

수학 영역 (미적분)

성명

수험번호

- 자신이 선택한 유형(확률과 통계/미적분/기하)의 문제지인지 확인하십시오.
- 문제지의 해당란에 성명과 수험 번호를 정확히 쓰시오.
- 답안지의 필적 확인란에 다음의 문구를 정자로 기재하십시오.

너와 함께 저 꿈을 덧그리며 올려다본 하늘

- 답안지의 해당란에 성명과 수험 번호를 쓰고, 또 수험 번호와 답을 정확히 표시하십시오.
- 단답형 답의 숫자에 '0'이 포함되면 그 '0'도 답란에 반드시 표시하십시오.
- 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고하십시오. 배점은 2점, 3점 또는 4점입니다.
- 계산은 문제지의 여백을 활용하십시오.

※ 시험이 시작되기 전까지 표지를 넘기지 마시오.

Epsilon

2021년 11월 6일 시행 Epsilon 모의고사 2회

출제위원 : 성균관대학교 수학교육과 수학문제연구학회 Epsilon

19학번 : 황주영

20학번 : 김동연, 김유진, 김태희, 송문주, 이도윤
이선우, 정원철, 최연조, 최인환

21학번 : 김민성, 김서원, 김예찬, 류은수, 박주원
박창수, 서연수, 심현재, 황민수

편집위원 : 성균관대학교 수학교육과 수학문제연구학회 Epsilon 편집위원회

20학번 : 김유진, 김태희, 최연조

21학번 : 류은수, 박주원

자문 :

정재훈 (성균관대학교 수학교육과 19)

검토위원 :

강종우 (성균관대학교 수학교육과 19)

장지원 (성균관대학교 수학교육과 19)

이병주 (성균관대학교 수학교육과 20)

엡실론(Epsilon) 팀 혹은 엡실론(Epsilon) 모의고사에 관하여 문의 사항이 있으신 경우 dongyeon0101@naver.com으로 연락 주시기 바랍니다.

제 2 교시

Epsilon

수학 영역



성균관대학교 수학교육과 Epsilon 주관

5지선다형

1. $\log_{\frac{1}{4}} 8$ 의 값은? [2점]

- ① $-\frac{5}{2}$ ② -2 ③ $-\frac{3}{2}$ ④ -1 ⑤ $-\frac{1}{2}$

2. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - x^2 - 2x}{x - 2}$ 의 값은? [2점]

- ① 0 ② 2 ③ 4 ④ 6 ⑤ 8

3. 공비가 양수인 등비수열 $\{a_n\}$ 에 대하여

$$a_1 = 3, 4a_3 = a_5$$

일 때, a_4 의 값은? [3점]

- ① 12 ② 15 ③ 18 ④ 21 ⑤ 24

4. 함수 $f(x)$ 가

$$f'(x) = 6x + a, f(0) = 1, f(2) = 7$$

을 만족시킬 때, 상수 a 의 값은? [3점]

- ① -3 ② -2 ③ -1 ④ 0 ⑤ 1

5. $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ 인 θ 에 대하여 $\sin\theta = 3\cos^2\theta - 1$ 일 때, $\tan\theta$ 의 값은? [3점]

- ① $\frac{\sqrt{5}}{5}$ ② $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ ③ $\frac{3\sqrt{5}}{5}$ ④ $\frac{4\sqrt{5}}{5}$ ⑤ $\sqrt{5}$

6. 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$ 에 대하여 함수

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & (x < 1) \\ f(3)x & (x \geq 1) \end{cases}$$

이 $x=1$ 에서 미분가능할 때, $g(2)$ 의 값은? [3점]

- ① -6 ② -4 ③ -2 ④ 0 ⑤ 2

7. 모든 항이 양수인 수열 $\{a_n\}$ 이 모든 자연수 n 에 대하여

$$\sum_{k=1}^n \frac{\log a_k}{2} = \log(n+3)$$

을 만족시킬 때, $a_4 \times a_5 \times a_6$ 의 값은? [3점]

- ① $\frac{49}{36}$ ② $\frac{16}{9}$ ③ $\frac{9}{4}$ ④ $\frac{25}{9}$ ⑤ $\frac{121}{36}$

8. 다항함수 $f(x)$ 가

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x) - 3x^2}{x} = 6, \quad \lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x)}{x^2 - 1} = f'(0)$$

을 만족시킬 때, $f(1)$ 의 값은? [3점]

- ① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

9. 등차수열 $\{a_n\}$ 이 1보다 큰 어떤 자연수 m 에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

$$\begin{aligned} \text{(가)} \quad & \sum_{k=1}^m a_{2k-1} : \sum_{k=1}^{m-1} a_{2k} = 6 : 5 \\ \text{(나)} \quad & a_m : a_{m+1} = 3 : 4 \end{aligned}$$

$a_5 = 6$ 일 때, a_{11} 의 값은? [4점]

- ① 15 ② 18 ③ 21 ④ 24 ⑤ 27

10. 삼차함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

$$\begin{aligned} \text{(가)} \quad & \text{모든 실수 } x \text{에 대하여 } f(-x) = -f(x) \text{이다.} \\ \text{(나)} \quad & \int_0^a \{|f(x)| - f(x)\} dx = 0 \text{을 만족시키는 실수 } a \text{의} \\ & \text{최솟값은 } -3 \text{이다.} \end{aligned}$$

$f(1) = -8\sqrt{3}$ 일 때, 함수 $f(x)$ 의 극댓값은? [4점]

- ① 18 ② 21 ③ 24 ④ 27 ⑤ 30

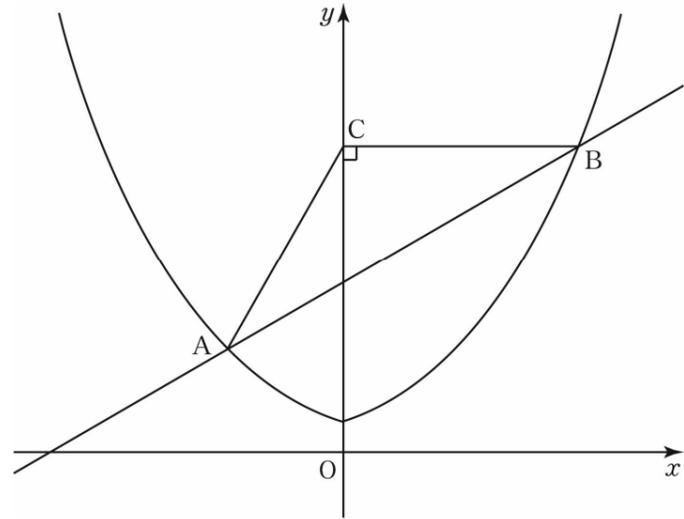
11. 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시각 $t(t \geq 0)$ 에서의 속도는 각각

$$f(t) = t^2 - 4t + 3, g(t) = |f(t)|$$

이다. 점 Q의 속도가 감소하는 동안 점 P가 움직인 거리는? [4점]

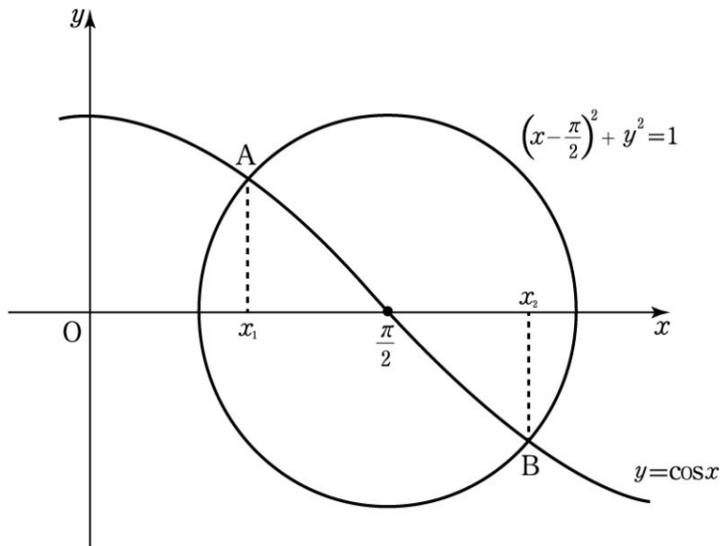
- ① $\frac{2}{3}$ ② $\frac{4}{3}$ ③ 2 ④ $\frac{8}{3}$ ⑤ $\frac{10}{3}$

12. 그림과 같이 곡선 $y = a^{|x|} (a > 1)$ 과 직선 $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + 5$ 가 만나는 두 점을 A, B라 하고, 점 B에서 y축에 내린 수선의 발을 C라 하자. $\overline{AC} = \overline{BC}$ 일 때, 선분 AB의 길이는? [4점]



- ① 9 ② 12 ③ 15 ④ 18 ⑤ 21

13. 그림과 같이 곡선 $y = \cos x$ 와 원 $(x - \frac{\pi}{2})^2 + y^2 = 1$ 이
 만나는 두 점 A, B의 x 좌표를 각각 x_1, x_2 ($x_1 < x_2$)라 하자.
 <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?
 (단, $3 < \pi < 4$ 이다.) [4점]



< 보 기 >

ㄱ. $x_1 + x_2 = \pi$

ㄴ. $x_1 + \sin x_1 = \frac{\pi}{2}$

ㄷ. $\frac{2}{3}\pi < x_2 < \frac{3}{4}\pi$

- ① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
 ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

14. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$ 가 다음 조건을
 만족시킨다.

(가) $0 \leq x < 4$ 일 때, $f(x) = -\frac{1}{2}x^3 + \frac{27}{8}x^2 - \frac{17}{4}x - 1$ 이다.

(나) 모든 실수 x 에 대하여 $f(x+4) = f(x) + 5$ 이다.

함수 $|f(x) - x|$ 가 열린구간 $(4n, 4n+4)$ 에서 미분가능하도록
 하는 자연수 n 의 최솟값을 k 라 하자. $\int_{4k}^{4k+4} f(x) dx$ 의 값은?

[4점]

- ① 80 ② 82 ③ 84 ④ 86 ⑤ 88

15. 수열 $\{a_n\}$ 이 모든 자연수 n 에 대하여

$$a_{n+1} = \begin{cases} a_n + 11 & (a_n \geq 2) \\ (a_n)^2 + 4a_n - 3 & (a_n < 2) \end{cases}$$

를 만족시킨다. $a_{10} = a_7 + 47$ 일 때, $\sum_{n=10}^{15} a_n$ 의 값은? [4점]

- ① 360 ② 375 ③ 390 ④ 405 ⑤ 420

단답형

16. $\sqrt[3]{64} \times \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{10}}$ 의 값을 구하시오. [3점]

17. 함수 $f(x) = (x+3)(2x^2-1)$ 에 대하여 $f'(1)$ 의 값을 구하시오. [3점]

18. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 이 모든 자연수 n 에 대하여

$$\sum_{k=1}^n a_k b_k = -\frac{1}{n+2}$$

을 만족시킨다. $a_4 = \frac{1}{6}$ 일 때, $\frac{1}{b_4}$ 의 값을 구하시오. [3점]

19. 최고차항의 계수가 -1 인 삼차함수 $f(x)$ 와 함수 $g(x)$ 가

$$f(x) = \int_0^x g(t) dt + \int_3^x g(t) dt$$

를 만족시킨다. $f(1) = g(1) = 0$ 일 때, $f(-4)$ 의 값을 구하시오.
[3점]

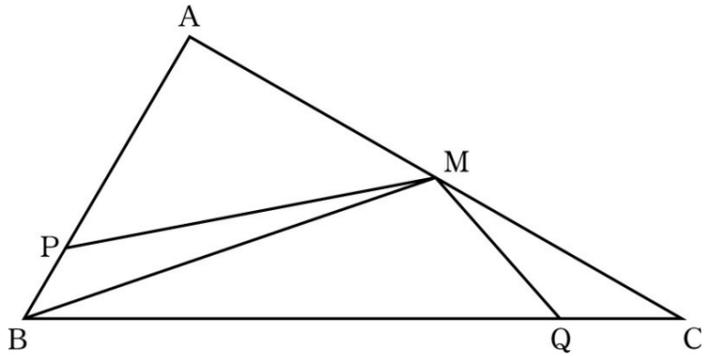
20. 함수 $f(x) = x^3 - 8x$ 에 대하여 방정식

$$|f(x) - mx - 4m| = mx + 4m$$

의 서로 다른 실근의 개수가 5일 때, m^2 의 값을 구하시오.
(단, m 은 상수이다.) [4점]

21. 그림과 같이 삼각형 ABC에 대하여 선분 AC의 중점을 M이라 하자. 선분 AB와 선분 BC 위에 각각 $\overline{AP} = 6$, $\overline{CQ} = 3$ 이 되도록 점 P와 점 Q를 잡는다. $\angle ABM = \angle AMP$, $\angle CBM = \angle CMQ$ 이고 $\angle AMP + \angle CMQ = \frac{\pi}{3}$ 일 때, 삼각형 MPQ의 외접원의 반지름의 길이를 구하시오. (단, $\overline{AB} > 6$ 이고, $\overline{BC} > 3$ 이다.)

[4점]



22. 최고차항의 계수가 양수인 삼차함수 $f(x)$ 와 실수 t 에 대하여 집합

$$\{x \mid (f \circ f)(x) = x, (x-2t)(x+t) \leq 0\}$$

의 원소의 개수를 $g(t)$ 라 하자. 함수 $g(t)$ 는 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) $t \geq 4$ 일 때, $g(t) = 5$ 이다.
 (나) $\left| \lim_{t \rightarrow k^+} g(t) - \lim_{t \rightarrow k^-} g(t) \right| = 2$ 를 만족시키는 k 의 값은 $-2, 4$ 뿐이다.
 (다) 함수 $g(t)$ 의 최솟값은 1이다.

$f(2) = 2$, $g(3) = 3$ 일 때, $f(10)$ 의 값을 구하시오. [4점]

* 확인 사항

- 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.
- 이어서, 「선택과목(확률과 통계)」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

제 2 교시

Epsilon

수학 영역(미적분)

성균관대학교 수학교육과 Epsilon 주관

5지선다형

23. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt{n^2+3n+2}-n}$ 의 값은? [2점]

- ① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ 1 ④ $\frac{4}{3}$ ⑤ $\frac{5}{3}$

24. 매개변수 $t (t > 0)$ 으로 나타내어진 곡선

$$x = t^2 + 2\ln t, \quad y = -\frac{1}{\sqrt{t^2+1}}$$

에서 $t = \sqrt{3}$ 일 때, $\frac{dy}{dx}$ 의 값은? [3점]

- ① $\frac{3}{64}$ ② $\frac{3}{32}$ ③ $\frac{3}{16}$ ④ $\frac{3}{8}$ ⑤ $\frac{3}{4}$

25. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{2n} \frac{2k}{k^2 + 4n^2}$ 의 값은? [3점]

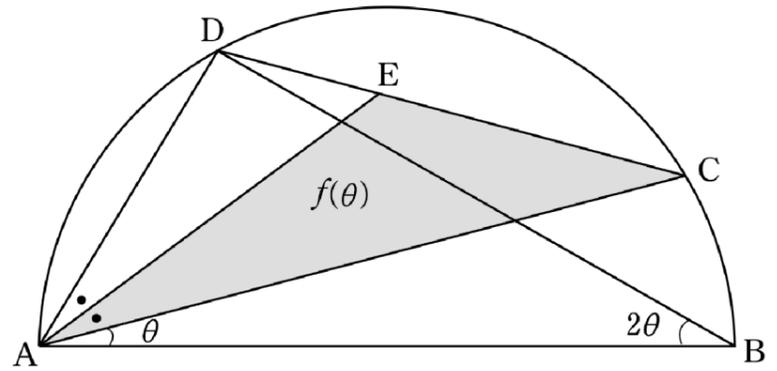
- ① ln2 ② ln3 ③ 2ln2 ④ ln5 ⑤ ln6

26. 그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로

하는 반원이 있다. 호 AB 위에 두 점 C, D를 각각 $\angle CAB = \theta$, $\angle ABD = 2\theta$ 가 되도록 잡는다. $\angle DAC$ 의 이등분선이 선분 CD와 만나는 점을 E라 하자.

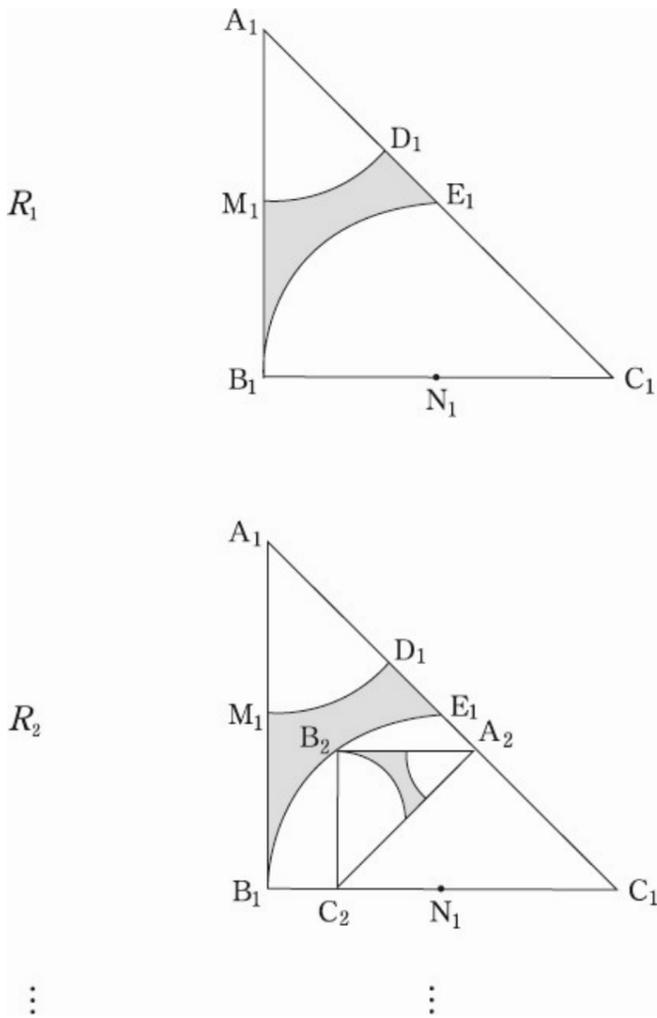
삼각형 ACE의 넓이를 $f(\theta)$ 라 할 때, $\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{f(\theta)}{\theta}$ 의 값은?

(단, $0 < \theta < \frac{\pi}{6}$ 이다.) [3점]



- ① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

27. 그림과 같이 $\overline{A_1B_1} = \overline{B_1C_1} = 2$ 이고 $\angle A_1B_1C_1 = \frac{\pi}{2}$ 인 삼각형 $A_1B_1C_1$ 이 있다. 선분 A_1B_1 과 선분 B_1C_1 의 중점을 각각 M_1, N_1 이라 하자. 선분 A_1C_1 위의 $\overline{A_1M_1} = \overline{A_1D_1}$ 인 점 D_1 에 대하여 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{4}$ 인 부채꼴 $A_1M_1D_1$ 을 그린다. 점 N_1 을 중심으로 하고 선분 B_1N_1 을 반지름으로 하는 원이 선분 A_1C_1 과 만나는 점 중 C_1 이 아닌 점을 E_1 이라 하자. 두 선분 M_1B_1, D_1E_1 과 두 호 M_1D_1, B_1E_1 로 둘러싸인 부분에 색칠하여 얻은 그림을 R_1 이라 하자. 그림 R_1 에 선분 E_1C_1 위의 점 A_2 , 호 B_1E_1 위의 점 B_2 와 선분 B_1C_1 위의 점 C_2 에 대하여 $\overline{A_2B_2} = \overline{B_2C_2}$, $\angle A_2B_2C_2 = \frac{\pi}{2}$ 이고 선분 A_2B_2 가 선분 B_1C_1 과 평행한 삼각형 $A_2B_2C_2$ 를 그린다. 삼각형 $A_2B_2C_2$ 에 그림 R_1 을 얻은 것과 같은 방법으로 부채꼴을 그리고 색칠하여 얻은 그림을 R_2 라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n 번째 얻은 그림 R_n 에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n 이라 할 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ 의 값은? [3점]



- ① $\frac{25(4-\pi)}{72}$
- ② $\frac{25(4-\pi)}{64}$
- ③ $\frac{25(4-\pi)}{56}$
- ④ $\frac{25(4-\pi)}{48}$
- ⑤ $\frac{5(4-\pi)}{8}$

28. 양수 t 에 대하여 원 C 가 제1사분면에서 곡선 $y = \frac{1}{x}$ 과 오직 점 $(t, \frac{1}{t})$ 에서만 만나고 제3사분면에서 곡선 $y = \frac{1}{x}$ 과 오직 한 점에서만 만난다. 원 C 의 넓이를 $f(t)$ 라 할 때, $f'(2)$ 의 값은? [4점]

- ① $\frac{11}{4}\pi$
- ② 3π
- ③ $\frac{13}{4}\pi$
- ④ $\frac{7}{2}\pi$
- ⑤ $\frac{15}{4}\pi$

단답형

29. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

$$(가) f(1) = 1, f(e) = e$$

$$(나) \int_1^e \frac{f'(x)}{x} dx = 21$$

곡선 $y = f(x)$ 위의 점 $(t, f(t))$ 에서 그은 접선의
 y 절편을 $g(t)$ 라 하자. $\int_0^1 te^{-t}g(e^t)dt$ 의 값을 구하시오. [4점]

30. 최고차항의 계수가 음수이고 $f''(2a) = 0$ 인 삼차함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $\{f(x)\}^2$ 은 $x = a, x = 6, x = b$ 에서만
 극값을 갖는다.

(나) 열린구간 $(0, 8)$ 에서 함수 $\cos(f(x)) \times e^{f(x)}$ 가
 $x = k$ 에서 극값을 갖도록 하는 k 의 개수는 8이다.

$f'(1) \times f'(3) < 0$ 일 때, $f(a) - f(10) = n\pi$ 를 만족시키는 정수
 n 의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 하자. Mm 의 값을
 구하시오. (단, a, b 는 상수이고, $a < 6 < b$ 이다.) [4점]

* 확인 사항

- 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인
 하시오.
- 이어서, 「선택과목(기하)」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한
 과목인지 확인하시오.

※ 시험이 시작되기 전까지 표지를 넘기지 마시오.