지금부터 보실 행동강령과 해설은 아드레날린을 통해 다른 기출 문제에서도 보실 수 있습니다!

자세한 내용은

https://orbi.kr/00043463424

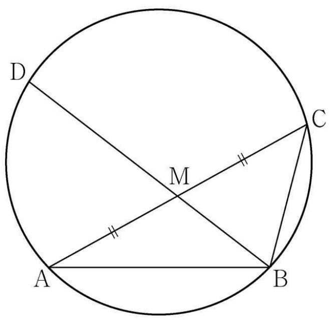
에서 확인해주세요! 판매 페이지 링크는

https://atom.ac/books/9395

입니다. 감사합니다!

아드레날린 ex
공통

1. 그림과 같이 $\overline{AB}=3$, $\overline{BC}=2$, $\overline{AC}>3$이고
$\cos(\angle BAC)=\dfrac{7}{8}$인 삼각형 ABC가 있다. 선분 AC의 중점을 M,
삼각형 ABC의 외접원이 직선 BM과 만나는 점 중 B가 아닌
점을 D라 할 때, 선분 MD의 길이는? 〔2023학년도 6월 10〕



① $\dfrac{3\sqrt{10}}{5}$　② $\dfrac{7\sqrt{10}}{10}$　③ $\dfrac{4\sqrt{10}}{5}$
④ $\dfrac{9\sqrt{10}}{10}$　⑤ $\sqrt{10}$

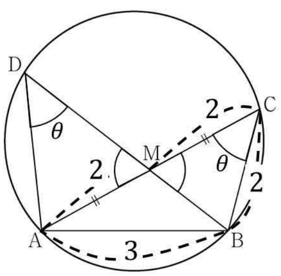
1. 정답 ③ 〔2023학년도 6월 10〕

1) 그림 있으면 그림 보면서, 내부 : 삼각형은 정해져 있다 - 두 변의 길이와 한 각

$\overline{\mathrm{AB}}=3$, $\overline{\mathrm{BC}}=2$, $\overline{\mathrm{AC}}>3$이고 $\cos(\angle \mathrm{BAC})=\frac{7}{8}$인데 그림까지 있네요. 표시해줍시다. 이러면 $\overline{\mathrm{AC}}$를 코사인법칙으로 구할 수 있죠?

$\frac{7}{8}=\frac{3^2+\overline{\mathrm{AC}}^2-2^2}{2\times\overline{\mathrm{AC}}\times3}=\frac{\overline{\mathrm{AC}}^2+5}{6\overline{\mathrm{AC}}}$입니다. 정리하면 $\overline{\mathrm{AC}}=4$가 나오네요. 그림에 선분 AC의 중점이 M이라 했으니까 $\overline{\mathrm{AM}}=\overline{\mathrm{MC}}$이죠? 따라서 $\overline{\mathrm{AM}}=\overline{\mathrm{MC}}=2$입니다. 삼각형 MBC는 이등변삼각형이네요.

이때 또 눈에 띄는 게 $\angle \mathrm{BAC}$랑 $\angle \mathrm{BDA}$랑 같은 호를 공유하고 있죠? 선분 AD를 긋고 원주각 표시해주구요. 이러면 $\angle \mathrm{CMB}$랑 $\angle \mathrm{AMD}$는 마주보는 각이니까 같네요. 모두 표시하면



이렇게 됩니다. 이러면 삼각형 ADM이랑 BCM이랑 닮음 아닌가요? 세 각이 모두 같잖아요.

이제 $\overline{\mathrm{MD}}$를 구해야 해요. 닮음을 이용합시다. 그러면 $\overline{\mathrm{BM}}$만 알아내면 닮음을 이용해서 $\overline{\mathrm{MD}}$를 구할 수 있겠어요. 두 변의 길이와 한 각을 아니까 코사인법칙을 사용하면 되겠죠?

$\frac{7}{8}=\frac{3^2+2^2-\overline{BM}^2}{2\times2\times3}=\frac{13-\overline{\mathrm{BM}}^2}{12}$이고 $\overline{\mathrm{BM}}=\frac{\sqrt{10}}{2}$입니다. 닮음을 이용하면 $\frac{\sqrt{10}}{2}:2=2:\overline{\mathrm{MD}}$이고

$\overline{\mathrm{MD}}=\frac{4\sqrt{10}}{5}$이네요. 답은 ③번입니다.

2. 공차가 3인 등차수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킬 때, a_{10}의 값은? 〔2023학년도 6월 12〕

(가) $a_5 \times a_7 < 0$
(나) $\displaystyle\sum_{k=1}^{6} \lvert a_{k+6} \rvert = 6 + \sum_{k=1}^{6} \lvert a_{2k} \rvert$

① $\frac{21}{2}$ ② 11 ③ $\frac{23}{2}$ ④ 12 ⑤ $\frac{25}{2}$

2. 정답 ③ 〔2023학년도 6월 12〕

1) 등차수열은 $a_n = a + (n-1)d$로 놓기, 조건해석

공차가 3인 등차수열이 있답니다. 첫항을 a라 하면 $a_n = a + 3(n-1)$이라고 할게요.

이때 (가)조건에서 $a_5 \times a_7 < 0$라고 합니다. a_n은 공차가 3인 등차수열이죠? 그 말은 3만큼 계속 증가하는 수열이라는 거예요. 그러면 당연하게도 a_5보다 a_7이 더 크겠죠? 그런데 둘을 곱하면 음수가 나온다는 건 둘 중 하나는 음수, 하나는 양수여야 한다는 건데 a_5보다 a_7이 크니까 a_5가 음수, a_7가 양수여야겠네요. a_1부터 a_5까지는 음수이다가, a_6은 잘 모르고 a_7부터는 계속 양수인 구조입니다.

2) 시그마 펼치기

(나)조건에서 $\sum_{k=1}^{6} |a_{k+6}| = 6 + \sum_{k=1}^{6} |a_{2k}|$라네요. 펼쳐봅시다.

먼저 왼쪽은 $|a_7| + |a_8| + \cdots + |a_{12}|$입니다. 그런데 아까 a_7부터는 계속 양수라고 했었죠? 따라서 그냥 $a_7 + \cdots + a_{12} = 6a + 153$입니다.

오른쪽은 $6 + \sum_{k=1}^{6} |a_{2k}| = 6 + |a_2| + |a_4| + |a_6| + |a_8| + |a_{10}| + |a_{12}|$입니다. 이때 a_2와 a_4는 음수니까 절댓값을 풀면 $(-)$부호가 붙고, a_8, a_{10}, a_{12}는 양수니까 그대로 나옵니다. 정리하면 $a + 75 + |a_6|$입니다. 여기서 문제는 a_6인데 우리는 a_6이 양수인지, 음수인지, 아니면 0인지를 몰라요. 그러면 케이스를 나눠야겠죠?

3) 케이스 분류

3-1) a_6이 양수일 때

$a_6 > 0$이라면 $6a + 153 = a + 75 + a_6 = 2a + 90$이고 $a = -\frac{63}{4}$입니다. $a_n = -\frac{63}{4} + 3(n-1)$인데 $a_6 = -\frac{3}{4}$이므로 음수가 나오네요. 모순입니다.

3-2) a_6이 0일 때

$a_6 = 0$이라면 $6a + 153 = a + 75$이고 $a = -\frac{78}{5}$입니다. $a_n = -\frac{78}{5} + 3(n-1)$인데 $a_6 = -\frac{3}{5}$인데요? 0이 나오지 않아요. 모순입니다.

3-3) a_6이 음수일 때

$a_6 < 0$이라면 $6a + 153 = a + 75 - a_6 = 60$이고 $a = -\frac{31}{2}$입니다. $a_n = -\frac{31}{2} + 3(n-1)$이고 $a_6 = -\frac{1}{2}$로 음수도 맞네요. $a_{10} = \frac{23}{2}$이고 답은 ③번입니다.

3. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$와 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $g(x)$가

$$g(x)=\begin{cases} -\displaystyle\int_0^x f(t)dt & (x<0) \\ \displaystyle\int_0^x f(t)dt & (x \geq 0) \end{cases}$$

을 만족시킬 때, 〈보기〉에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? 〔2023학년도 6월 14〕

<보 기>

ㄱ. $f(0)=0$

ㄴ. 함수 $f(x)$는 극댓값을 갖는다.

ㄷ. $2<f(1)<4$일 때, 방정식 $f(x)=x$의 서로 다른 실근의 개수는 3이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ

④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

3. 정답 ④ 〔2023학년도 6월 14〕

1) 연속은 좌극한 우극한 함숫값 확인, 정적분의 위끝에 변수가 있는 경우

$f(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이고 $g(x)$는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수인데

$$g(x)=\begin{cases} -\displaystyle\int_0^x f(t)dt & (x<0) \\ \displaystyle\int_0^x f(t)dt & (x\geq 0) \end{cases}$$ 라고 합니다.

?? 다항함수가 굉장히 특이하게 정의되어 있네요. 일단 $g(x)$는 삼차함수입니다. 그런데 위의 식은 범위별로 나눠져 있죠. 그러니까 아주 깔끔하게 이어져야 한다는 말이에요. 마치 하나의 함수처럼 말이죠. $g(x)$는 미분가능을 당연하게 만족시켜야 합니다.

거기에 $g(x)$는 다항함수니까 다항식으로 구성되어 있을 거예요. 그 말은 $g(x)$의 식은 하나인데, $f(x)$가 $x=0$을 기준으로 함수가 달라진다는 말이겠죠. $g(x)$의 범위를 나눠놓은 건 페이크고, 사실상 $f(x)$의 범위가 나눠어진 상황입니다.

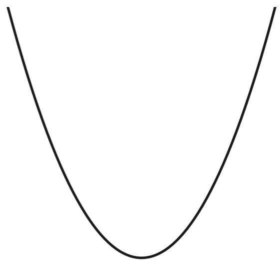
그 안에는 정적분의 위끝에 변수가 있는 함수가 있네요. 일단 위끝과 아래끝이 같아지는 $x=0$을 넣으면 $g(0)=0$으로 연속입니다. 이제 미분해볼게요. $g'(x)=\begin{cases} -f(x) & (x<0) \\ f(x) & (x\geq 0) \end{cases}$ 입니다. 이거도 미분가능해야 하니까 $-f(0)=f(0)$이어야 하고 $f(0)=g'(0)=0$입니다. 아까 $g(0)=0$까지 고려하면 $g(0)=g'(0)=0$이므로 $g(x)$는 $x=0$에서 x축에 접하네요. 뭐 대충 $g(x)=x^2(x-k)$의 형태겠죠?

ㄱ에서 $f(0)=0$이냐고 물어봅니다. 맞죠? ㄱ은 맞습니다.

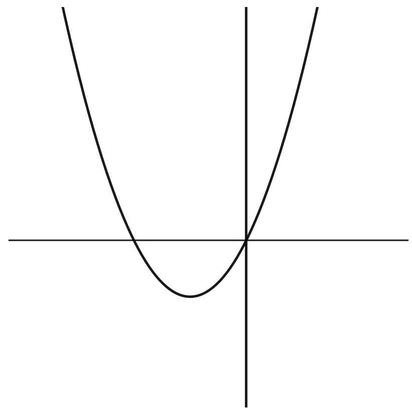
ㄴ에서 $f(x)$는 극댓값을 갖냐고 물어보네요. 알려준 건 $g(x)$인데 $f(x)$에 대한 걸 물어보네요. 왜일까요? $g(x)$는 페이크고 $f(x)$의 범위가 나눠어진 것이 메인이기 때문이겠죠?

일단 지금 보면 $x\geq 0$일 때 $f(x)=g'(x)$입니다. $g(x)$가 최고차항의 계수가 1인 삼차함수였으니까 도함수인 $f(x)=g'(x)$은 최고차항의 계수가 3인 그냥 평범한 이차함수에요. 그런데 $x<0$가 되는 순간 $f(x)$는 $f(x)=-g'(x)$로 부호가 바뀌어버리죠.

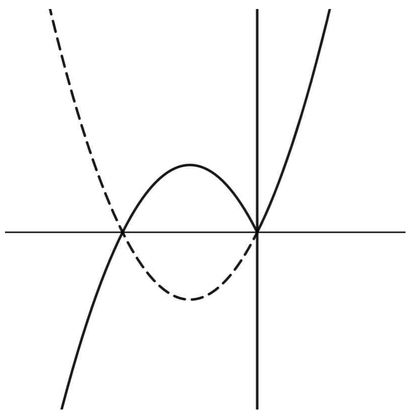
그냥 단순하게 생각해보세요. U자 모양 이차함수 하나를 그리고 아무데나 $x=0$을 그으세요. $f(0)=0$이니까 원점을 지나도록 그래프를 그린 후에 $x<0$ 부분은 원래 함수를 뒤집어버리세요. 그게 $f(x)$입니다.



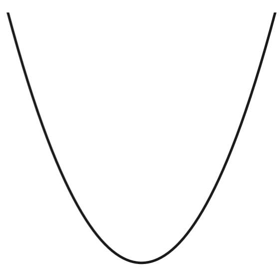
→



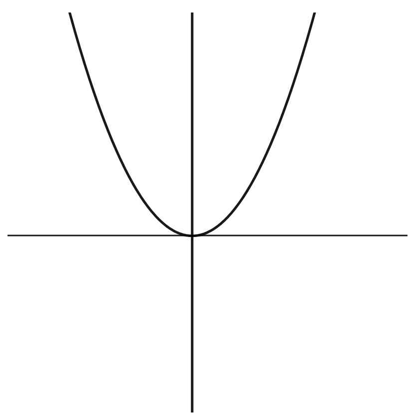
→



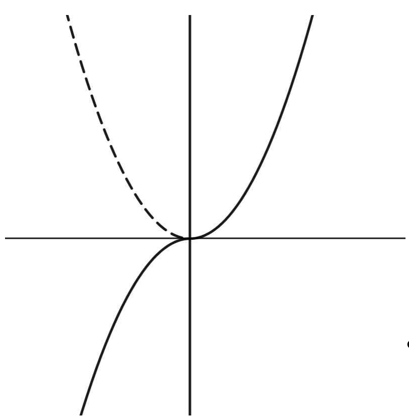
이렇게 말이죠. 극댓값을 갖나요? 갖네요. 다른 그래프도 그려봅시다.



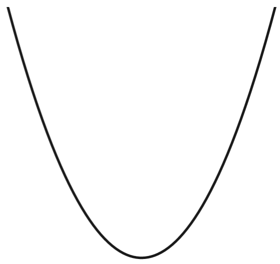
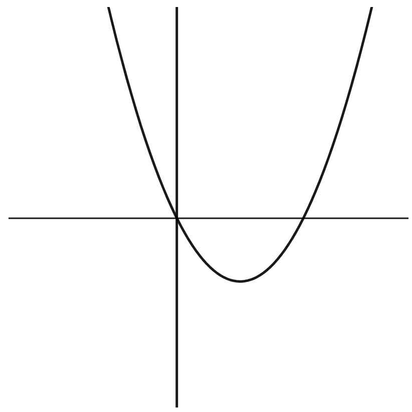
→

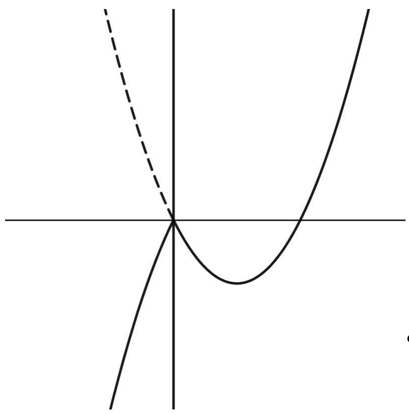


→



이런 거는요? 극댓값이 없는데요?

 →  →



이런 경우도 극댓값이 존재하네요. 아무튼 ㄴ은 옳지 않습니다. 위의 반례가 존재하니까요.

ㄷ에서 $2 < f(1) < 4$일 때, $f(x) = x$의 서로 다른 실근의 개수는 3이냐고 물어보네요. 일단 위에서 본 그림들을 보세요. $2 < f(1) < 4$가 가능한 건 첫 번째와 두 번째 케이스입니다. 두 번째 케이스는 무조건 가능하죠? 기울기가 양수인 이상 무조건 3개의 점에서 만나니까요. 그럼 살펴봐야 하는 건 첫 번째 케이스겠네요.

첫 번째 케이스에서 $x < 0$ 부분, $x = 0$부분에서 만나는 건 확실해요. 그런데 $x = 0$에서 접선의 기울기가 1보다 작냐 크거나 같냐에 따라 달라질 것 같네요. 1보다 작다면 $y = x$보다 느리게 올라올 테니까 $x > 0$부분에서 오다가 또 만나겠죠? 그럼 3개의 점에서 만나게 될 거예요.

일단 $g(x) = x^2(x-k)$입니다. $g'(x) = 3x^2 - 2kx$이네요. 따라서

$g'(x) = 3x^2 - 2kx = \begin{cases} -f(x) & (x < 0) \\ f(x) & (x \geq 0) \end{cases}$ 입니다. 이걸 $f(x)$로 바꿔보면

$f(x) = \begin{cases} -3x^2 + 2kx & (x < 0) \\ 3x^2 - 2kx & (x \geq 0) \end{cases}$ 입니다. $2 < f(1) < 4$이니까 $-\frac{1}{2} < k < \frac{1}{2}$입니다. $x = 0$에서 접선의 기울기는 $-2k$로 $-1 < -2k < 1$입니다. 3개의 점에서 만나겠네요. ㄷ은 맞습니다. 따라서 옳은 건 ㄱ, ㄷ이고

답은 ④번이네요.

4. 자연수 k에 대하여 다음 조건을 만족시키는 수열 $\{a_n\}$이 있다.

> $a_1 = 0$이고, 모든 자연수 n에 대하여
>
> $$a_{n+1} = \begin{cases} a_n + \dfrac{1}{k+1} & (a_n \le 0) \\ a_n - \dfrac{1}{k} & (a_n > 0) \end{cases}$$
>
> 이다.

$a_{22} = 0$이 되도록 하는 모든 k의 값의 합은?

〔2023학년도 6월 15〕

① 12 ② 14 ③ 16 ④ 18 ⑤ 20

4. 정답 ② 〔2022년 6월 15〕

1) 자연수 보이면 숫자 넣기

k가 자연수인데 $a_1=0$이고 모든 자연수 n에 대하여 $a_{n+1}=\begin{cases} a_n+\dfrac{1}{k+1} & (a_n \le 0) \\ a_n-\dfrac{1}{k} & (a_n>0) \end{cases}$ 라고 합니다. 이때

$a_{22}=0$이 되도록 하는 모든 k의 값의 합을 구하라네요.

알려준 건 $a_1=0$인데 $a_{22}=0$까지 가라고 합니다. 이렇게 항을 10개 이상 넘게 구하라고 하는 건 분명 규칙성이 존재하기 때문일 거예요. 아니면 미치지 않고서야 이걸 다 일일이 노가다하라고 하겠어요?

천천히 가봅시다. 일단 구조부터 확인해보죠. a_n이 양수면 계속 $\dfrac{1}{k}$를 빼고, 그러다가 a_n이 0 또는 음수가 되면 $\dfrac{1}{k+1}$을 계속 더해서 양수로 만드는 구조네요.

일단 $a_1=0$이니까 $a_2=a_1+\dfrac{1}{k+1}=\dfrac{1}{k+1}$입니다. 이건 양수죠? 따라서 $a_3=a_2-\dfrac{1}{k}=\dfrac{1}{k+1}-\dfrac{1}{k}$입니다.

이건 음수에요. 따라서 $a_4=a_3+\dfrac{1}{k+1}=\dfrac{2}{k+1}-\dfrac{1}{k}$입니다. 이건 양수일까요? 0 또는 음수일까요? 음...

이거 일단 k에다 숫자를 넣으면서 구조를 조금 더 익혀볼게요. 만약 $k=1$이라면

$a_{n+1}=\begin{cases} a_n+\dfrac{1}{2} & (a_n \le 0) \\ a_n-1 & (a_n>0) \end{cases}$ 입니다. 이러면 a_1부터 순서대로 $0,\ \dfrac{1}{2},\ -\dfrac{1}{2},\ 0,\ \dfrac{1}{2},\ -\dfrac{1}{2},\ \cdots$의 규칙성을

갖게 되네요. 항이 3마다 값이 반복돼요. 이러면 $a_{22}=0$이 되네요? 일단 $k=1$ 하나 나왔어요.

만약 $k=2$이라면? $a_{n+1}=\begin{cases} a_n+\dfrac{1}{3} & (a_n \le 0) \\ a_n-\dfrac{1}{2} & (a_n>0) \end{cases}$ 입니다. 이러면 $0,\ \dfrac{1}{3},\ -\dfrac{1}{6},\ \dfrac{1}{6},\ -\dfrac{1}{3},\ 0,\ \dfrac{1}{3},\ -\dfrac{1}{6},\ \cdots$의

규칙성을 갖게 됩니다. 항이 5마다 값이 반복돼요. 이러면 $a_{22}=\dfrac{1}{3}$로 조건을 만족시키지 못합니다.

$k=3$이라면 $a_{n+1}=\begin{cases} a_n+\dfrac{1}{4} & (a_n \le 0) \\ a_n-\dfrac{1}{3} & (a_n > 0) \end{cases}$ 입니다. 이거 그냥 계산하기 편하게

$a_{n+1}=\begin{cases} a_n+\dfrac{3}{12} & (a_n \le 0) \\ a_n-\dfrac{4}{12} & (a_n > 0) \end{cases}$ 으로 바꿔놓을게요. 어차피 통분하게 될 일 많을 것 같으니까요. 이러면

$0,\ \frac{3}{12},\ -\frac{1}{12},\ \frac{2}{12},\ -\frac{2}{12},\ \frac{1}{12},\ -\frac{3}{12},\ 0,\ \frac{3}{12},\ \cdots$의 값이 반복되고, 주기는 7입니다. 이러면 $a_{22}=0$이 되겠네요. $k=3$도 포함입니다.

2) 규칙 파악, 일반화

통분을 해서 보니까 지금 뭔가 규칙이 있죠? 0에서 시작해서 양수는 $\frac{3}{12},\ \frac{2}{12},\ \frac{1}{12}$로 점점 작아지고, 음수는 $-\frac{1}{12},\ -\frac{2}{12},\ -\frac{3}{12}$로 점점 작아지는 구조네요. 이게 번갈아서 나오구요. 0을 포함하면 총 7개의 숫자가 반복됩니다. 거기에 $\frac{1}{12}$는 $\frac{1}{3}$과 $\frac{1}{4}$의 곱이죠?

$k=2$ 부분을 다시 보세요. 양수는 $\frac{2}{6},\ \frac{1}{6}$, 음수는 $-\frac{1}{6},\ -\frac{2}{6}$으로 점점 작아집니다. 0까지 포함하면 총 5개의 숫자구요. $\frac{1}{6}$은 $\frac{1}{2}$와 $\frac{1}{3}$의 곱입니다.

그러면 $k=4$일 때를 예상해볼게요. 일단 $\frac{1}{4}$와 $\frac{1}{5}$의 곱인 $\frac{1}{20}$을 기준으로 양수는 $\frac{4}{20},\ \cdots\ ,\ \frac{1}{20}$으로, 음수는 $-\frac{1}{20},\ \cdots\ ,\ -\frac{4}{20}$으로 작아지지 않을까요? 0을 포함해서 총 주기는 9고 $a_1,\ a_{10},\ a_{19}$가 0이 되니까 a_{22}는 0이 아니겠네요.

그럼 실제로 가봅시다. $k=4$이면 $a_{n+1}=\begin{cases} a_n+\dfrac{4}{20} & (a_n \le 0) \\ a_n-\dfrac{5}{20} & (a_n > 0) \end{cases}$ 이고

$0,\ \frac{4}{20},\ -\frac{1}{20},\ \frac{3}{20},\ -\frac{2}{20},\ \frac{2}{20},\ -\frac{3}{20},\ \frac{1}{20},\ -\frac{4}{20},\ 0,\ \frac{4}{20},\ \cdots$의 형태가 반복됩니다. 맞네요!

지금 또 뭔갈 알아냈어요. 주기가 5, 7, 9로 2씩 증가하고 있어요. 딱 하나만 더 해보고 주기가 11이면 일반화해봅시다.

$k=5$이면 $a_{n+1}=\begin{cases} a_n+\dfrac{5}{30} & (a_n \le 0) \\ \\ a_n-\dfrac{6}{30} & (a_n>0) \end{cases}$ 이고

$0,\ \dfrac{5}{30},\ -\dfrac{1}{30},\ \dfrac{4}{30},\ -\dfrac{2}{30},\ \dfrac{3}{30},\ -\dfrac{3}{30},\ \dfrac{2}{30},\ -\dfrac{4}{30},\ \dfrac{1}{30},\ -\dfrac{5}{30},\ 0,\ \dfrac{5}{30},\ \cdots$입니다. 주기는 11이네요. 맞습니다. 바로 가죠.

$k=5$일 때는 주기가 11입니다. a_1, a_{12}, a_{23}이 0이므로 a_{22}는 0이 아니네요.
$k=6$일 때는 주기가 13입니다. a_1, a_{14}, a_{27}이 0이니까 a_{22}는 0이 아닙니다.
이거 딱 보니까 당분간은 a_{22}가 0이 되는 차례가 오지 않을 것 같네요. 이제 0이 되는 두 번째 항이 22항이 되어야 하니까 빠르게 찾아봅시다.

$k=7$일 때는 주기가 15이고 a_1, a_{16}이 0입니다. $k=8$일 때는 주기가 17이고 a_1, a_{18}이 0입니다. $k=9$일 때는 주기가 19이고 a_1, a_{20}이 0입니다. $k=10$일 때는 주기가 21이고 a_1, a_{22}가 0입니다. 찾았네요. 따라서 모든 k의 합은 $1+3+10=14$입니다. 답은 ②번이네요.

5. 최고차항의 계수가 2인 이차함수 $f(x)$에 대하여

함수 $g(x)=\int_{x}^{x+1}|f(t)|dt$는 $x=1$과 $x=4$에서 극소이다.

$f(0)$의 값을 구하시오. 〔2023학년도 6월 20〕

5. 정답 13 〔2023학년도 6월 20〕

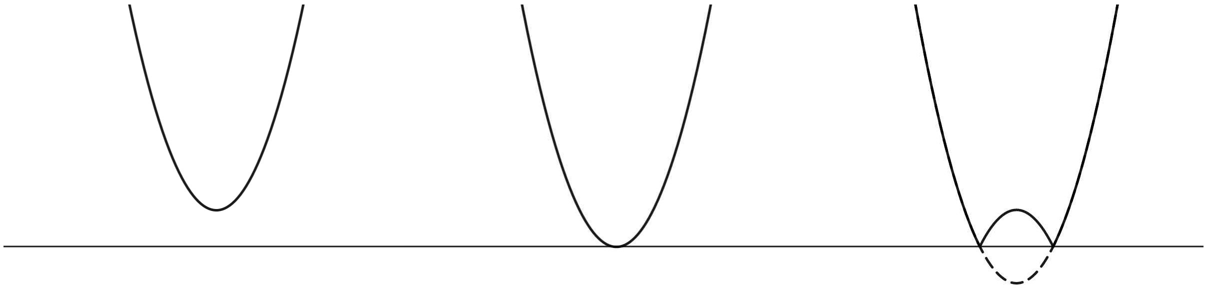
1) 정적분의 위끝과 아래끝에 변수가 있는 경우

최고차항의 계수가 2인 이차함수 $f(x)$가 있는데 함수 $g(x)=\int_{x}^{x+1}|f(t)|dt$가 극소가 되는 부분이 $x=1$과 $x=4$랍니다. $f(0)$을 구하라네요.

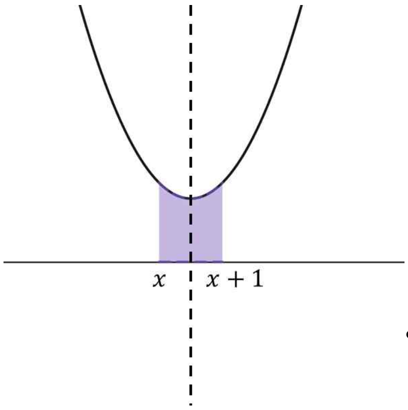
딱 봐도 일반적인 함수가 아니죠? 일단 넓이의 변화를 관찰해봅시다. 정적분은 원래 넓이를 구하는 거잖아요. $g(x)$는 $f(t)$를 절댓값을 씌워서 올린 다음 x부터 $x+1$까지 간격이 1인 부분의 넓이를 말하는 거로 해석하면 될 것 같아요.

그 $g(x)$가 극소가 된다는 건? 정적분 값이 주변에서 가장 작아진다는 거로 해석해야죠.

그럼 이제 $f(x)$의 개형에 대해서 살펴봐야죠? 정적분을 일일이 계산할 수는 없으니까 직관으로 가장 작은 부분을 캐치해야 합니다. 일단 $f(x)$는 최고차항의 계수가 양수입니다. 우리는 이걸 절댓값으로 씌워 올려야 하잖아요? 그러면 경우는 세 가지죠.



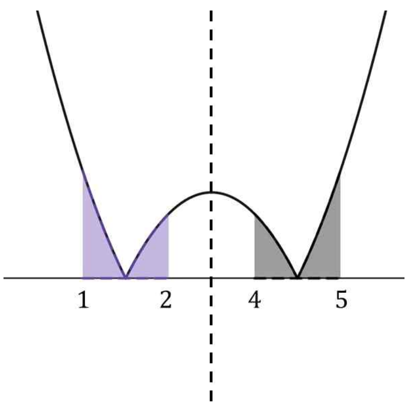
이렇게네요. 왼쪽부터 1, 2, 3번이라고 할게요. 1번과 2번은 절댓값으로 뒤집어 올리는 형태가 원래 형태와 차이가 없어 극소가 되는 부분이 딱 하나로 정해져 있습니다.



이렇게 대칭축을 중심으로 일정한 거리만큼 떨어져 있을 때 극소가 됩니다.

그런데 지금은 극소가 되는 부분이 2개잖아요? 바로 3번으로 갑시다.

결국 정적분값이 극소가 되는 부분은 대칭축과 관련이 있는 것 같네요. 절댓값으로 접어 올린 함수가 극소가 되는 부분이라면 결국



요런 느낌이어야겠어요. 대칭축은 $x=3$입니다. $f(x)=2(x-3)^2+a$의 형태겠네요.

그런데 여기서 더 뭔갈 할 수 있는 게 없어요. 이러면 원래대로 가봅시다. 정적분에 위끝 또는 아래끝에 변수가 있는 경우에 해야 할 행동을 해야죠.

일단 위끝과 아래끝은 같아지지 않기 때문에 바로 미분해보면 $g'(x)=|f(x+1)|-|f(x)|$입니다. 피적분함수인 $|f(x)|$가 연속이므로 정적분으로 정의된 함수는 미분가능합니다. $x=1$과 $x=4$에서 극소라는 건 결국 도함수의 함숫값이 0이라는 의미죠. 따라서 $|f(2)|=|f(1)|$입니다. 그림에서 $f(2)<0$, $f(1)>0$이므로 $f(1)=-f(2)$겠네요. 넣어보면 $a+8=-a-2$이고 $a=-5$입니다. $f(x)=2(x-3)^2-5$이고 $f(0)=13$이네요.

6. 자연수 n에 대하여 $4\log_{64}\left(\dfrac{3}{4n+16}\right)$의 값이 정수가 되도록 하는 1000 이하의 모든 n의 값의 합을 구하시오.

〔2023학년도 6월 21〕

6. 정답 426 〔2023학년도 6월 21〕

1) 자연수 보이면 숫자 넣기

n이 자연수인데 $4\log_{64}\left(\frac{3}{4n+16}\right)$의 값이 정수가 되도록 하는 1000 이하의 모든 n의 값의 합을 구하라네요.

일단 로그 밑을 좀 정리해볼게요. $64=2^6$이니까 $4\log_{64}\left(\frac{3}{4n+16}\right)=\frac{2}{3}\log_2\left(\frac{3}{4n+16}\right)$입니다. 이게 정수여야 한다는 거죠?

$\frac{2}{3}\log_2\left(\frac{3}{4n+16}\right)=k$로 놓을게요. k는 정수입니다. 식을 정리하면 $\log_2\left(\frac{3}{4n+16}\right)=\frac{3}{2}k$이고 지수로 바꿔버리면 $2^{\frac{3}{2}k}=\frac{3}{4n+16}=\frac{3}{4(n+4)}$입니다. 아예 4도 왼쪽으로 넘길게요. 그러면 $2^{\frac{3}{2}k+2}=\frac{3}{n+4}$입니다.

이제 n에다 숫자를 넣을 차례입니다. $n=1$이면 $2^{\frac{3}{2}k+2}=\frac{3}{5}$입니다. 음.... k가 정수가 안 될 것 같은데요? $n=2$이면 $2^{\frac{3}{2}k+2}=\frac{1}{2}=2^{-1}$입니다. $k=-2$이네요. 됩니다! $n=3$이면 $2^{\frac{3}{2}k+2}=\frac{3}{7}$입니다. k가 정수가 아닐 것 같아요. 하나만 더 해볼게요. $n=4$이면 $2^{\frac{3}{2}k+2}=\frac{3}{8}$입니다. 마찬가지겠네요.

이거 보면 결국 오른쪽의 $\frac{3}{n+4}$가 밑이 2인 지수 2^m와 같은 형태여야 되는 것 같아요. 2^{-1}, 2^{-2}뭐 이런 식으로요. 그럼 차라리 m에다 숫자를 넣어서 n을 구하는 게 빠르지 않을까요? 그런데 이미 $2^{\frac{3}{2}k+2}=\frac{3}{n+4}$의 형태로 되어 있네요. 그러면 k에 정수를 넣어서 역으로 n을 구해봅시다.

지금 n이 증가할수록 $\frac{3}{n+4}$는 점점 작아지는 구조죠? 그러면 $2^{\frac{3}{2}k+2}$도 작아져야 하니까 k에는 점점 작은 수를 넣어야겠어요. $k=-2$일 때 $n=2$를 확인했으니까 $k=-3$을 넣으면 $2^{-\frac{5}{2}}=\frac{3}{n+4}$입니다. 자연수가 나오지는 않겠어요. 보니까 $k=-2l$ (l은 정수)의 형태가 아니면 안 되네요. 계속 가봅시다.

$k=-4$를 넣으면 $2^{-4}=\frac{3}{n+4}$입니다. $n=44$이네요. $k=-6$을 넣으면 $2^{-7}=\frac{1}{128}=\frac{3}{n+4}$이고 $n=380$입니다. $k=-8$을 넣으면 $2^{-10}=\frac{1}{1024}=\frac{3}{n+4}$인데 이건 1000을 넘죠? 따라서 구하는 값은

$2 + 44 + 380 = 426$ 입니다.

7. 두 양수 a, $b\,(b>3)$과 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$g(x)=\begin{cases} (x+3)f(x) & (x<0) \\ (x+a)f(x-b) & (x\geq 0) \end{cases}$$

이 실수 전체의 집합에서 연속이고 다음 조건을 만족시킬 때, $g(4)$의 값을 구하시오. 〔2023학년도 6월 22〕

$\displaystyle\lim_{x\to-3}\frac{\sqrt{\lvert g(x)\rvert+\{g(t)\}^2}-\lvert g(t)\rvert}{(x+3)^2}$의 값이 <u>존재하지 않는</u> 실수 t의 값은 -3과 6뿐이다.

7. 정답 19 〔2023학년도 6월 22〕

1) 연속은 좌극한 우극한 함숫값 확인

일단 a, $b(b>3)$가 있는데 둘 다 양수랍니다. $a>0$, $b>3$이네요. 이때 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$가 있는데 $g(x)=\begin{cases}(x+3)f(x) & (x<0)\\ (x+a)f(x-b) & (x\geq 0)\end{cases}$ 라고 하네요. 얘가 실수 전체의 집합에서 연속이라네요.

일단 $x=0$을 제외하고는 다 다항함수니까 연속성은 보장되어 있으므로 $x=0$에서의 연속만을 조사해도 되겠죠? 결국 $3f(0)=af(-b)$입니다.

2) 함수 극한은 논리다

그리고 아래의 조건을 만족시킨다네요. $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{\sqrt{|g(x)|+\{g(t)\}^2}-|g(t)|}{(x+3)^2}$의 값이 존재하지 않게 되는 t의 값이 -3과 6뿐이랍니다. 일단 $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{\sqrt{|g(x)|+\{g(t)\}^2}-|g(t)|}{(x+3)^2}$의 값이 존재하지 않는다는 건 어떤 의미일까요? 좌극한값과 우극한값이 다르다는 거에요. 그러니까 $t=-3$, $t=6$일 때 좌극한값과 우극한값이 달라지게 된다는 거죠. 바꿔 말하면 $t=-3$, $t=6$ 이 둘만 아니면 모든 곳에서 좌극한값과 우극한값이 같아진다고도 말할 수 있겠네요.

일단 늘 해왔던 대로 가봅시다. 분자에 루트가 포함되어 있어요. 거기에 우리는 x가 -3으로 갈 때의 함숫값이 궁금한 건데 $g(t)$라는 함숫값이 있네요. 얘는 극한값을 계산할 때는 변수에 포함되지 않으니까 사실상 상수나 다름없어요. 이건 일단 숙지해두고, 루트가 포함되어 있으니까 유리화를 해볼까요?

$\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{\sqrt{|g(x)|+\{g(t)\}^2}-|g(t)|}{(x+3)^2}=\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{\left(\sqrt{|g(x)|+\{g(t)\}^2}-|g(t)|\right)\left(\sqrt{|g(x)|+\{g(t)\}^2}+|g(t)|\right)}{(x+3)^2\left(\sqrt{|g(x)|+\{g(t)\}^2}+|g(t)|\right)}$ 이고

$\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{|g(x)|}{(x+3)^2\left(\sqrt{|g(x)|+\{g(t)\}^2}+|g(t)|\right)}$ 입니다.

이때 $x<0$에서 $g(x)=(x+3)f(x)$이죠? 따라서 $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{|(x+3)f(x)|}{(x+3)^2\left(\sqrt{|(x+3)f(x)|+\{g(t)\}^2}+|g(t)|\right)}$ 입니다.

이건 사실상 $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{|(x+3)|\times|f(x)|}{(x+3)^2\left(\sqrt{|(x+3)f(x)|+\{g(t)\}^2}+|g(t)|\right)}$ 와도 같죠.

3) 절댓값 풀기

일단 절댓값이 있으니까 좀 풀어봅시다. 만약 이게 좌극한이라면, 즉 x가 -3보다 작은 부분에서 온다면

$|x+3|=-(x+3)$입니다. 그러면 $\lim_{x\to -3-}\frac{-(x+3)\times|f(x)|}{(x+3)^2\left(\sqrt{|(x+3)f(x)|+\{g(t)\}^2}+|g(t)|\right)}$ 이고

$\lim_{x\to -3-}\frac{-|f(x)|}{(x+3)\left(\sqrt{|(x+3)f(x)|+\{g(t)\}^2}+|g(t)|\right)}$ 입니다.

우극한도 마찬가지로 해볼까요? x가 -3보다 큰 부분에서 온다면 $|x+3|=x+3$입니다.

$\lim_{x\to -3+}\frac{(x+3)\times|f(x)|}{(x+3)^2\left(\sqrt{|(x+3)f(x)|+\{g(t)\}^2}+|g(t)|\right)}$ 이고

$\lim_{x\to -3+}\frac{|f(x)|}{(x+3)\left(\sqrt{|(x+3)f(x)|+\{g(t)\}^2}+|g(t)|\right)}$ 이네요.

먼저 $t\neq -3$, $t\neq 6$이어서 극한값이 존재한다는 상황부터 볼게요. 존재하지 않는다면 반대로 하면 되니까요.

극한값이 존재한다는 건 이 둘의 값이 존재하고, 같아야 한다는 거예요. 일단

$\lim_{x\to -3-}\frac{-|f(x)|}{(x+3)\left(\sqrt{|(x+3)f(x)|+\{g(t)\}^2}+|g(t)|\right)}$ 와 $\lim_{x\to -3+}\frac{|f(x)|}{(x+3)\left(\sqrt{|(x+3)f(x)|+\{g(t)\}^2}+|g(t)|\right)}$

모두 분모가 0으로 가는데 극한값이 존재해야 하니까 분자도 0으로 가야겠죠? 따라서 $f(-3)=0$입니다. 이때 $x<0$에서 $g(x)=(x+3)f(x)$이니까 $g(-3)=0$이기도 하겠네요. $f(-3)=g(-3)=0$입니다.

아까 $f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 이차함수라고 했죠? 그러면 인수정리로 함수를 구해봅시다.

$f(x)=(x+3)(x+k)$라고 해볼게요. 이걸 좌극한 우극한에 각각 넣으면 둘 다

$\lim_{x\to -3}\frac{|(x+k)|}{\left(\sqrt{|(x+3)^2(x+k)|+\{g(t)\}^2}+|g(t)|\right)}$ 가 됩니다. 이때 루트 안에 있는 $g(x)=(x+3)^2(x+k)$는

$x=-3$에서 0이 되니까 사실상 $\lim_{x\to -3}\frac{|(x+k)|}{\left(\sqrt{\{g(t)\}^2}+|g(t)|\right)}$ 가 되네요. 정리하면 $\lim_{x\to -3}\frac{|(x+k)|}{2|g(t)|}$ 가 됩니다.

이제 조금 더 세부적으로 살펴볼게요. 만약 저 식에서 $g(t)=0$이라면요? 이러면 분모가 0이 되어 극한값이 존재하지 않게 될 가능성이 존재해요. 이 가능성을 확인해봐야 할 것 같네요.

만약 $g(t)=0$이라면 $\lim_{x\to -3}\frac{|(x+k)|}{\left(\sqrt{|(x+3)^2(x+k)|}\right)}$ 가 됩니다. 만약 $k=3$이 아니라면 당연히 분모가 0으로 가니까 극한값이 존재하지 않게 되구요. $k=3$이라고 하더라도

$\lim_{x\to-3}\frac{|(x+3)|}{\left(\sqrt{|(x+3)^2(x+3)|}\right)}=\lim_{x\to-3}\frac{|x+3|}{|x+3|\sqrt{x+3}}=\lim_{x\to-3}\frac{1}{\sqrt{x+3}}$ 이 되어 분모가 0으로 가고 극한값이 존재하지 않게 됩니다.

그러면 결국 극한값이 존재하지 않게 되는 조건은 $g(t)=0$이어야 한다는 거네요. 그리고 그 t의 값이 -3과 6만 존재해야 한다는 거구요. $g(-3)=g(6)=0$입니다. 아까 $x\geq 0$에서 $g(x)=(x+a)f(x-b)$라고 했었죠? 따라서 $(a+6)f(6-b)=0$입니다. $a>0$이니까 $f(6-b)=0$이네요.

$6-b$는 -3과 같을까요? 일단 다르다고 해볼게요. 그러면 $-k=6-b$가 되고 $f(x)=(x+3)(x+b-6)$입니다. $f(x-b)=(x-b+3)(x-6)$이고 $g(x)=\begin{cases}(x+3)^2(x+b-6) & (x<0)\\ (x+a)(x-b+3)(x-6) & (x\geq 0)\end{cases}$ 이네요.

아까 $g(t)=0$이 되는 t의 값이 -3과 6"만" 존재해야 한다고 했었죠? 그 말은 그 둘을 제외하고는 0이 되는 부분이 없어야 한다는 거예요. 지금 식을 보면 확실하게 0이 되는 부분은 $x<0$일 때 $x=-3$이고 $x\geq 0$일 때 $x=6$이 있습니다. 방금 봤던 -3과 6이네요.

일단 $x\geq 0$일 때 $x=-a$는 $a>0$이니까 범위에 포함되지 않으므로 신경 쓸 필요가 없습니다.

불확실한 부분은 $x<0$일 때 $x=6-b$와 $x\geq 0$일 때 $x=b-3$이네요. 얘네 둘은 -3과 6이거나, 아예 범위 밖으로 나가야 합니다. 범위 안에 있으면 거기서 0이 되잖아요. -3과 6을 제외하고는 0이 되는 부분이 있으면 안 되니까요.

만약 $6-b=-3$이라면 $b=9$인데 우리 아까 $6-b$와 -3을 다르게 보자고 했었죠? 따라서 따라서 $6-b$는 $x\geq 0$의 범위로 나가야 합니다. $b\leq 6$이네요.

또한 $x\geq 0$에서도 $x=b-3$과 6은 같으면 안 돼요. 그러면 범위 밖으로 나가야 하고 $b<3$입니다. 그런데 맨 처음 조건에 $b>3$이어야 한다고 했었죠? 모순입니다. 따라서 $b=9$여야만 하네요. 그렇게 되면 $x<0$일 때 $x=6-b$은 -3이 되고, $x\geq 0$일 때 $x=b-3$은 6이 되어서 딱 0이 되는 부분이 -3과 6만 남게 됩니다.

마지막으로 연속 조건 확인 안 했죠? $f(x)=(x+3)^2$인데 $3f(0)=af(-9)$니까 $27=36a$이고 $a=\frac{3}{4}$입니다.

$g(4)$를 구해야 하는데 $x\geq 0$일 때 $g(x)=\left(x+\frac{3}{4}\right)(x-6)^2$이니까 넣으면 $g(4)=19$입니다.