\sqrt{e}}{7}$

$f(x)=\frac{\ln x}{x} \rightarrow f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$

Step 1. $f(x)$와 $g(t)$의 관계 알아보기 ($g(t)$의 의미 알아보기)

접선의 기울기 t 일 때 접점의 x좌표 $g(t)$

$\therefore f'(g(t))=t$ → $f'(x)$와 $g(x)$는 역함수 관계

Step 2. 원점에서 $y=f(x)$에 그은 접선의 기울기 구하기

접점의 x좌표를 p라고 두면 $(p\neq 0,\ p>0)$

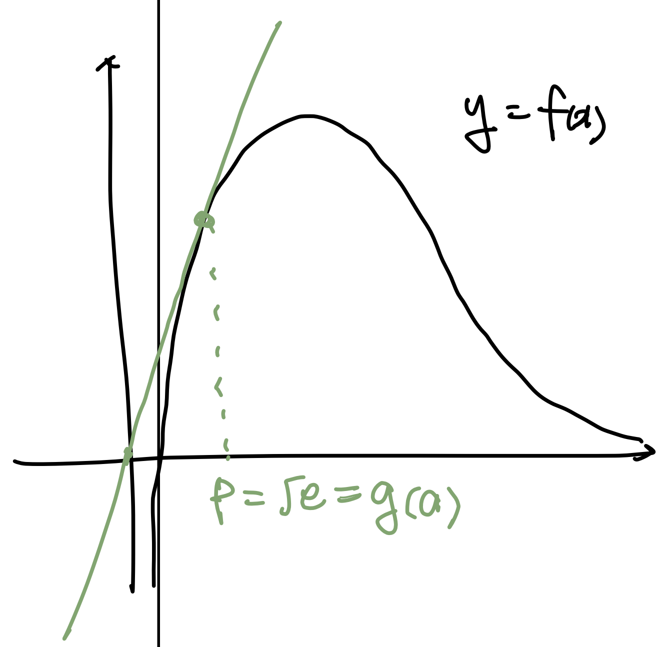
접선의 방정식은 $y=f'(p)(x-p)+f(p)$ 이다.

그런데 접선이 원점을 지나므로

$0=-p\cdot f'(p)+f(p)$

$\frac{\ln p}{p}-\frac{(1-\ln p)}{p}=\frac{2\ln p-1}{p}=0$

$p=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}$ 이다.



Step 3. 마무리 계산

$a=f'(p)=f'(\sqrt{e})$

$=\frac{1-\frac{1}{2}}{e}=\frac{1}{2e}$

$$\boxed{\begin{aligned}\therefore g'(a)&=g'\left(\tfrac{1}{2e}\right)\\&=\frac{1}{f''(\sqrt{e})}\end{aligned}}$$ 인데

$f''(x)=\frac{x^2\left(-\frac{1}{x}\right)-2x(1-\ln x)}{x^4}$

$=\frac{-1-2(1-\ln x)}{x^3}$ 이므로

$f''(\sqrt{e})=\frac{-2}{e^{\frac{3}{2}}}$ 이다

$\therefore a\times g'(a)=\frac{1}{2e}\times\left(-\frac{e\sqrt{e}}{2}\right)=\frac{-\sqrt{e}}{4}$

$f'(g(t))=t$

$f''(g(t))\cdot g'(t)=1$

$g'(t)=\frac{1}{f''(g(t))}$

$\therefore g'(a)=\frac{1}{f''(g(a))}=\frac{1}{f''(\sqrt{e})}$

* Point

$f(x)$의 역함수는 $f^{-1}(x)$ 라고 두면

① $(f\circ f^{-1})(x)=x$, $(f^{-1}\circ f)(x)=x$

② $(f^{-1})'(x)=\frac{1}{f'(y)}$

* 추가로 알아가기

⇒ 함수 $f(x)$가 역함수를 가진다면 그 함수는 증가함수이거나 감소함수이다.

변형문제 [손풀이] 박진우 | [해설강의] 박수빈

20. 함수 $f(x)=(x^2+2x)e^x$에 대하여 x에 대한 방정식

$$f(x)=\boxed{tf'(t)}\ (t\text{는 실수})$$ → 상수값!

의 실근 중 가장 작은 것을 $\alpha(t)$, 가장 큰 것을 $\beta(t)$라 하자.
$\beta(k)-\alpha(k)=2$인 상수 k에 대하여 $\beta'(k)-\alpha'(k)$의 값은?
(단, $-2+\sqrt{2}<t$, $tf'(t)<f(-2-\sqrt{2})$) [4점]

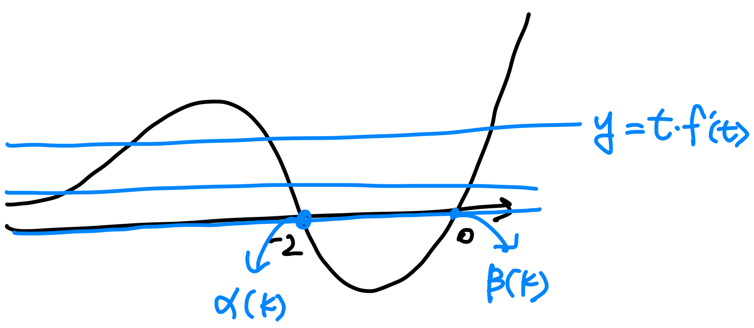
① $1+e^2$ ② $2+e^2$ ③ $1+2e^2$
④ $2+2e^2$ ⑤ $3+2e^2$

i) 그래프 그리기

· $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$, $\lim_{x\to-\infty} f(x)=0$

· $f'(x)=\underbrace{(x^2+4x+2)}_{D>0\ \Rightarrow\ \text{극값 2개 有}}e^x$

⇓



$\therefore\ \alpha(k)=-2,\quad \beta(k)=0$

& $t\cdot f'(t)=0$

→ $t\cdot e^t(t^2+4t+2)=0$

그런데 문제 조건에 의하여 위 식을 만족하는 $t=0$

$\therefore\ k=0$

ii) $\alpha'(k)$, $\beta'(k)$ 구하기

① $f(\alpha(t))=t\cdot f'(t)$

$f'(\alpha(t))\cdot\alpha'(t)=f'(t)+tf''(t)$

$t=k=0$ 대입) $f'(-2)\cdot\alpha'(k)=f'(0)$

$\therefore\ \alpha'(k)=\dfrac{f'(0)}{f'(-2)}=\dfrac{2}{-2e^{-2}}=-e^2$

② $f(\beta(t))=t\cdot f'(t)$

$f'(\beta(t))\cdot\beta'(t)=f'(t)+tf''(t)$

$t=k=0$ 대입) $f'(0)\cdot\beta'(k)=f'(0)$

$\therefore\ \beta'(k)=1$

$\therefore\ \beta'(k)-\alpha'(k)=1+e^2$

☆ 문제에서 구하라는 것이 무엇인지
& 지금 본인이 무엇을 구하고 있는지
확실하게 기억하면서 문제 풀기!

추가문제 [손풀이] 박수빈

21. 함수 $f(x)=\left(\frac{1}{3}x^2+ax+b\right)e^{x-3}$과 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 모든 실수 x에 대하여 $\{f(x)\}^2-\{g(x)\}^2=0$
> (나) 함수 $g(x)$는 $x=-2$에서 극솟값을 갖고, 극댓값은 갖지 않는다.

$f(3)$의 값은? [4점]

① $\frac{3}{2}$ ② 3 ③ $\frac{9}{2}$ ④ 6 ⑤ $\frac{15}{2}$

i) (가) $\{f(x)\}^2-\{g(x)\}^2=0$

$\therefore g(x)=\pm f(x)$ → 구간에 따라 $f(x)$ or $-f(x)$ 선택

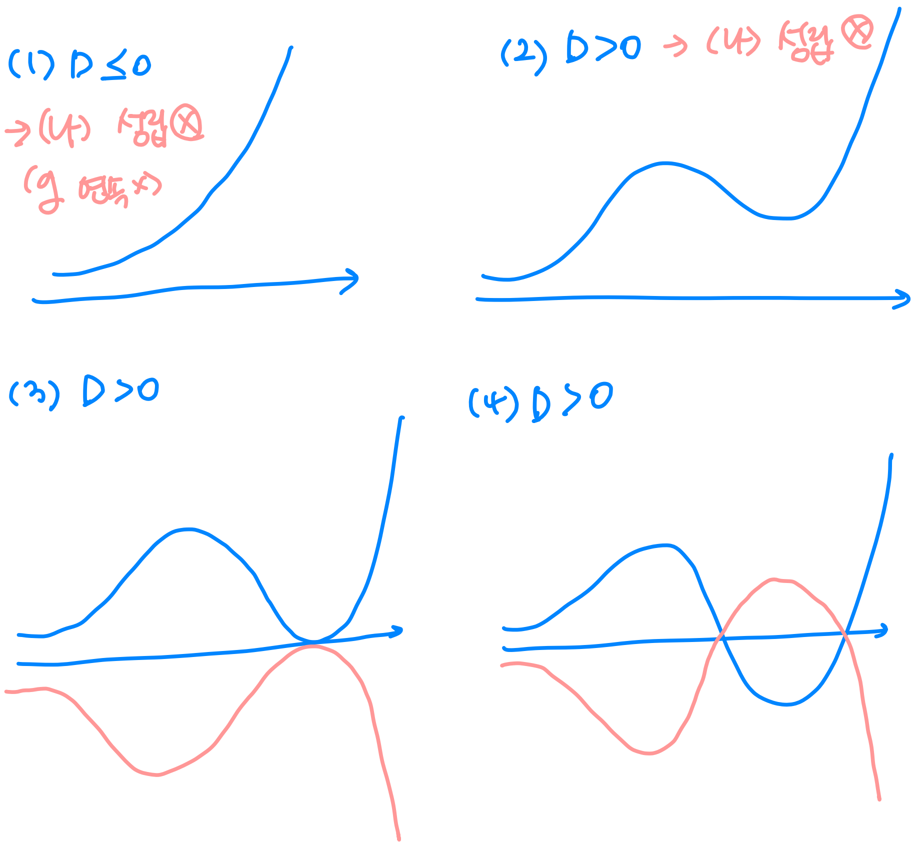
ii) 그래프 그려 $g(x)$ 유추하기

$f(x)=(\frac{1}{3}x^2+ax+b)e^{x-3}$

$f'(x)=(\frac{1}{3}x^2+(a+\frac{2}{3})x+a+b)\cdot e^{x-3}$

① $\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty$, $\lim_{x\to-\infty}f(x)=0$

② $f'(x)=\frac{1}{3}\underbrace{(x^2+(3a+2)x+3a+3b)}_{\text{근의 개수 \& 극값에 따라 그래프 모양이 나뉨}}e^{x-3}$



case1) $g(x)$ → $x=-2$ 에서의 극값이 $f(x)$의 극소인 경우

$f'(-2)=0$ → $a=b$

$\therefore f'(x)=\frac{1}{3}(x+2)(x+3a)\cdot e^{x-3}$

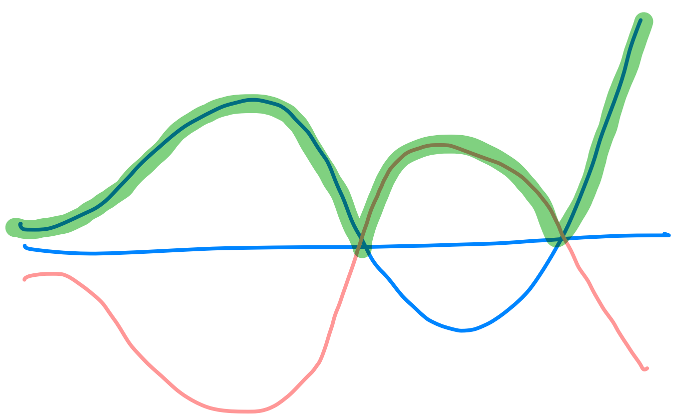
이 경우, (나)를 만족하기 위해서는

$f(-3a)=0$ → $a=b=0$

$\therefore f(x)=\frac{1}{3}x^2\cdot e^{x-3}$

$f(3)=3$

case2) $g(x)$ → $x=-2$ 에서의 극값이 0인 경우

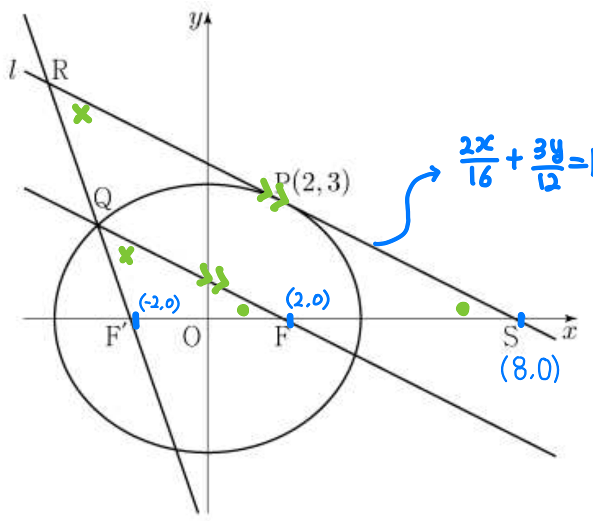


→ 반드시 극댓값을 가지므로 모순!

*기하 강의노트는 해설 뒤에 첨부해 두었습니다!

원본문제 [손풀이] 이강록 | [해설강의] 이강록

22. 그림과 같이 두 점 F$(c, 0)$, F$'(-c, 0)$ $(c>0)$을 초점으로 하는 타원 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$ 위의 점 P$(2, 3)$에서 타원에 접하는 직선을 l이라 하자. 점 F를 지나고 l과 평행한 직선이 타원과 만나는 점 중 제2사분면 위에 있는 점을 Q라 하자. 두 직선 F$'$Q와 l이 만나는 점을 R, l과 x축이 만나는 점을 S라 할 때, 삼각형 SRF$'$의 둘레의 길이는? [4점]



✓① 30 ② 31 ③ 32 ④ 33 ⑤ 34

$\pm\sqrt{16-12}$

F(2, 0) F$'$(−2, 0)

(장축 길이) $= 2\cdot 4 = 8$

$\overline{F'Q}+\overline{FQ}=8$, $\overline{F'F}=4$

점 P(2, 3)에서의 접선 ⇝ $\boxed{\frac{2x}{16}+\frac{3y}{12}=1}$

x절편 S(8, 0) 를

직선 l // 직선 FQ → △F$'$QF ∽ △F$'$RS (AA 닮음)

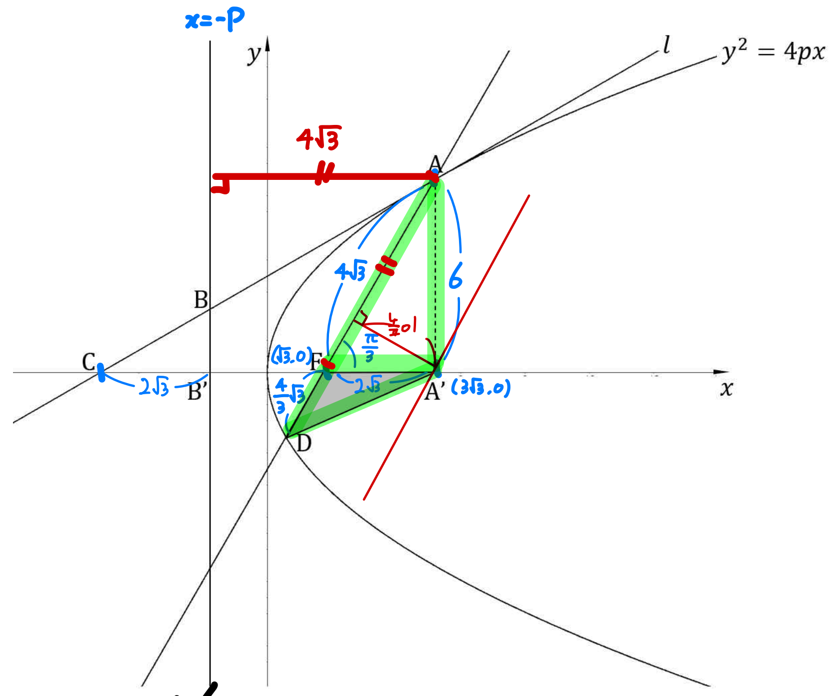
닮음비 ⇒ $\boxed{\overline{F'F}:\overline{F'S}=4:10}$

△F$'$QF 의 둘레 ⇒ $\overline{F'Q}+\overline{FQ}+\overline{F'F}=12$

△F$'$RS의 둘레 ⇒ $12\times\frac{10}{4}=30$

변형문제 [손풀이] 이강록 | [해설강의] 이강록

23. 그림과 같이 초점이 F인 포물선 $y^2=4px$ 위의 한 점 A$(k, 6)$에서 포물선에 접하는 직선을 l이라 하자. 직선 l이 포물선의 준선과 만나는 점을 B, x축과 만나는 점을 C라 하고, 두 점 A와 B에서 x축에 내린 수선의 발을 각각 A$'$, B$'$이라 하자. 삼각형 CBB$'$의 넓이를 S_1, 삼각형 AFA$'$의 넓이를 S_2라 할 때, $3S_1=S_2$이다. 두 점 A, F를 지나는 직선이 이 포물선과 만나는 점 중 A가 아닌 점을 D라 할 때, 삼각형 FDA$'$의 넓이는? (단, $k>p>0$) [4점]



① 3 ✓② $2\sqrt{3}$ ③ $\sqrt{15}$ ④ $3\sqrt{2}$ ⑤ $\sqrt{21}$

포물선 위의 점 $\boxed{6^2=4pk \ , \ pk=9}$

A$(k, 6)$에서의 접선 ⇝ $6y=2p(x+k)$

⇒ C$(-k, 0)$

$\boxed{\text{항상 포물선 위의 한 점의 } x\text{좌표와 그 점에서 접선의 } x\text{절편의 } x\text{좌표가 꼭짓점에 대해 대칭!}}$

$\overline{CB}=k-p$, $\overline{A'F}=k-p$.

△CBB$'$ 의 밑변, △AFA$'$의 밑변 길이 같음!

⇒ 높이 1 : 3 , $\overline{BB'}=2$

△CBB$'$ ∽ △CAA$'$ (AA 닮음)

닮음비 $\overline{BB'}:\overline{AA'}=1:3$

↳ $\overline{CB'}:\overline{CA'}=1:3$

⇒ $k-p:2k=1:3$

$\boxed{k=3p}$

$k=3\sqrt{3}$, $p=\sqrt{3}$

OR 포물선의 정의

$\angle AFA'=\frac{\pi}{3}$ ⇝ $\overline{AF}=4\sqrt{3}$

$\boxed{\frac{1}{\overline{AF}}+\frac{1}{\overline{FD}}=\frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \overline{FD}=\frac{4}{3}\sqrt{3}}$

↳(필기 노트 참고!)

$\overline{AF}$, $\overline{FD}$를 밑변으로 보면 △AFA$'$, △FDA$'$ 높이동일.

⇒ $\overline{AF}:\overline{FD}$ 가 넓이 비율 $\boxed{3:1}$

△AFA$'$ 넓이 $=\frac{1}{2}\times 6\times 2\sqrt{3}=6\sqrt{3}$

△FDA$'$ 넓이 $=6\sqrt{3}\times\frac{1}{3}=2\sqrt{3}$

원본문제 [손풀이] 이강록 | [해설강의] 이강록

24. 좌표평면에서 $\overline{OA}=\sqrt{2}$, $\overline{OB}=2\sqrt{2}$이고 $\cos(\angle AOB)=\frac{1}{4}$인 평행사변형 OACB에 대하여 점 P가 다음 조건을 만족시킨다.

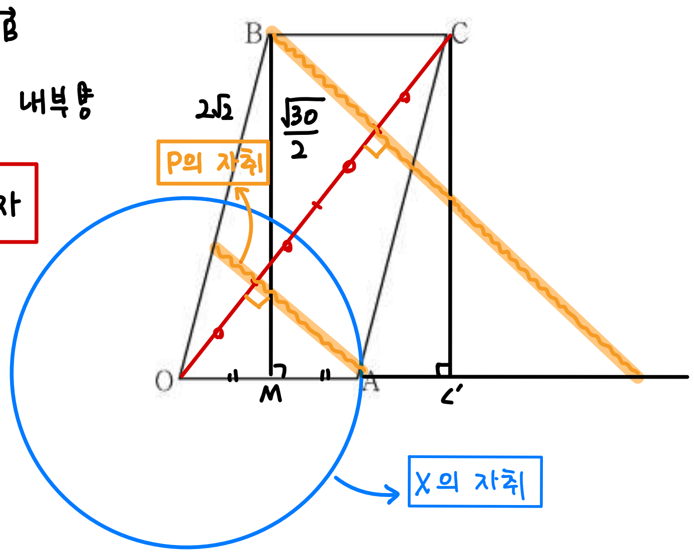
> (가) $\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$ $(0\le s\le 1,\ 0\le t\le 1)$
>
> (나) $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{BC}=2$

점 O를 중심으로 하고 점 A를 지나는 원 위를 움직이는 점 X에 대하여 $|3\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OX}|$의 최댓값과 최솟값을 각각 M, m이라 하자. $M\times m=a\sqrt{6}+b$일 때, a^2+b^2의 값을 구하시오. (단, a와 b는 유리수이다.) [4점]

(가) $\vec{op}=s\vec{oA}+t\vec{oB}$

□OABC 경계와 내부 꼴

Tip★ 하나 고정하고 생각하자



(나) $\vec{op}\cdot\vec{oB}+\vec{BP}\cdot\vec{BC}=2$ 벡터의 분리★

$\Rightarrow \vec{op}\cdot\vec{oB}+(\vec{op}-\vec{oB})\vec{BC}$

$=\vec{op}\cdot\vec{oB}+\vec{op}\cdot\vec{BC}-\vec{oB}\cdot\vec{BC}$ ($\vec{BC}=\vec{oA}$ ∵ 평행사변형)

$\Rightarrow \vec{op}\cdot\vec{oc}=2+1=3$

$|\vec{oc}|=\sqrt{(\overline{BM})^2+(\overline{cc'})^2}=\sqrt{(\frac{\sqrt{30}}{2})^2+(\frac{3\sqrt2}{2})^2}=2\sqrt3$

$\vec{op}\cdot\vec{oc}=3\Rightarrow |\vec{oc}|\times(\vec{op}$의 $\vec{oc}$ 위로의 정사영의 길이$)=3$

$|\vec{oc}|$: $2\sqrt3$, 정사영의 길이: $\frac{\sqrt3}{2}$

★★★ P의 자취가 결정 됨 (※ 그림참고 됨)

$|3\vec{op}-\vec{ox}|$

Max ⇒ ($3|\vec{op}|$ 최대) + ($\sqrt2$) $=3\sqrt2+\sqrt2=4\sqrt2$

min ⇒ ($3|\vec{op}|$ 최소) − ($\sqrt2$) $=\frac{3}{2}\sqrt3-\sqrt2$

$\vec{ox}$는 크기 $\sqrt2$, 방향이 자유로운 벡터 됨

$M\times m=4\sqrt2\times(\frac{3}{2}\sqrt3-\sqrt2)$

$=6\sqrt6-8$

$a^2+b^2=100$

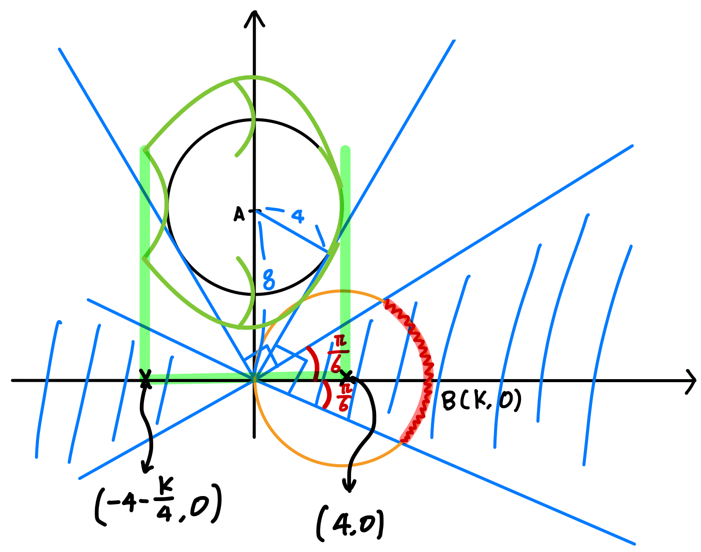
변형문제 [손풀이] 이강록 | [해설강의] 이강록

25. 좌표평면 위의 두 점 A(0, 8), B(k, 0)과 세 점 P, Q, R가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 두 점 P, Q는 점 A를 중심으로 하고 반지름의 길이가 4인 원 위를 움직인다.
>
> (나) $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OR}=0$, $\overrightarrow{OR}\cdot\overrightarrow{BR}=0$

$\overrightarrow{OX}=\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{BR}$라 할 때, $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OX}$의 최댓값과 최솟값의 합이 -16이다. 양의 실수 k의 값은? (단, O는 원점) [4점]

① $2\sqrt{3}$ ② 4 ③ $4\sqrt{3}$ ④ 8 ⑤ $8\sqrt{3}$



(나) $\vec{op}\cdot\vec{oR}=0$ R의 영역 ⟶ /// 부분

$\vec{op}$와 $\vec{oR}$ 벡터가 서로 수직 됨

$\vec{oR}\cdot\vec{BR}=0$ ⇒ ★★ R의 자취는 $\overline{oB}$를 지름으로 하는 원 됨

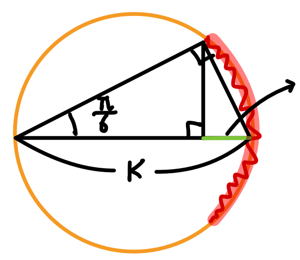
⇒ (나) 조건을 통해 알게된 R의 자취 ⟶

$\vec{OX}=\vec{OQ}+\vec{BR}$ 에서 점 X 의 자취 ⟶

$\vec{OB}\cdot\vec{OX}$ ⇒ $|\vec{oB}|\times(\vec{ox}$의 정사영$)$

Max $=k(-4-\frac{k}{4})$

min $=k\cdot 4$



(특수각 이용)

$M+m=-4k-\frac{k^2}{4}+4k=-\frac{k^2}{4}=-16$

$k=8$

*기하 강의노트

수학 영역(기하)

* 이차곡선의 접선들.

1) 한 점 (x_1, y_1) 에서의 접선.

포물선 → $y_1 y = 2p(x + x_1)$

타원 → $\frac{x_1 x}{a^2} + \frac{y_1 y}{b^2} = 1$

쌍곡선 → $\frac{x_1 x}{a^2} - \frac{y_1 y}{b^2} = 1$

2) 기울기가 m인 접선

포물선 → $y = mx + \frac{p}{m}$

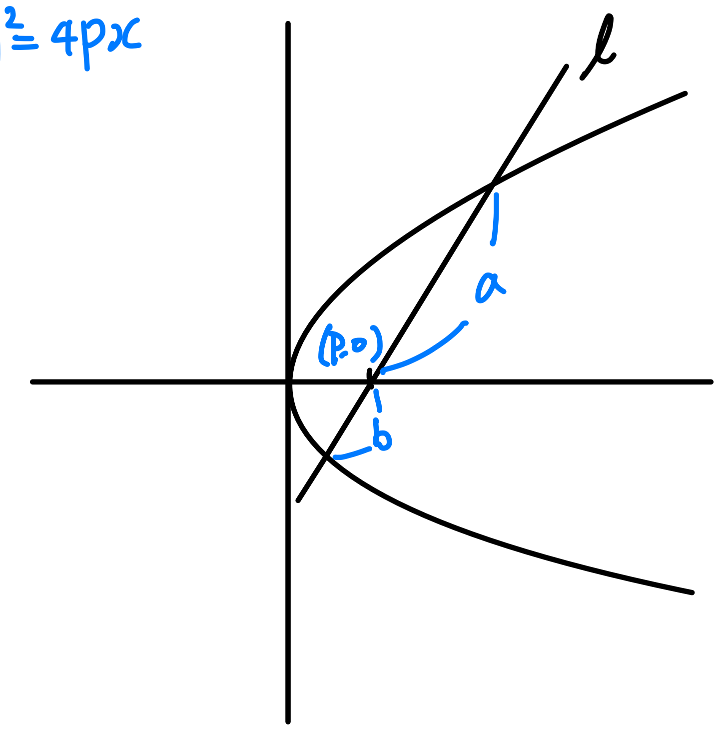
타원 → $y = mx \pm \sqrt{a^2m^2 + b^2}$

쌍곡선 → $y = mx \pm \sqrt{a^2m^2 - b^2}$

* 이차곡선의 기준이 x축이 아니라 y축일때는 공식이 다름을 주의 要

* 포물선과 그 초점을 지나는 직선.

$y^2 = 4px$



① 직선 l의 기울기 ⇒ $\frac{2\sqrt{ab}}{a-b}$

② $2p = \frac{2ab}{a+b}$ ⇒ $\frac{1}{p} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$

* 이에 대한 증명과정이나 추가적인 성질은 인터넷 검색이나, 유튜브에 포물선의 기하학적 성질 관련 영상을 보며 스스로 공부하시는 것을 추천합니다!