230622. 두 양수 a, $b(b>3)$과 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수

$g(x)=\begin{cases}(x+3)f(x) & (x<0) \\ (x+a)f(x-b) & (x \geq 0)\end{cases}$이 실수 전체의 집합에서 연속이고 다음 조건을 만족시킬 때,

$g(4)$의 값을 구하시오.

$\lim_{x \to -3} \dfrac{\sqrt{\lvert g(x) \rvert + \{g(t)\}^2} - \lvert g(t) \rvert}{(x+3)^2}$의 값이 존재하지 않는 실수 t의 값은 -3과 6뿐이다.

230622. 두 양수 a, $b(b>3)$과 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수

$g(x)=\begin{cases}(x+3)f(x) & (x<0) \\ (x+a)f(x-b) & (x\geq 0)\end{cases}$이 실수 전체의 집합에서 연속이고 다음 조건을 만족시킬 때,

$g(4)$의 값을 구하시오. **(풀이 1번 : 유리화를 해야겠다는 생각을 했을 때,)**

$\lim_{x\to -3}\frac{\sqrt{|g(x)|+\{g(t)\}^2}-|g(t)|}{(x+3)^2}$의 값이 존재하지 않는 실수 t의 값은 -3과 6뿐이다.

$\lim_{x\to -3}\frac{\sqrt{|g(x)|+\{g(t)\}^2}-|g(t)|}{(x+3)^2}=\lim_{x\to -3}\frac{|g(x)|}{(x+3)^2\left(\sqrt{|g(x)|+\{g(t)\}^2}+|g(t)|\right)}$이고 이때 $g(t)=0$이면

$\lim_{x\to -3}\frac{|g(x)|}{(x+3)^2\sqrt{|g(x)|}}=\lim_{x\to -3}\frac{\sqrt{|g(x)|}}{(x+3)^2}$인데, 이 경우 $g(x)$가 $x<0$에서 삼차함수이므로 극한값이

존재하지 않는다. 반면 $g(t)\neq 0$이면 $g(-3)=0$에서 $\lim_{x\to -3}\frac{|g(x)|}{(x+3)^2\times 2|g(t)|}$인데, 이 경우 $g(x)$가

$(x+3)^2$을 인수로 가지면 반드시 극한값을 가진다. $\therefore f(-3)=0$

즉, $g(x)=0$의 실근이 오직 $x=-3$, 6뿐이므로 $a>0$, $b>3$에서 $f(x)=(x+3)^2$, $b=9$이다. 이때

$g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $\lim_{x\to 0-}g(x)=g(0)$에서 $3f(0)=af(-9)$이므로 $a=\frac{3}{4}$이다.

즉, $g(4)=\left(4+\frac{3}{4}\right)(4+3-9)^2=19$이다.

230622. 두 양수 a, $b(b>3)$과 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수

$g(x)=\begin{cases}(x+3)f(x) & (x<0)\\(x+a)f(x-b) & (x\geq 0)\end{cases}$이 실수 전체의 집합에서 연속이고 다음 조건을 만족시킬 때,

$g(4)$의 값을 구하시오. **(풀이 2번 : 유리화를 해야겠다는 생각을 하지 못했을 때,)**

$\displaystyle\lim_{x\to-3}\frac{\sqrt{\lvert g(x)\rvert+\{g(t)\}^2}-\lvert g(t)\rvert}{(x+3)^2}$의 값이 존재하지 않는 실수 t의 값은 -3과 6뿐이다.

$\sqrt{\lvert g(x)\rvert+\{g(t)\}^2}=h(x)$이라 할 때, $g(-3)=0$에서 $\lvert g(t)\rvert=h(-3)$이다. 즉, 위 조건이 의미하는 바는

'$\displaystyle\lim_{x\to-3}\frac{h(x)-h(-3)}{(x+3)^2}$의 값이 존재하지 않는 실수 t의 값은 -3과 6뿐이다.' 이다. 다시 말해 이는

-3과 6이 아닌 모든 실수 t에 대하여 해당 극한값이 존재한다는 의미이며, $h(x)$가 미분가능할 때,

$\displaystyle\lim_{x\to-3}\frac{h(x)-h(-3)}{(x+3)^2}=\lim_{x\to-3}\frac{h'(-3)}{x+3}$에서 $t\neq-3$, 6일 때 $h'(-3)=0$이고 $t=-3$, 6일 때 $h'(-3)$의

값은 존재하지 않거나 $h'(-3)\neq 0$이다. $h(x)$가 미분가능할 때, $(\{h(x)\}^2)'=2h(x)h'(x)=(\lvert g(x)\rvert)'$

이므로 $g(x)=0$일 때 $\{h(x)\}^2$은 $g'(x)=0$이라면 미분계수는 0이고 $g'(x)\neq 0$일 때 미분가능하지

않다. 즉, $g(x)=0$일 때 $h'(x)$의 값은 $g'(x)=0$일 때만 존재한다.

$t\neq-3$, 6일 때 $h'(-3)=0$으로 그 값이 존재하며 $g(-3)=0$에서 $g'(-3)=0$이다. $\therefore f(-3)=0$

$g'(-3)=0$에서 $t=6$일 때 $h'(-3)\neq 0$이므로 $h(-3)=\lvert g(t)\rvert=0$에서 $g(6)=0$이다.

즉, $g(x)=0$의 실근이 오직 $x=-3$, 6뿐이므로 $a>0$, $b>3$에서 $f(x)=(x+3)^2$, $b=9$이다. 이때

$g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $\displaystyle\lim_{x\to0-}g(x)=g(0)$에서 $3f(0)=af(-9)$이므로 $a=\frac{3}{4}$이다.

즉, $g(4)=\left(4+\frac{3}{4}\right)(4+3-9)^2=19$이다.

230622. 두 양수 a, $b(b>3)$과 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수

$g(x)=\begin{cases}(x+3)f(x) & (x<0)\\(x+a)f(x-b) & (x\ge 0)\end{cases}$이 실수 전체의 집합에서 연속이고 다음 조건을 만족시킬 때,

$g(4)$의 값을 구하시오. **(풀이 3번 : 변수 분리 및 치환을 해야겠다는 생각을 했을 때,)**

> $\displaystyle\lim_{x\to-3}\frac{\sqrt{|g(x)|+\{g(t)\}^2}-|g(t)|}{(x+3)^2}$의 값이 존재하지 않는 실수 t의 값은 -3과 6뿐이다.

$\sqrt{|g(x)|}\ge 0$이므로 $x\to-3$일 때 $\sqrt{|g(x)|}$에 대해서는 0의 양의 방향에 한없이 가까워지지만

$g(t)$는 x에 대한 극한에서는 0이 아닌 상수에 불과하기 때문에 $|g(x)|=k$, $|g(t)|=X$라 하면

$g(t)\neq 0$일 때 $\displaystyle\lim_{x\to-3}\frac{\sqrt{|g(x)|+\{g(t)\}^2}-|g(t)|}{(x+3)^2}=\lim_{x\to-3}\frac{\sqrt{|g(x)|+\{g(t)\}^2}-|g(t)|}{|g(x)|}\times\frac{|g(x)|}{(x+3)^2}$

$\displaystyle=\lim_{k\to0+}\frac{\sqrt{X^2+k}-X}{k}\times\lim_{x\to-3}\frac{|g(x)|}{(x+3)^2}=\lim_{k\to0+}\frac{k}{k\left(\sqrt{X^2+k}+X\right)}\times\lim_{x\to-3}\frac{|g(x)|}{(x+3)^2}=\frac{1}{2X}\times\lim_{x\to-3}\frac{|g(x)|}{(x+3)^2}$

으로 극한값이 존재한다. 하지만 $g(t)=0$이면 $\displaystyle\lim_{x\to-3}\frac{\sqrt{|g(x)|}}{(x+3)^2}$인데, 이 경우 $g(x)$가 $x<0$에서

삼차함수이므로 극한값이 존재하지 않는다. 즉, $g(x)=0$의 실근이 오직 $x=-3$, 6뿐이므로

$a>0$, $b>3$에서 $f(x)=(x+3)^2$, $b=9$이다. 이때 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로

$\displaystyle\lim_{x\to0-}g(x)=g(0)$에서 $3f(0)=af(-9)$이므로 $a=\frac{3}{4}$이다. 즉, $g(4)=\left(4+\frac{3}{4}\right)(4+3-9)^2=19$이다.