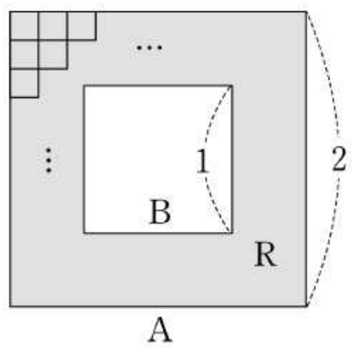
미적킬러 81제

[출처] 2009 모의_공공 평가원 고3 11월 25

1. 그림과 같이 한 변의 길이가 2인 정사각형 A와 한 변의 길이가 1인 정사각형 B는 변이 서로 평행하고, A의 두 대각선의 교점과 B의 두 대각선의 교점이 일치하도록 놓여있다. A와 A의 내부에서 B의 내부를 제외한 영역을 R라 하자. 2이상인 자연수 n에 대하여 한 변의 길이가 $\frac{1}{n}$인 작은 정사각형을 다음 규칙에 따라 R에 그린다.

> (가) 작은 정사각형의 한 변은 A의 한 변에 평행하다.
>
> (나) 작은 정사각형들의 내부는 서로 겹치지 않도록 한다.

이와 같은 규칙에 따라 R에 그릴 수 있는 한 변의 길이가 $\frac{1}{n}$인 작은 정사각형의 최대 개수를 a_n이라 하자. 예를 들어 $a_2=12$, $a_3=20$이다. $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{2n+1}-a_{2n}}{a_{2n}-a_{2n-1}}=c$라 할 때, $100c$의 값을 구하시오.



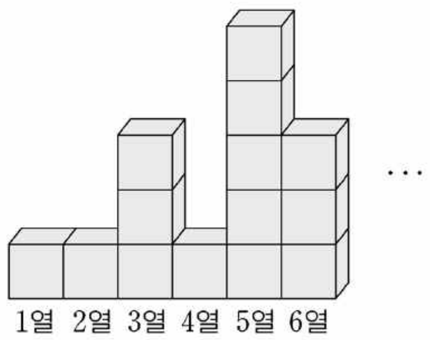
[출처] 2010 모의_공공 평가원 고3 11월 25

[출처] 2010 모의_공공 평가원 고3 11월 공통범위 25

2. 자연수 m에 대하여 크기가 같은 정육면체 모양의 블록이 1열에 1개, 2열에 2개, 3열에 3개, $\cdots$, m열에 m개 쌓여있다. 블록의 개수가 짝수인 열이 남아 있지 않을 때까지 다음 시행을 반복한다.

> 블록의 개수가 짝수인 각 열에 대하여 그 열에 있는 블록의 개수의 $\frac{1}{2}$만큼의 블록을 그 열에서 들어낸다.

블록을 들어내는 시행을 모두 마쳤을 때, 1열부터 m열까지 남아 있는 블록의 개수의 합을 $f(m)$이라 하자. 예를 들어, $f(2)=2$, $f(3)=5$, $f(4)=6$이다. $\lim_{n\to\infty}\frac{f(2^{n+1})-f(2^n)}{f(2^{n+2})}=\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오.
(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)



[출처] 2012 모의_공공 평가원 고3 11월 21

3. 함수 $f(x)=kx^2e^{-x}\,(k>0)$과 실수 t에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t,\ f(t))$에서 x축까지의 거리와 y축까지의 거리 중 크지 않은 값을 $g(t)$라 하자. 함수 $g(t)$가 한 점에서만 미분가능하지 않도록 하는 k의 최댓값은?

① $\frac{1}{e}$ ② $\frac{1}{\sqrt{e}}$ ③ $\frac{e}{2}$

④ $\sqrt{e}$ ⑤ e

[출처] 2013 모의_공공 경찰대 고3 07월 17

4. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$의 일반항이 각각 $a_n=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$과 $b_n=2\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$일 때, $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}a_kb_{n-k+1}\right)$의 값은?

① 6 ② 8 ③ 9

④ 10 ⑤ 12

[출처] 2013 모의_공공 평가원 고3 11월 30

5. 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)=f(x)e^{-x}$이 다음 조건을 만족시킨다.

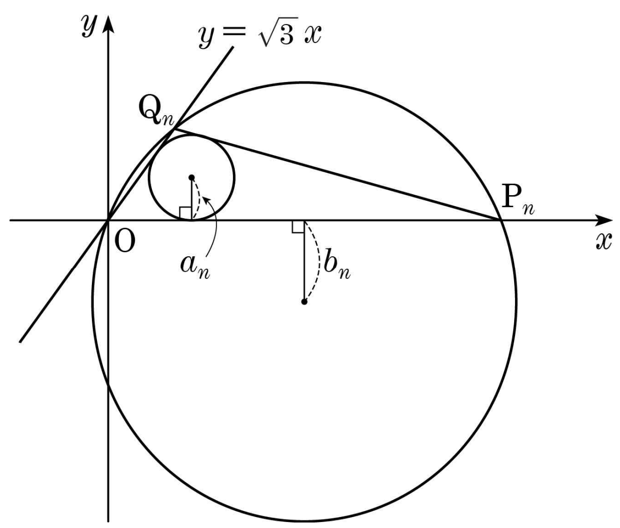
(가) 점 $(1,\ g(1))$과 점 $(4,\ g(4))$는 곡선 $y=g(x)$의 변곡점이다.

(나) 점 $(0,\ k)$에서 곡선 $y=g(x)$에 그은 접선의 개수가 3인 k의 값의 범위는 $-1<k<0$이다.

$g(-2)\times g(4)$의 값을 구하시오.

[출처] 2014 모의_공공 교육청 고3 03월 30

6. 좌표평면 위에 직선 $y=\sqrt{3}x$가 있다. 자연수 n에 대하여 x축 위의 점 중에서 x좌표가 n인 점을 P_n, 직선 $y=\sqrt{3}x$ 위의 점 중에서 x좌표가 $\frac{1}{n}$인 점을 Q_n이라 하자. 삼각형 $\mathrm{OP}_n\mathrm{Q}_n$의 내접원의 중심에서 x축까지의 거리를 a_n, 삼각형 $\mathrm{OP}_n\mathrm{Q}_n$의 외접원의 중심에서 x축까지의 거리를 b_n이라 할 때 $\lim_{n\to\infty}a_nb_n=L$이다. $100L$의 값을 구하시오. (단, O는 원점이다.)



[출처] 2014 모의_공공 평가원 고3 11월 30

7. 함수 $f(x)=e^{x+1}-1$과 자연수 n에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=100|f(x)|-\sum_{k=1}^{n}|f(x^k)|$$

이라 하자. $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하도록 하는 모든 자연수 n의 값의 합을 구하시오.

[출처] 2014 모의_공공 교육청 고3 03월 30

8. 실수 t에 대하여 좌표평면에서 원점을 지나고 기울기가 $\tan(\sin t)$인 직선과 원 $x^2+y^2=e^{2t}$이 만나는 점 중에서 x좌표가 양수인 점을 P라 하고, 점 P가 나타내는 곡선을 C라 하자. $t=\pi$일 때, 곡선 C 위의 점 P에서의 접선과 x축 및 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이는 $a\times e^{b\pi}$이다. $10(a+b)$의 값을 구하시오. (단, a와 b는 유리수이다.)

[출처] 2014 모의_공공 사관학교 고3 07월 30

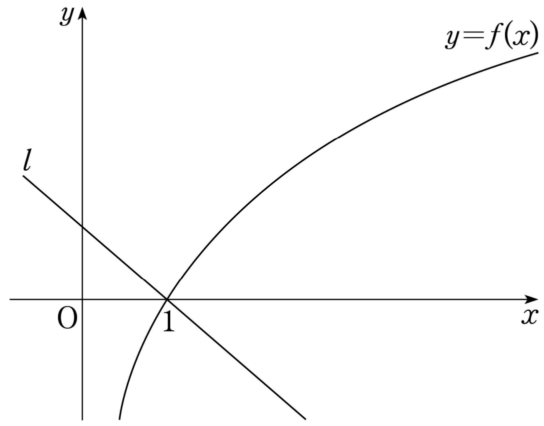
9. 함수 $f(x) = -xe^{2-x}$과 상수 a가 다음 조건을 만족시킨다.

> 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a, f(a))$에서의 접선의 방정식을 $y=g(x)$라 할 때,
> $x<a$이면 $f(x)>g(x)$이고, $x>a$이면
> $f(x)<g(x)$이다.

곡선 $y=f(x)$와 접선 $y=g(x)$ 및 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이는 $k-e^2$이다. k의 값을 구하시오.

[출처] 2015 모의_공공 교육청 고3 10월 29

10. 좌표평면에 함수 $f(x)=\sqrt{3}\ln x$의 그래프와 직선 $l : y=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}x+\dfrac{\sqrt{3}}{2}$이 있다. 곡선 $y=f(x)$ 위의 서로 다른 두 점 $\mathrm{A}(\alpha, f(\alpha))$, $\mathrm{B}(\beta, f(\beta))$에서의 접선을 각각 m, n이라 하자. 세 직선 l, m, n으로 둘러싸인 삼각형이 정삼각형일 때, $6(\alpha+\beta)$의 값을 구하시오.



[출처] 2015 모의_공공 교육청 고3 04월 21

11. 함수 $f(x)=\begin{cases} (x-2)^2e^x+k & (x \geq 0) \\ -x^2 & (x<0) \end{cases}$에 대하여 함수 $g(x)=|f(x)|-f(x)$가 다음 조건을 만족하도록 하는 정수 k의 개수는?

> (가) 함수 $g(x)$는 모든 실수에서 연속이다.
>
> (나) 함수 $g(x)$는 미분가능하지 않은 점이 2개다.

① 3 ② 4 ③ 5
④ 6 ⑤ 7

[출처] 2015 모의_공공 평가원 고3 06월 30

12. 정의역이 $\{x \mid 0 \leq x \leq 8\}$이고 다음 조건을 만족시키는 모든 연속함수 $f(x)$에 대하여 $\int_0^8 f(x)dx$의 최댓값은 $p+\dfrac{q}{\ln 2}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.
(단, p, q는 자연수이고, $\ln 2$는 무리수이다.)

> (가) $f(0)=1$이고 $f(8) \leq 100$이다.
>
> (나) $0 \leq k \leq 7$인 각각의 정수 k에 대하여
> $f(k+t)=f(k)\,(0<t \leq 1)$
> 또는
> $f(k+t)=2^t \times f(k)\,(0<t \leq 1)$
> 이다.
>
> (다) 열린 구간 $(0, 8)$에서 함수 $f(x)$가 미분가능하지 않은 점의 개수는 2이다.

[출처] 2015 모의_공공 교육청 고3 10월 21

13. 함수 $f(x)=\sin\pi x$ 와 이차함수 $g(x)=x(x+1)$ 에 대하여 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $h(x)$ 를

$$h(x)=\int_{g(x)}^{g(x+1)} f(t)dt$$

라 할 때, 닫힌 구간 $[-1, 1]$ 에서 방정식 $h(x)=0$ 의 서로 다른 실근의 개수는?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

[출처] 2016 모의_공공 평가원 고3 09월 30

14. 최고차항의 계수가 1 인 사차함수 $f(x)$ 와 함수

$$g(x)=|2\sin(x+2|x|)+1|$$

에 대하여 함수 $h(x)=f(g(x))$ 는 실수 전체의 집합에서 이계도함수 $h''(x)$ 를 갖고, $h''(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 연속이다. $f'(3)$ 의 값을 구하시오.

[출처] 2016 모의_공공 평가원 고3 06월 21

[출처] 2017 일반_시중교재 EBS한국교육방송공사 EBS교육방송 편집부 수능완성 03 미분법 유형9 필수유형

[출처] 2020 일반_시중교재 EBS한국교육방송공사 EBS교육방송 편집부 수능완성 05 미분법 유형12 필수유형

[출처] 2021 일반_시중교재 메가스터디 장영진 BTK Inside KICE

15. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(x)\neq 1$

(나) $f(x)+f(-x)=0$

(다) $f'(x)=\{1+f(x)\}\{1+f(-x)\}$

<보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. 모든 실수 x 에 대하여 $f(x)\neq -1$ 이다.

ㄴ. 함수 $f(x)$ 는 어떤 열린 구간에서 감소한다.

ㄷ. 곡선 $y=f(x)$ 는 세 개의 변곡점을 갖는다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[출처] 2016 모의_공공 평가원 고3 11월 30

16. $x > a$에서 정의된 함수 $f(x)$와 최고차항의 계수가 -1인 사차함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.
(단, a는 상수이다.)

> (가) $x > a$인 모든 실수 x에 대하여 $(x-a)f(x)=g(x)$이다.
>
> (나) 서로 다른 두 실수 α, β에 대하여 함수 $f(x)$는 $x=\alpha$와 $x=\beta$에서 동일한 극댓값 M을 갖는다. (단, $M>0$)
>
> (다) 함수 $f(x)$가 극대 또는 극소가 되는 x의 개수는 함수 $g(x)$가 극대 또는 극소가 되는 x의 개수보다 많다.

$\beta-\alpha=6\sqrt{3}$일 때, M의 최솟값을 구하시오.

[출처] 2016 모의_공공 교육청 고3 03월 30

17. 함수 $f(x)=x^2e^{ax}\,(a<0)$에 대하여 부등식 $f(x)\ge t\,(t>0)$을 만족시키는 x의 최댓값을 $g(t)$라 정의하자. 함수 $g(t)$가 $t=\dfrac{16}{e^2}$에서 불연속일 때, $100a^2$의 값을 구하시오. (단, $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$)

[출처] 2016 모의_공공 평가원 고3 09월 21

18. 양의 실수 전체의 집합에서 미분가능한 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$가 모든 양의 실수 x에 대하여 다음 조건을 만족한다.

> (가) $\left(\dfrac{f(x)}{x}\right)'=x^2e^{-x^2}$
>
> (나) $g(x)=\dfrac{4}{e^4}\displaystyle\int_1^x e^{t^2}f(t)dt$

$f(1)=\dfrac{1}{e}$일 때, $f(2)-g(2)$의 값은?

① $\dfrac{16}{3e^4}$ ② $\dfrac{6}{e^4}$ ③ $\dfrac{20}{3e^4}$
④ $\dfrac{22}{3e^4}$ ⑤ $\dfrac{8}{e^4}$

[출처] 2016 모의_공공 교육청 고3 07월 30

19. $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ 인 θ에 대하여 좌표평면 위의 두 직선 l, m은 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 두 직선 l, m은 서로 평행하고 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기는 각각 θ이다.

(나) 두 직선 l, m은 곡선 $y=\sqrt{2-x^2}\,(-1 \le x \le 1)$과 각각 만난다.

두 직선 l과 m 사이의 거리의 최댓값을 $f(\theta)$라 할 때, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\theta)d\theta = a+b\sqrt{2}\pi$이다. $20(a+b)$의 값을 구하시오.
(단, a와 b는 유리수이다.)

[출처] 2016 모의_공공 평가원 고3 06월 30

20. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 상수 $a\,(0<a<2\pi)$와 모든 실수 x에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(x)=f(-x)$

(나) $\int_x^{x+a} f(t)dt = \sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$

닫힌 구간 $\left[0, \frac{a}{2}\right]$에서 두 실수 b, c에 대하여 $f(x)=b\cos(3x)+c\cos(5x)$일 때 $abc=-\frac{q}{p}\pi$이다. $p+q$의 값을 구하시오.
(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

[출처] 2016 모의_공공 평가원 고3 06월 29

[출처] 2017 일반_시중교재 EBS한국교육방송공사 EBS교육방송 편집부 수능완성 09 평면벡터 유형10 필수유형

[출처] 2018 일반_시중교재 EBS한국교육방송공사 EBS교육방송 편집부 수능완성 09 평면벡터 유형10 필수유형

[출처] 2019 일반_시중교재 EBS한국교육방송공사 EBS교육방송 편집부 수능완성 09 평면벡터 유형10 필수유형

[출처] 2022 일반_시중교재 좋은책신사고 홍범준,김의석,김형정,김형균,신사고수학콘텐츠연구회 쎈

21. 양의 실수 전체의 집합에서 이계도함수를 갖는 함수 $f(t)$에 대하여 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 t $(t \geq 1)$에서의 위치 (x, y)가

$$x = 2\ln t,\ y = f(t)$$

이다. 점 P가 점 $(0, f(1))$로부터 움직인 거리가 s가 될 때 시각 t는 $t = \dfrac{s + \sqrt{s^2+4}}{2}$ 이고, $t=2$일 때 점 P의 속도는 $\left(1, \dfrac{3}{4}\right)$이다. 시각 $t=2$일 때 점 P의 가속도를 $\left(-\dfrac{1}{2}, a\right)$라 할 때, $60a$의 값을 구하시오.

[출처] 2017 모의_공공 평가원 고3 11월 30

22. 이차함수 $f(x) = \dfrac{3x - x^2}{2}$에 대하여 구간 $[0, \infty)$에서 정의된 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $0 \leq x < 1$일 때, $g(x) = f(x)$이다.
>
> (나) $n \leq x < n+1$일 때,
>
> $g(x) = \dfrac{1}{2^n}\{f(x-n) - (x-n)\} + x$이다.
>
> (단, n은 자연수이다.)

어떤 자연수 $k(k \geq 6)$에 대하여 함수 $h(x)$는

$$h(x) = \begin{cases} g(x) & (0 \leq x < 5 \text{ 또는 } x \geq k) \\ 2x - g(x) & (5 \leq x < k) \end{cases}$$

이다. 수열 $\{a_n\}$을 $a_n = \displaystyle\int_0^n h(x)dx$라 할 때, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(2a_n - n^2\right) = \dfrac{241}{768}$이다. k의 값을 구하시오.

[출처] 2017 모의_공공 교육청 고2 06월 30

23. 실수 t에 대하여 정의역이 $\{x|8 \le x \le 10\}$인 함수

$$f(x)=x^2-18x+2|x-t|+80$$

의 최솟값을 $g(t)$라 하자. 함수

$$h(t)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\{g(t)\}^{2n}}$$

이라 할 때, 함수 $h(t)$가 $t=a$에서 불연속이 되는 모든 실수 a의 값의 합을 구하시오.

[출처] 2017 모의_공공 평가원 고3 11월 21

24. 양수 t에 대하여 구간 $[1,\ \infty)$에서 정의된 함수 $f(x)$가

$$f(x)=\begin{cases}\ln x & (1 \le x < e)\\ -t+\ln x & (x \ge e)\end{cases}$$

일 때, 다음 조건을 만족시키는 일차함수 $g(x)$ 중에서 직선 $y=g(x)$의 기울기의 최솟값을 $h(t)$라 하자.

1 이상의 모든 실수 x에 대하여 $(x-e)\{g(x)-f(x)\}\ge 0$이다.

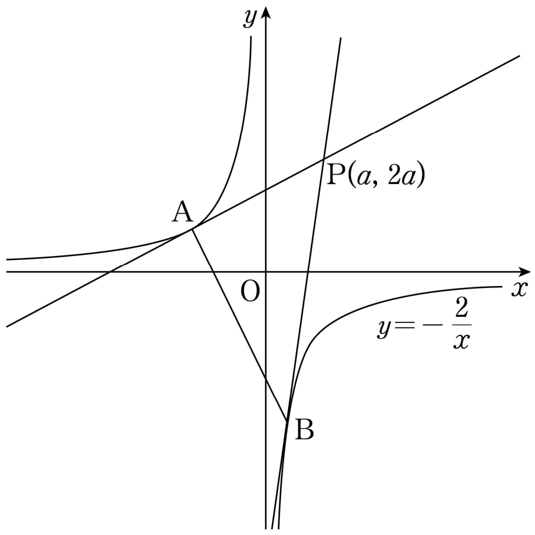
미분가능한 함수 $h(t)$에 대하여 양수 a가 $h(a)=\dfrac{1}{e+2}$을 만족시킨다. $h'\left(\dfrac{1}{2e}\right)\times h'(a)$의 값은?

① $\dfrac{1}{(e+1)^2}$ ② $\dfrac{1}{e(e+1)}$ ③ $\dfrac{1}{e^2}$

④ $\dfrac{1}{(e-1)(e+1)}$ ⑤ $\dfrac{1}{e(e-1)}$

[출처] 2017 모의_공공 교육청 고3 03월 30

25. 그림과 같이 제 1사분면에 있는 점 P(a, 2a)에서 곡선 $y=-\frac{2}{x}$에 그은 두 접선의 접점을 각각 A, B라 할 때, $\overline{\mathrm{PA}}^2+\overline{\mathrm{PB}}^2+\overline{\mathrm{AB}}^2$의 최솟값을 구하시오.



[출처] 2017 모의_공공 교육청 고3 04월 30

26. 최고차항의 계수가 1인 다항함수 $f(x)$와 함수

$$g(x)=x-\frac{f(x)}{f'(x)}$$

가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 방정식 $f(x)=0$의 실근은 0과 2뿐이고 허근은 존재하지 않는다.
>
> (나) $\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)^3}{f(x)}$이 존재한다.
>
> (다) 함수 $\left|\frac{g(x)}{x}\right|$는 $x=\frac{5}{4}$에서 연속이고 미분가능하지 않다.

함수 $g(x)$의 극솟값을 k라 할 때, $27k$의 값을 구하시오.

[출처] 2017 모의_공공 교육청 고3 07월 30

27. 상수항을 포함한 모든 항의 계수가 유리수인 이차함수 $f(x)$가 있다. 함수 $g(x)$가

$$g(x)=|f'(x)|e^{f(x)}$$

일 때, 함수 $g(x)$는 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 함수 $g(x)$는 $x=2$에서 극솟값을 갖는다.
>
> (나) 함수 $g(x)$의 최댓값은 $4\sqrt{e}$이다.
>
> (다) 방정식 $g(x)=4\sqrt{e}$의 근은 모두 유리수이다.

$|f(-1)|$의 값을 구하시오.

[출처] 2017 모의_공공 평가원 고3 09월 30

28. 함수 $f(x)=\ln(e^x+1)+2e^x$에 대하여 이차함수 $g(x)$와 실수 k는 다음 조건을 만족시킨다.

> 함수 $h(x)=|g(x)-f(x-k)|$는 $x=k$에서 최솟값 $g(k)$를 갖고, 닫힌 구간 $[k-1,\ k+1]$에서 최댓값 $2e+\ln\left(\dfrac{1+e}{\sqrt{2}}\right)$를 갖는다.

$g'\left(k-\dfrac{1}{2}\right)$의 값을 구하시오. (단, $\dfrac{5}{2}<e<3$이다.)

[출처] 2017 모의_공공 사관학교 고3 07월 28

29. 함수 $f(x)=(x^3-a)e^x$과 실수 t에 대하여 방정식 $f(x)=t$의 실근의 개수를 $g(t)$라 하자. 함수 $g(t)$가 불연속인 점의 개수가 2가 되도록 하는 10 이하의 모든 자연수 a의 값의 합을 구하시오. (단, $\lim_{x\to-\infty} f(x)=0$)

[출처] 2017 모의_공공 교육청 고3 03월 21

30. 구간 $[0, 1]$에서 정의된 연속함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$F(x)=\int_0^x f(t)dt\,(0 \le x \le 1)$$

은 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $F(x)=f(x)-x$

(나) $\int_0^1 F(x)dx = e-\frac{5}{2}$

<보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. $F(1)=e$

ㄴ. $\int_0^1 xF(x)dx=\frac{1}{6}$

ㄷ. $\int_0^1 \{F(x)\}^2 dx = \frac{1}{2}e^2-2e+\frac{11}{6}$

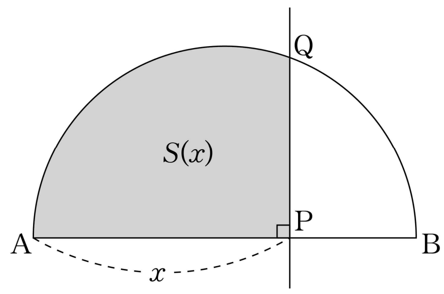
① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[출처] 2017 모의_공공 교육청 고3 10월 30

31. 그림과 같이 길이가 2인 선분 AB 위의 점 P를 지나고 선분 AB에 수직인 직선이 선분 AB를 지름으로 하는 반원과 만나는 점을 Q라 하자. $\overline{\mathrm{AP}}=x$라 할 때, $S(x)$를 다음과 같이 정의한다. $0<x<2$일 때 $S(x)$는 두 선분 AP, PQ와 호 AQ로 둘러싸인 도형의 넓이이고, $x=2$일 때 $S(x)$는 선분 AB를 지름으로 하는 반원의 넓이이다.

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi} \{S(1+\sin\theta)-S(1+\cos\theta)\}d\theta = p+q\pi^2$$

일 때, $\frac{30p}{q}$의 값을 구하시오.
(단, p와 q는 유리수이다.)



[출처] 2017 모의_공공 평가원 고3 11월 30

32. 실수 t에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=\begin{cases} 1-|x-t| & (|x-t|\le 1) \\ 0 & (|x-t|>1) \end{cases}$$

이라 할 때, 어떤 홀수 k에 대하여 함수

$$g(t)=\int_k^{k+8} f(x)\cos(\pi x)dx$$

가 다음 조건을 만족시킨다.

> 함수 $g(t)$가 $t=\alpha$에서 극소이고 $g(\alpha)<0$인 모든 α를 작은 수부터 크기순으로 나열한 것을 $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_m$ (m은 자연수)라 할 때, $\sum_{i=1}^{m}\alpha_i=45$이다.

$k-\pi^2\sum_{i=1}^{m} g(\alpha_i)$의 값을 구하시오.

[출처] 2017 모의_공공 평가원 고3 06월 30

33. 실수 a와 함수 $f(x)=\ln(x^4+1)-c$ ($c>0$인 상수)에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\int_a^x f(t)dt$$

라 하자. 함수 $y=g(x)$의 그래프가 x축과 만나는 서로 다른 점의 개수가 2가 되도록 하는 모든 a의 값을 작은 수부터 크기순으로 나열하면

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_m \ (m\text{은 자연수})$$

이다. $a=\alpha_1$일 때, 함수 $g(x)$와 상수 k는 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 함수 $g(x)$는 $x=1$에서 극솟값을 갖는다.
>
> (나) $\int_{\alpha_1}^{\alpha_m} g(x)dx=k\alpha_m\int_0^1 |f(x)|dx$

$mk\times e^c$의 값을 구하시오.

[출처] 2017 모의_공공 평가원 고3 09월 21

34. 수열 $\{a_n\}$이

$$a_1 = -1,\ a_n = 2 - \frac{1}{2^{n-2}}\ (n \ge 2)$$

이다. 구간 $[-1, 2)$에서 정의된 함수 $f(x)$가 모든 자연수 n에 대하여

$$f(x) = \sin(2^n \pi x)\ (a_n \le x \le a_{n+1})$$

이다. $-1 < \alpha < 0$인 실수 α에 대하여 $\int_{\alpha}^{t} f(x)dx = 0$을 만족시키는 $t\ (0 < t < 2)$의 값의 개수가 103일 때, $\log_2(1 - \cos(2\pi\alpha))$의 값은?

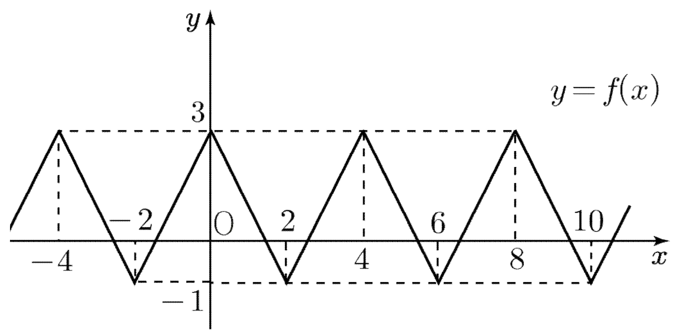
① -48 ② -50 ③ -52

④ -54 ⑤ -56

[출처] 2018 모의_공공 교육청 고2 11월 30

35. 그림은 다음 조건을 만족시키는 함수 $y = f(x)$의 그래프의 일부이다.

> (가) $0 \le x < 4$일 때, $f(x) = 2|x-2| - 1$이다.
>
> (나) 모든 실수 x에 대하여 $f(x+4) = f(x)$이다.



함수

$$g(x) = \lim_{n \to \infty} \frac{\{f(x)\}^{2n+1} - 1}{\{f(x)\}^{2n} + 1}$$

이라 할 때, 자연수 m에 대하여 방정식 $mg(x) = x + m$의 실근의 개수를 a_m이라 하자. $\sum_{m=1}^{21} a_m$의 값을 구하시오.

[출처] 2018 모의_공공 교육청 고2 06월 21

36. 함수 $f(x)=\dfrac{x-1}{2x-6}$ 과 3 이상의 자연수 k에 대하여

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|f(3-a)|^{n+1}}{2^n+|1-f(3+a)|^n}=k$$

를 만족시키는 모든 실수 a의 값의 합을 $g(k)$라 하자.

$\sum_{k=3}^{17} g(k)$의 값은?

① $-\dfrac{2}{7}$ ② $-\dfrac{12}{35}$ ③ $-\dfrac{2}{5}$

④ $-\dfrac{16}{35}$ ⑤ $-\dfrac{18}{35}$

[출처] 2018 모의_공공 교육청 고3 10월 21

[출처] 2019 모의_공공 교육청 고3 10월 21

37. 정수 n에 대하여 점 $(a,\ 0)$에서 곡선 $y=(x-n)e^x$에 그은 접선의 개수를 $f(n)$이라 하자. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. $a=0$일 때, $f(4)=1$이다.

ㄴ. $f(n)=1$인 정수 n의 개수가 1인 정수 a가 존재한다.

ㄷ. $\sum_{n=1}^{5} f(n)=5$를 만족시키는 정수 a의 값은 -1 또는 3이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ

④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[출처] 2018 모의_공공 평가원 고3 11월 30

38. 최고차항의 계수가 6π인 삼차함수 $f(x)$에 대하여

함수 $g(x)=\dfrac{1}{2+\sin(f(x))}$이 $x=\alpha$에서 극대 또는 극소이고 $\alpha\ge 0$인 모든 α를 작은 수부터 크기순으로 나열한 것을 α_1, α_2, α_3, α_4, α_5, $\cdots$ 라 할 때, $g(x)$는 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $\alpha_1=0$이고 $g(\alpha_1)=\dfrac{2}{5}$이다.
>
> (나) $\dfrac{1}{g(\alpha_5)}=\dfrac{1}{g(\alpha_2)}+\dfrac{1}{2}$

$g'\left(-\dfrac{1}{2}\right)=a\pi$라 할 때, a^2의 값을 구하시오.

(단, $0<f(0)<\dfrac{\pi}{2}$)

[출처] 2018 모의_공공 평가원 고3 09월 30

39. 최고차항의 계수가 $\dfrac{1}{2}$이고 최솟값이 0인 사차함수 $f(x)$와 함수 $g(x)=2x^4e^{-x}$에 대하여 합성함수 $h(x)=(f\circ g)(x)$가 다음 조건을 만족한다.

> (가) 방정식 $h(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 4이다.
>
> (나) 함수 $h(x)$는 $x=0$에서 극소이다.
>
> (다) 방정식 $h(x)=8$의 서로 다른 실근의 개수는 6이다.

$f'(5)$의 값을 구하시오. (단, $\lim\limits_{x\to\infty}g(x)=0$)

[출처] 2018 모의_공공 사관학교 고3 07월 21

40. 함수 $f(x)=|x^2-x|e^{4-x}$이 있다. 양수 k에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (f(x)\le kx) \\ kx & (f(x)>kx) \end{cases}$$

라 하자. 구간 $(-\infty, \infty)$에서 함수 $g(x)$가 미분가능하지 않은 x의 개수를 $h(k)$라 할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. $k=2$일 때, $g(2)=4$이다.

ㄴ. 함수 $h(k)$의 최댓값은 4이다.

ㄷ. $h(k)=2$를 만족시키는 k의 값의 범위는 $e^2\le k<e^4$이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[출처] 2018 모의_공공 교육청 고3 04월 21

41. $\frac{3}{5}<x<4$에서 정의된 미분가능한 함수 $f(x)$가 $f(1)=2$이고

$$f'(x)=\frac{1-x^2\{f(x)\}^3}{x^3\{f(x)\}^2}$$

을 만족시킨다. 함수 $f(x)$의 역함수 $g(x)$가 존재하고 미분가능 할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. $g'(2)=-\frac{4}{7}$

ㄴ. $g(x)=\frac{1}{3}x^3\{g(x)\}^3-\frac{5}{3}$

ㄷ. $2<g(1)<\frac{5}{2}$

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[출처] 2018 모의_공공 평가원 고3 06월 30

42. 실수 전체의 집합에서 미분 가능한 함수 $f(x)$에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t,\ f(t))$에서의 접선의 y절편을 $g(t)$라 하자. 모든 실수 t에 대하여

$$(1+t^2)\{g(t+1)-g(t)\}=2t$$

이고, $\int_0^1 f(x)dx=-\frac{\ln 10}{4}$, $f(1)=4+\frac{\ln 17}{8}$일 때, $2\{f(4)+f(-4)\}-\int_{-4}^{4} f(x)dx$의 값을 구하시오.

[출처] 2018 모의_공공 교육청 고3 04월 30

43. 함수 $f(x)=e^x(ax^3+bx^2)$과 양의 실수 t에 대하여 닫힌 구간 $[-t,\ t]$에서 함수 $f(x)$의 최댓값을 $M(t)$, 최솟값을 $m(t)$라 할 때, 두 함수 $M(t)$, $m(t)$는 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 모든 양의 실수 t에 대하여 $M(t)=f(t)$이다.
>
> (나) 양수 k에 대하여 닫힌 구간 $[k,\ k+2]$에 있는 임의의 실수 t에 대해서만 $m(t)=f(-t)$가 성립한다.
>
> (다) $\int_1^5 \{e^t \times m(t)\}dt=\frac{7}{3}-8e$

$f(k+1)=\frac{q}{p}e^{k+1}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오.
(단, a와 b는 0이 아닌 상수, p와 q는 서로소인 자연수이고, $\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{e^x}=0$이다.)

[출처] 2018 모의_공공 평가원 고3 09월 21

44. 0이 아닌 세 정수 l, m, n이 $|l|+|m|+|n| \le 10$을 만족시킨다. $0 \le x \le \frac{3}{2}\pi$에서 정의된 연속함수 $f(x)$가 $f(0)=0$, $f\left(\frac{3}{2}\pi\right)=1$이고

$$f'(x)=\begin{cases} l\cos x & \left(0<x<\frac{\pi}{2}\right) \\ m\cos x & \left(\frac{\pi}{2}<x<\pi\right) \\ n\cos x & \left(\pi<x<\frac{3}{2}\pi\right) \end{cases}$$

를 만족시킬 때, $\int_0^{\frac{3}{2}\pi} f(x)dx$의 값이 최대가 되도록 하는 l, m, n에 대하여 $l+2m+3n$의 값은?

① 12 ② 13 ③ 14
④ 15 ⑤ 16

[출처] 2018 모의_공공 교육청 고3 10월 30

[출처] 2019 모의_공공 교육청 고3 10월 30

45. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 모든 실수 x에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $g(x+1)-g(x)=-\pi(e+1)e^x\sin(\pi x)$

(나) $g(x+1)=\int_0^x \{f(t+1)e^t-f(t)e^t+g(t)\}dt$

$\int_0^1 f(x)dx=\frac{10}{9}e+4$일 때, $\int_1^{10} f(x)dx$의 값을 구하시오.

[출처] 2018 모의_공공 교육청 고3 03월 30

46. 함수

$$f(x)=\begin{cases} e^x & (0 \le x < 1) \\ e^{2-x} & (1 \le x \le 2) \end{cases}$$

에 대하여 열린구간 $(0, 2)$에서 정의된 함수

$$g(x)=\int_0^x |f(x)-f(t)|dt$$

의 극댓값과 극솟값의 차는 $ae+b\sqrt[3]{e^2}$이다. $(ab)^2$의 값을 구하시오. (단, a, b는 유리수이다.)

[출처] 2018 모의_공공 교육청 고3 07월 30

47. $ab<0$인 상수 a, b에 대하여 함수 $f(x)$는

$f(x)=(ax+b)e^{-\frac{x}{2}}$ 이고 함수 $g(x)$는 $g(x)=\int_0^x f(t)dt$ 이다.

실수 $k(k>0)$에 대하여 부등식

$$g(x)-k \geq xf(x)$$

를 만족시키는 양의 실수 x가 존재할 때, 이 x의 값 중 최솟값을 $h(k)$라 하자. 함수 $g(x)$와 $h(k)$는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $g(x)$는 극댓값 α를 갖고 $h(\alpha)=2$이다.

(나) $h(k)$의 값이 존재하는 k의 최댓값은 $8e^{-2}$이다.

$100(a^2+b^2)$의 값을 구하시오. (단, $\lim_{x\to\infty} f(x)=0$)

[출처] 2018 모의_공공 사관학교 고3 07월 30

48. 함수 $f(x)=\frac{x}{e^x}$에 대하여 구간 $\left[\frac{12}{e^{12}}, \infty\right)$에서 정의된 함수

$$g(t)=\int_0^{12} |f(x)-t|dx$$

가 $t=k$에서 극솟값을 갖는다. 방정식 $f(x)=k$의 실근의 최솟값을 a라 할 때, $g'(1)+\ln\left(\frac{6}{a}+1\right)$의 값을 구하시오.

[출처] 2019 모의_공공 교육청 고3 04월 21

49. 함수

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{x-1}{k}\right)^{2n}-1}{\left(\frac{x-1}{k}\right)^{2n}+1} \quad (k>0)$$

에 대하여 함수 $g(x)=\begin{cases}(f\circ f)(x) & (x=k)\\ (x-k)^2 & (x\neq k)\end{cases}$가 실수 전체의 집합에서 연속이다. 상수 k에 대하여 $(g\circ f)(k)$의 값은?

① 1 ② 3 ③ 5

④ 7 ⑤ 9

[출처] 2019 모의_공공 교육청 고3 07월 21

50. $0<t<1$인 실수 t에 대하여 직선 $y=t$와 함수 $f(x)=\sin x\left(0<x<\frac{\pi}{2}\right)$의 그래프가 만나는 점을 P라 할 때, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 P에서 그은 접선의 x절편을 $g(t)$라 하자. $g'\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$의 값은?

① -28 ② -24 ③ -20

④ -16 ⑤ -12

[출처] 2019 모의_공공 교육청 고3 04월 21

51. 자연수 n에 대하여 열린구간 $(3n-3,\ 3n)$에서 함수

$$f(x)=(2x-3n)\sin 2x-(2x^2-6nx+4n^2-1)\cos 2x$$

가 $x=\alpha$에서 극대 또는 극소가 되는 모든 α의 값의 합을 a_n이라 하자. $\cos a_m=0$이 되도록 하는 자연수 m의 최솟값을 l이라 할 때, $\sum_{k=1}^{l+2} a_k$의 값은?

① $7+\frac{45}{2}\pi$ ② $8+\frac{45}{2}\pi$ ③ $7+\frac{47}{2}\pi$

④ $8+\frac{47}{2}\pi$ ⑤ $7+\frac{49}{2}\pi$

[출처] 2019 모의_공공 교육청 고3 03월 30

52. 다음 조건을 만족시키며 최고차항의 계수가 1인 모든 사차함수 $f(x)$에 대하여 $f(0)$의 최댓값과 최솟값의 합을 구하시오. $\left(\text{단, } \lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^x}=0\right)$

> (가) $f(1)=0,\ f'(1)=0$
>
> (나) 방정식 $f(x)=0$의 모든 실근은 10 이하의 자연수이다.
>
> (다) 함수 $g(x)=\frac{3x}{e^{x-1}}+k$에 대하여 함수 $|(f\circ g)(x)|$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하도록 하는 자연수 k의 개수는 4이다.

[출처] 2019 모의_공공 교육청 고3 04월 30

53. 삼차함수 $f(x)=x^3+ax^2+bx$(a, b는 정수)에 대하여 함수 $g(x)=e^{f(x)}-f(x)$는

$$x=\alpha,\ x=-1,\ x=\beta\ (\alpha<-1<\beta)$$

에서만 극값을 갖는다. 함수 $y=|g(x)-g(\alpha)|$가 미분가능하지 않은 점의 개수가 2일 때, $\{f(-1)\}^2$의 최댓값을 구하시오.

[출처] 2019 모의_공공 교육청 고3 07월 30

54. $x=a(a>0)$에서 극댓값을 갖는 사차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$가

$$g(x)=\begin{cases} \dfrac{1-\cos\pi x}{f(x)} & (f(x)\neq 0) \\ \dfrac{7}{128}\pi^2 & (f(x)=0) \end{cases}$$

일 때, 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하고 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $g'(0)\times g'(2a)\neq 0$

(나) 함수 $g(x)$는 $x=a$에서 극값을 갖는다.

$g(1)=\dfrac{2}{7}$일 때, $g(-1)=\dfrac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

[출처] 2019 모의_공공 사관학교 고3 07월 21

55. 두 함수

$$f(x)=4\sin\frac{\pi}{6}x,\ g(x)=|2\cos kx+1|$$

이 있다 $0<x<2\pi$에서 정의된 함수

$$h(x)=(f\circ g)(x)$$

에 대하여 <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, k는 자연수이다.)

<보 기>

ㄱ. $k=1$일 때, 함수 $h(x)$는 $x=\dfrac{2}{3}\pi$에서 미분가능하지 않다.

ㄴ. $k=2$일 때, 방정식 $h(x)=2$의 서로 다른 실근의 개수는 6이다.

ㄷ. 함수 $|h(x)-k|$가 $x=\alpha(0<\alpha<2\pi)$에서 미분가능하지 않은 실수 α의 개수를 a_k라 할 때, $\sum_{k=1}^{4}a_k=34$이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[출처] 2019 모의_공공 평가원 고3 11월 30

56. 양의 실수 t에 대하여 곡선 $y=t^3\ln(x-t)$가 곡선 $y=2e^{x-a}$와 오직 한 점에서 만나도록 하는 실수 a의 값을 $f(t)$라 하자. $\left\{f'\left(\frac{1}{3}\right)\right\}^2$의 값을 구하시오.

[출처] 2019 모의_공공 평가원 고3 09월 30

57. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$f'(x^2+x+1)=\pi f(1)\sin\pi x+f(3)x+5x^2$$

을 만족시킬 때, $f(7)$의 값을 구하시오.

[출처] 2019 모의_공공 평가원 고3 06월 30

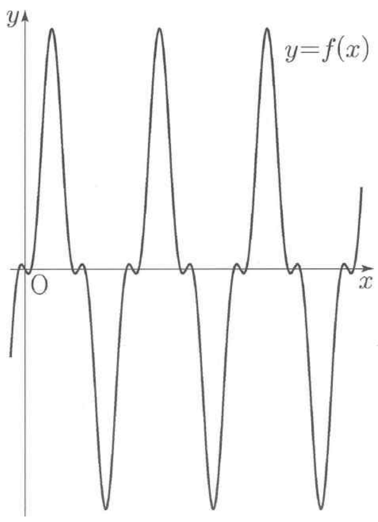
58. 상수 a, b에 대하여 함수 $f(x)=a\sin^3x+b\sin x$가

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=3\sqrt{2},\ f\left(\frac{\pi}{3}\right)=5\sqrt{3}$$

을 만족시킨다. 실수 t $(1<t<14)$에 대하여 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=t$가 만나는 점의 x좌표 중 양수인 것을 작은 수부터 크기순으로 모두 나열할 때, n번째 수를 x_n이라 하고

$$c_n=\int_{3\sqrt{2}}^{5\sqrt{3}}\frac{t}{f'(x_n)}dt$$

라 하자. $\sum_{n=1}^{101}c_n=p+q\sqrt{2}$일 때, $q-p$의 값을 구하시오.
(단, p와 q는 유리수이다.)



[출처] 2019 모의_공공 교육청 고3 03월 21

59. 함수 $f(x)$의 도함수가 $f'(x)=xe^{-x^2}$이다. 모든 실수 x에 대하여 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

> (가) $g(x)=\int_1^x f'(t)(x+1-t)dt$
>
> (나) $f(x)=g'(x)-f'(x)$

<보 기>

> ㄱ. $g'(1)=\dfrac{1}{e}$
>
> ㄴ. $f(1)=g(1)$
>
> ㄷ. 어떤 양수 x에 대하여 $g(x)<f(x)$이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[출처] 2019 모의_공공 사관학교 고3 07월 30

60. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$g(x)=\int_0^x \frac{f(t)}{|t|+1}dt$$

가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $g'(2)=0$
>
> (나) 모든 실수 x에 대하여 $g(x)\ge 0$이다.

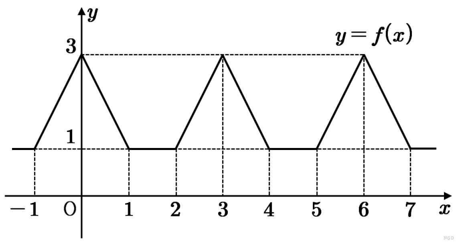
$g'(-1)$의 값이 최대가 되도록 하는 함수 $f(x)$에 대하여 $f(-1)=\dfrac{n}{m-3\ln 3}$일 때, $|m\times n|$의 값을 구하시오.
(단, m, n은 정수이고, $\ln 3$은 $1<\ln 3<1.1$인 무리수이다.)

[출처] 2020 모의_공공 평가원 고3 06월 30

61. 실수전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$는 $0 \le x < 3$일 때 $f(x) = |x-1| + |x-2|$이고, 모든 실수 x에 대하여 $f(x+3) = f(x)$를 만족시킨다. 함수 $g(x)$를

$$g(x) = \lim_{h \to 0+} \left| \frac{f(2^{x+h}) - f(2^x)}{h} \right|$$

이라 하자. 함수 $g(x)$가 $x = a$에서 불연속인 a의 값 중에서 열린구간 $(-5,\ 5)$에 속하는 모든 값을 작은 수부터 크기순으로 나열한 것을 $a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n$ (n은 자연수)라 할 때, $n + \sum_{k=1}^{n} \frac{g(a_k)}{\ln 2}$의 값을 구하시오.



[출처] 2020 모의_공공 평가원 고3 11월 30

62. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $g(x) = f(\sin^2 \pi x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $0 < x < 1$에서 함수 $g(x)$가 극대가 되는 x의 개수가 3이고, 이때 극댓값이 모두 동일하다.
>
> (나) 함수 $g(x)$의 최댓값은 $\frac{1}{2}$이고 최솟값은 0이다.

$f(2) = a + b\sqrt{2}$일 때, $a^2 + b^2$의 값을 구하시오.

(단, a와 b는 유리수이다.)

[출처] 2020 모의_공공 사관학교 고3 07월 30

63. 두 함수

$$f(x)=x^2-ax+b\ (a>0),\ g(x)=x^2e^{-\frac{x}{2}}$$

에 대하여 상수 k와 함수 $h(x)=(f\circ g)(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $h(0)<h(4)$
>
> (나) 방정식 $|h(x)|=k$의 서로 다른 실근의 개수는 7이고, 그 중 가장 큰 실근을 α라 할 때 함수 $h(x)$는 $x=\alpha$에서 극소이다.

$f(1)=-\dfrac{7}{32}$일 때, 두 상수 a, b에 대하여 $a+16b$의 값을 구하시오. $\left(\text{단, } \dfrac{5}{2}<e<3\text{이고, } \lim\limits_{x\to\infty} g(x)=0\text{이다.}\right)$

[출처] 2020 모의_공공 평가원 고3 09월 30

64. 다음 조건을 만족시키는 실수 a, b에 대하여 ab의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 하자.

> 모든 실수 x에 대하여 부등식
>
> $$-e^{-x+1}\le ax+b\le e^{x-2}$$
>
> 이 성립한다.

$|M\times m^3|=\dfrac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오.

(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고3 07월 30

65. 함수 $f(x)=\sin\frac{\pi}{2}x$와 0이 아닌 두 실수 a, b에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=e^{af(x)}+bf(x)\ (0<x<12)$$

라 하자. 함수 $g(x)$가 $x=\alpha$에서 극대 또는 극소인 모든 α를 작은 수부터 크기순으로 나열한 것을 α_1, α_2, α_3, $\cdots$, α_m (m은 자연수)라 할 때, m 이하의 자연수 n에 대하여 α_n은 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) n이 홀수일 때, $\alpha_n=n$이다.
>
> (나) n이 짝수일 때, $g(\alpha_n)=0$이다.

함수 $g(x)$가 서로 다른 두 개의 극댓값을 갖고 그 합이 e^3+e^{-3}일 때, $m\pi\int_{\alpha_3}^{\alpha_4}g(x)\cos\frac{\pi}{2}x\,dx=pe^3+qe$이다. $p-q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 정수이다.)

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고3 10월 30

66. 최고차항의 계수가 k $(k>0)$인 이차함수 $f(x)$에 대하여 $f(0)=f(-2)$, $f(0)\neq 0$이다. 함수 $g(x)=(ax+b)e^{f(x)}\ (a<0)$이 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 모든 실수 x에 대하여
> $(x+1)\{g(x)-mx-m\}\leq 0$을 만족시키는 실수 m의 최솟값은 -2이다.
>
> (나) $\int_0^1 g(x)dx=\int_{-2f(0)}^{1}g(x)dx=\frac{e-e^4}{k}$

$f(ab)$의 값을 구하시오. (단, a, b는 상수이다.)

[출처] 2021 모의_공공 교육청 고3 04월 미적분 30

67. 함수 $f(x)$를

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{ax^{2n}+bx^{2n-1}+x}{x^{2n}+2}\ (a,\ b\text{는 양의 상수})$$

라 하자. 자연수 m에 대하여 방정식 $f(x)=2(x-1)+m$의 실근의 개수를 c_m이라 할 때, $c_k=5$인 자연수 k가 존재한다. $k+\sum_{m=1}^{\infty}(c_m-1)$의 값을 구하시오.

[출처] 2021 모의_공공 평가원 고3 06월 미적분 30

68. $t>\frac{1}{2}\ln 2$ 인 실수 t에 대하여 곡선

$y=\ln(1+e^{2x}-e^{-2t})$과 직선 $y=x+t$가 만나는 서로 다른 두 점 사이의 거리를 $f(t)$라 할 때, $f'(\ln 2)=\frac{q}{p}\sqrt{2}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

[출처] 2021 모의_공공 교육청 고3 10월 미적분 30

69. 서로 다른 두 양수 a, b에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=-\frac{ax^3+bx}{x^2+1}$$

라 하자. 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\neq 0$이고, 두 함수 $g(x)=f(x)-f^{-1}(x)$, $h(x)=(g\circ f)(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $g(2)=h(0)$
(나) $g'(2)=-5h'(2)$

$4(b-a)$의 값을 구하시오.

[출처] 2021 모의_공공 사관학교 고3 07월 미적분 30

70. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (0\leq x\leq 2) \\ \dfrac{f(x)}{x-1} & (x<0 \text{ 또는 } x>2) \end{cases}$$

가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이고, $g(2)\neq 0$이다.
(나) 함수 $g(x)$가 $x=a$에서 미분가능하지 않은 실수 a의 개수는 1이다.
(다) $g(k)=0$, $g'(k)=\frac{16}{3}$인 실수 k가 존재한다.

함수 $g(x)$의 극솟값이 p일 때, p^2의 값을 구하시오.

[출처] 2021 모의_공공 평가원 고3 예비 미적분 30

71. 두 양수 a, $b(b<1)$에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=\begin{cases} -x^2+ax & (x\le 0) \\ \dfrac{\ln(x+b)}{x} & (x>0) \end{cases}$$

이라 하자. 양수 m에 대하여 직선 $y=mx$와 함수 $y=f(x)$의 그래프가 만나는 서로 다른 점의 개수를 $g(m)$이라 할 때, 함수 $g(m)$은 다음 조건을 만족시킨다.

> $\lim\limits_{m\to\alpha-} g(m)-\lim\limits_{m\to\alpha+} g(m)=1$을 만족시키는 양수 α가 오직 하나 존재하고, 이 α에 대하여 점 $(b,\ f(b))$는 직선 $y=\alpha x$와 곡선 $y=f(x)$의 교점이다.

$ab^2=\dfrac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오.

(단, p와 q는 서로소인 자연수이고, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0$이다.)

[출처] 2021 모의_공공 평가원 고3 11월 30

72. 실수 전체의 집합에서 증가하고 미분가능한 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $f(1)=1$, $\displaystyle\int_1^2 f(x)\,dx=\frac{5}{4}$
>
> (나) 함수 $f(x)$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, $x\ge 1$인 모든 실수 x에 대하여 $g(2x)=2f(x)$이다.

$\displaystyle\int_1^8 xf'(x)\,dx=\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오.

(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

[출처] 2021 모의_공공 평가원 고3 09월 미적분 30

73. 최고차항의 계수가 9인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\lim_{x \to 0} \frac{\sin(\pi \times f(x))}{x} = 0$
(나) $f(x)$의 극댓값과 극솟값의 곱은 5이다.

함수 $g(x)$는 $0 \le x < 1$일 때 $g(x) = f(x)$이고 모든 실수 x에 대하여 $g(x+1) = g(x)$이다. $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, $\int_0^5 xg(x)dx = \frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.

(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

[출처] 2021 모의_공공 교육청 고3 07월 미적분 30

74. 두 자연수 a, b에 대하여 이차함수 $f(x) = ax^2 + b$가 있다. 함수 $g(x)$를

$$g(x) = \ln f(x) - \frac{1}{10}\{f(x) - 1\}$$

이라 하자. 실수 t에 대하여 직선 $y = |g(t)|$와 함수 $y = |g(x)|$의 그래프가 만나는 점의 개수를 $h(t)$라 하자. 두 함수 $g(x)$, $h(t)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $g(x)$는 $x = 0$에서 극솟값을 갖는다.
(나) 함수 $h(t)$가 $t = k$에서 불연속인 k의 값의 개수는 7이다.

$\int_0^a e^x f(x)dx = me^a - 19$일 때, 자연수 m의 값을 구하시오.

[출처] 2022 모의_공공 교육청 고3 04월 미적분 30

75. 함수 $f(x)=a\cos x+x\sin x+b$와

$-\pi<\alpha<0<\beta<\pi$인 두 실수 α, β가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f'(\alpha)=f'(\beta)=0$

(나) $\dfrac{\tan\beta-\tan\alpha}{\beta-\alpha}+\dfrac{1}{\beta}=0$

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x^2}=c$일 때, $f\left(\dfrac{\beta-\alpha}{3}\right)+c=p+q\pi$이다.
두 유리수 p, q에 대하여 $120\times(p+q)$의 값을 구하시오.
(단, a, b, c는 상수이고, $a<1$이다.)

[출처] 2022 모의_공공 교육청 고3 07월 미적분 30

76. 최고차항의 계수가 3보다 크고 실수 전체의 집합에서 최솟값이 양수인 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$가

$g(x)=e^x f(x)$

이다. 양수 k에 대하여 집합 $\{x\,|\,g(x)=k,\ x$는 실수$\}$의 모든 원소의 합을 $h(k)$라 할 때, 양의 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $h(k)$는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $h(k)$가 $k=t$에서 불연속인 t의 개수는 1이다.

(나) $\lim\limits_{k\to3e+}h(k)-\lim\limits_{k\to3e-}h(k)=2$

$g(-6)\times g(2)$의 값을 구하시오. (단, $\lim\limits_{x\to-\infty}x^2e^x=0$)

[출처] 2022 모의_공공 평가원 고3 11월 미적분 30

77. 최고차항의 계수가 양수인 삼차함수 $f(x)$와 함수 $g(x)=e^{\sin\pi x}-1$에 대하여 실수 전체의 집합에서 정의된 합성함수 $h(x)=g(f(x))$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $h(x)$는 $x=0$에서 극댓값 0을 갖는다.

(나) 열린구간 $(0,\ 3)$에서 방정식 $h(x)=1$의 서로 다른 실근의 개수는 7이다.

$f(3)=\dfrac{1}{2}$, $f'(3)=0$일 때, $f(2)=\dfrac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

[출처] 2022 모의_공공 평가원 고3 06월 미적분 30

78. 양수 a에 대하여 함수 $f(x)$는

$$f(x)=\frac{x^2-ax}{e^x}$$

이다. 실수 t에 대하여 x에 대한 방정식

$$f(x)=f'(t)(x-t)+f(t)$$

의 서로 다른 실근의 개수를 $g(t)$라 하자.

$g(5)+\lim\limits_{t\to5}g(t)=5$일 때, $\lim\limits_{t\to k-}g(t)\neq\lim\limits_{t\to k+}g(t)$를 만족시키는

모든 실수 k의 값의 합은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.

(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

[출처] 2022 모의_공공 사관학교 고3 07월 미적분 30

79. 최고차항의 계수가 -2인 이차함수 $f(x)$와 두 실수 $a\,(a>0)$, b에 대하여 함수

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x+1)}{x} & (x<0)\\ f(x)e^{x-a}+b & (x\ge0)\end{cases}$$

이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\lim\limits_{x\to0-}g(x)=2$이고 $g'(a)=-2$이다.

(나) $s<0\le t$이면 $\dfrac{g(t)-g(s)}{t-s}\le-2$이다.

$a-b$의 최솟값을 구하시오.

[출처] 2022 모의_공공 평가원 고3 09월 미적분 30

80. 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$와 구간 $(0, \infty)$에서 $g(x) \geq 0$인 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $x \leq -3$인 모든 실수 x에 대하여 $f(x) \geq f(-3)$이다.
> (나) $x > -3$인 모든 실수 x에 대하여
> $g(x+3)\{f(x)-f(0)\}^2 = f'(x)$이다.

$\int_4^5 g(x)dx = \frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오.
(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

[출처] 2022 모의_공공 교육청 고3 10월 미적분 30

81. 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$에 대하여 실수 전체의 집합에서 정의된 함수

$$g(x) = \ln\{f(x)+f'(x)+1\}$$

이 있다. 상수 a와 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 모든 실수 x에 대하여 $g(x) > 0$이고
> $$\int_{2a}^{3a+x} g(t)dt = \int_{3a-x}^{2a+2} g(t)dt$$
> 이다.
> (나) $g(4) = \ln 5$

$\int_3^5 \{f'(x)+2a\}g(x)dx = m + n\ln 2$일 때, $m+n$의 값을 구하시오. (단, m, n은 정수이고, $\ln 2$는 무리수이다.)

미적킬러 81제(빠른 정답)

프로젝트 2023.01.03

1. [정답] 50
2. [정답] 19
3. [정답] ⑤
4. [정답] ①
5. [정답] 72

6. [정답] 25
7. [정답] **39**
8. [정답] 25
9. [정답] 9
10. [정답] **32**

11. [정답] ①
12. [정답] 128
13. [정답] ⑤
14. [정답] **48**
15. [정답] ①

16. [정답] 216
17.[정답] 25
18. [정답] ③
19. [정답] 25
20. [정답] 83

21. [정답] **15**
22. [정답] 9
23. [정답] **27**
24. [정답] ④
25. [정답] 90

26. [정답] **50**
27. [정답] **71**
28. [정답] **6**
29. [정답] 49
30. [정답] ④

31. [정답] 80
32. [정답] 21
33. [정답] **16**
34. [정답] ②
35. [정답] **253**

36. [정답] ②
37. [정답] ③
38. [정답] 27
39. [정답] **30**
40. [정답] ②

41. [정답] ⑤
42. [정답] 16
43. [정답] 49
44. [정답] ⑤
45. [정답] **26**

46. [정답] 36
47. [정답] 125
48. [정답] 18
49. [정답] ⑤
50. [정답] ②

51. [정답] ①
52. [정답] **77**
53. [정답] **9**
54. [정답] **95**
55. [정답] ⑤

56. [정답] **64**

57. [정답] **93**
58. [정답] **12**
59. [정답] ②
60. [정답] 16

61. [정답] **331**
62. [정답] **29**
63. [정답] **6**
64. [정답] **43**
65. [정답] 48

66. [정답] **25**
67. [정답] 13
68. [정답] **11**
69. [정답] 10
70. [정답] **64**

71. [정답] 5

72. [정답] 143
73. [정답] 115
74. [정답] 586
75. [정답] 135

76. [정답] 129
77. [정답] 31
78. [정답] 16
79. [정답] 4
80. [정답] 283

81. [정답] 12

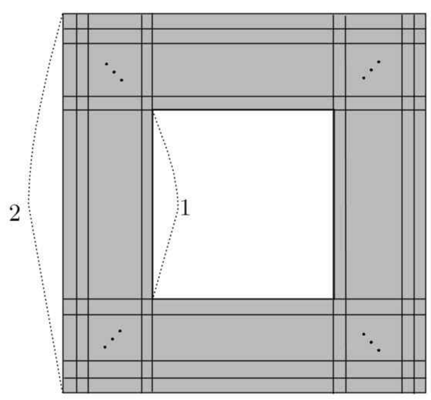
미적킬러 81제(해설)

프로젝트 2023.01.03

1) [정답] 50

[해설]

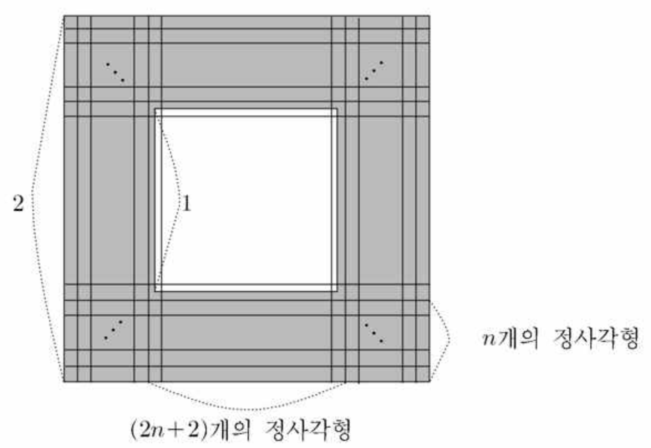
[가로 방향으로 $4n$개의 정사각형을 그린 경우]



[그림1]과 같이 한 변의 길이가 $\frac{1}{2n}$인 작은 정사각형을 어두운 부분에 넣는 경우 가로 방향과 세로 방향에 각각 최대 $4n$(개)의 정사각형이 들어가므로

$a_{2n}=(4n)^2-(2n)^2=12n^2$

[가로 방향으로 $(4n+2)$개의 정사각형을 그린 경우]



[그림2]와 같이 한 변의 길이가 $\frac{1}{2n+1}$인 작은 정사각형을 어두운 부분에 넣는 경우 가로 방향과 세로 방향에 각각 최대 $(4n+2)$(개)의 정사각형이 들어가므로

$a_{2n+1}=n\times(4n+2)\times2+(2n+2)\times n\times2$

$=2n(4n+2+2n+2)$

$=2n(6n+4)=4n(3n+2)$

따라서 $a_{2n+1}-a_{2n}=4n(3n+2)-12n^2=8n$이고

$a_{2n}-a_{2n-1}=12n^2-4(n-1)\{3(n-1)+2\}$

$=12n^2-4(n-1)(3n-1)$

$=12n^2-4(3n^2-4n+1)=16n-4$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{2n+1}-a_{2n}}{a_{2n}-a_{2n-1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{8n}{16n-4}=\frac{1}{2}=c$

따라서 $100c=100\times\frac{1}{2}=50$

[다른 풀이]

$a_{2n+1}=(4n+2)^2-(2n+2)^2$

$=(16n^2+16n+4)-(4n^2+8n+4)=12n^2+8n$이므로

$a_{2n+1}-a_{2n}=(12n^2+8n)-12n^2=8n$이고,

$a_{2n}-a_{2n-1}=12n^2-12(n-1)^2-8(n-1)$

$=12n^2-(12n^2-24n+12)-(8n-8)=16n-4$

2) [정답] 19

[해설]

$m=2$일 때, $f(2)=1+1=2$

$m=4$일 때, $f(4)=f(2)+3+1=6$

$m=8$일 때, $f(8)=f(4)+5+3+7+1=22$

$m=16$일 때,

$f(16)=f(8)+9+5+11+3+13+7+15+1=86$

$\vdots$

즉, 수열 $\{f(2^n)\}$을 나열해 보면 다음과 같다.

$2,\ 6,\ 22,\ 86,\ \cdots$

$4\ 16\ 64\ \cdots$

따라서 수열 $\{f(2^n)\}$은 첫째항이 2이고, 계차수열의 일반항이 4^n인 수열이므로 $f(2^n)=2+\sum_{k=1}^{n-1}4^k$

$=2+\frac{4(4^{n-1}-1)}{4-1}=\frac{4^n+2}{3}$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}\frac{f(2^{n+1})-f(2^n)}{f(2^{n+2})}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{4^{n+1}+2}{3}-\frac{4^n+2}{3}}{\frac{4^{n+2}+2}{3}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3\cdot4^n}{16\cdot4^n+2}$

$=\lim_{n\to\infty}\dfrac{3}{16+\dfrac{2}{4^n}}=\dfrac{3}{16}=\dfrac{q}{p}$

$\therefore\ p+q=16+3=19$

3) [정답] ⑤

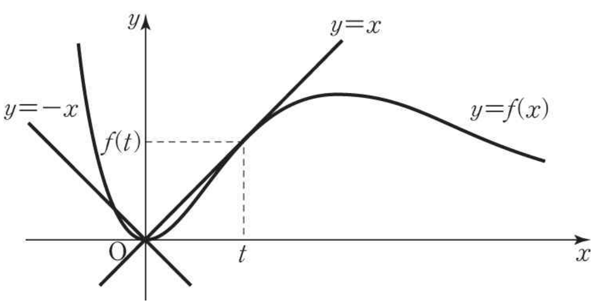
[해설]

$f(x)=kx^2e^{-x}$, $f'(x)=kx(2-x)e^{-x}$에서

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	0	↗	$\dfrac{4k}{e^2}$	↘

또한 $f(x)\geq 0$이므로 함수 $f(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



곡선 $y=f(x)$ 위의 임의의 점 $(t,\ f(t))$에 대하여 함수 $g(t)$는 x축까지의 거리와 y축까지의 거리 중 크지 않은 값이므로 $g(t)=\begin{cases}|t| & (|t|\leq f(t))\\ kt^2e^{-t} & (|t|>f(t))\end{cases}$

이다. 즉, 함수 $g(t)$는 $|x|=kx^2e^{-x}$인 점 즉, $x=kx^2e^{-x}$, $-x=kx^2e^{-x}$인 두 점에서 불연속이다. 그런데 한 점에서만 미분가능하지 않아야 하므로 $x>0$에서 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$가 만나지 않거나 접해야 한다. 그런데 k의 값이 커짐에 따라 극댓값 $\dfrac{4k}{e^2}$가 커지므로 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$가 접할 때 k의 값이 최대가 된다. 이때의 접점의 좌표를 $(t,\ f(t))$라 하면

$t=kt^2e^{-t}$, $1=kte^{-t}$ ……㉠

접점 $(t,\ f(t))$에서의 접선의 기울기가 1이므로

$f'(t)=kt(2-t)e^{-t}=1$ ……㉡

㉠, ㉡에서 $t=1$, $k=e$

따라서 구하는 k의 최댓값은 e이다.

4) [정답] ①

[해설]

$a_kb_{n-k+1}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{k-1}\cdot 2\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-k}$

$=2\left(\dfrac{1}{2}\right)^{k-1}\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-k+1}$

$=2\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}\left(\dfrac{3}{2}\right)^{k-1}$

$\therefore\ \sum_{k=1}^{n}a_kb_{n-k+1}=\sum_{k=1}^{n}2\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}\left(\dfrac{3}{2}\right)^{k-1}$

$=2\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}\cdot\sum_{k=1}^{n}\left(\dfrac{3}{2}\right)^{k-1}$

$=2\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}\cdot\dfrac{\left(\dfrac{3}{2}\right)^n-1}{\dfrac{3}{2}-1}$

$=4\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}\left\{\left(\dfrac{3}{2}\right)^n-1\right\}$

$=6\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}-4\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}$

$\therefore\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}a_kb_{n-k+1}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{6\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}-4\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}\right\}$

$=\dfrac{6}{1-\dfrac{1}{2}}-\dfrac{4}{1-\dfrac{1}{3}}$

$=6$

5) [정답] 72

[해설]

$g(x)=f(x)e^{-x}$, $g'(x)=f'(x)-f(x)e^{-x}$

$g''(x)=f''(x)-2f'(x)+f(x)e^{-x}$

$f(x)=ax^2+bx+c\ (a\neq 0)$로 놓으면

$g''(x)=ax^2+(b-4a)x+2a-2b+ce^{-x}$

조건 (가)에서 방정식 $g''(x)=0$의 두 근이 $x=1$, $x=4$를 두 근으로 갖는다. 근과 계수의 관계에서

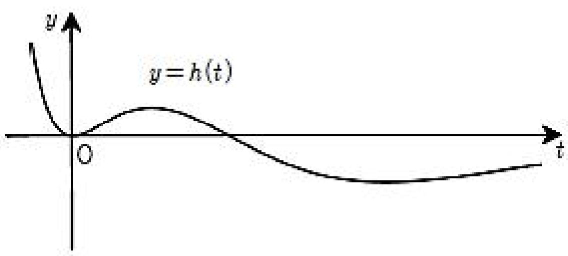
$\dfrac{4a-b}{a}=5$, $\dfrac{2a-2b+c}{a}=4$이므로 $b=-a$, $c=0$

즉, $f(x)=ax^2-ax$이고 $g(x)=(ax^2-ax)e^{-x}$

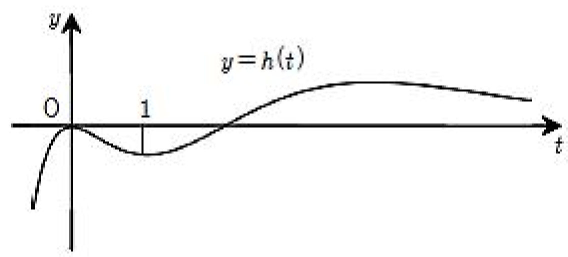
한편, 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $T(t,\ g(t))$에서 그은 접선의 방정식은 $y-g(t)=g'(t)(x-t)$ 이 접선이 점 $(0,\ k)$를 지나므로

$k-g(t)=g'(t)(0-t)$에서 $k=a(t^3-2t^2)e^{-t}$

$h(t)=a(t^3-2t^2)e^{-t}$로 놓으면 조건 (나)에 의하여 함수 $y=h(t)$의 그래프와 직선 $y=k$가 서로 다른 세 점에서 만나도록 하는 실수 k의 값의 범위가 $-1<k<0$이어야 한다. $a<0$인 경우 함수 $y=h(t)$의 그래프의 개형은 다음과 같고, 문제의 조건을 만족시키지 않는다.



$a>0$인 경우 함수 $y=h(t)$의 그래프의 개형은 다음과 같고, $h(1)=-1$이어야 한다.



$h(1)=-ae^{-1}=-1$에서 $a=e$

$\therefore g(-2)\times g(4)=f(-2)e^2\times f(4)e^{-4}=72a^2e^{-2}=72e^2e^{-2}=72$

6) [정답] 25

[해설]

점 Q_n은 직선 $y=\sqrt{3}x$ 위의 점이므로 $Q_n\left(\frac{1}{n},\ \frac{\sqrt{3}}{n}\right)$이다.

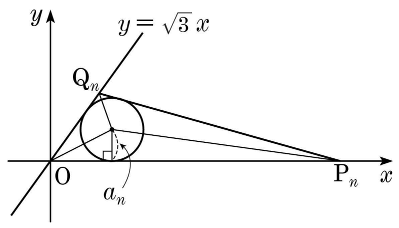
$\overline{OP_n}=p_n$, $\overline{OQ_n}=q_n$, $\overline{P_nQ_n}=r_n$이라 하면 $p_n=n$

$$q_n=\sqrt{\left(\frac{1}{n}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{n}\right)^2}=\frac{2}{n}$$

$$r_n=\sqrt{\left(n-\frac{1}{n}\right)^2+\left(0-\frac{\sqrt{3}}{n}\right)^2}=\frac{\sqrt{n^4-2n^2+4}}{n}$$

삼각형 OP_nQ_n의 넓이를 S_n이라 하면

$$S_n=\frac{1}{2}\times n\times\frac{\sqrt{3}}{n}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

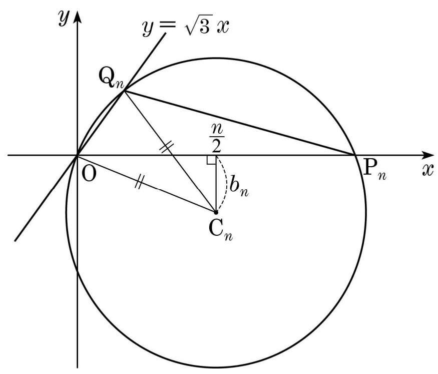


삼각형 OP_nQ_n의 내접원의 중심에서 x축까지의 거리 a_n은 내접원의 반지름의 길이와 같다.

$S_n=\frac{1}{2}(p_n+q_n+r_n)\times a_n$에서

$$a_n=\frac{2S_n}{p_n+q_n+r_n}=\frac{2\times\frac{\sqrt{3}}{2}}{n+\frac{2}{n}+\frac{\sqrt{n^4-2n^2+4}}{n}}$$

$$=\frac{\sqrt{3}n}{n^2+2+\sqrt{n^4-2n^2+4}}\ \cdots\ ㉠$$



삼각형 OP_nQ_n의 외접원의 중심을 $C_n(x_n,\ y_n)$이라 하면 점 C_n은 선분 OP_n의 수직이등분선 위에 있으므로 $x_n=\frac{n}{2}$이다.

$\overline{OC_n}=\overline{Q_nC_n}$에서 $\overline{OC_n}^2=\overline{Q_nC_n}^2$이므로

$$\left(\frac{n}{2}\right)^2+{y_n}^2=\left(\frac{n}{2}-\frac{1}{n}\right)^2+\left(y_n-\frac{\sqrt{3}}{n}\right)^2$$

$$\frac{n^2}{4}+{y_n}^2=\frac{n^2}{4}-1+\frac{1}{n^2}+{y_n}^2-\frac{2\sqrt{3}}{n}y_n+\frac{3}{n^2}\quad\therefore$$

$$y_n=\frac{4-n^2}{2\sqrt{3}n}$$

$b_n=|y_n|$이므로 $n\ge 2$일 때 $b_n=\frac{n^2-4}{2\sqrt{3}n}\ \cdots\ ㉡$

㉠, ㉡에서

$$L=\lim_{n\to\infty}a_nb_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{3}n}{n^2+2+\sqrt{n^4-2n^2+4}}\times\frac{n^2-4}{2\sqrt{3}n}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-4}{2\left(n^2+2+\sqrt{n^4-2n^2+4}\right)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{4}{n^2}}{2\left(1+\frac{2}{n^2}+\sqrt{1-\frac{2}{n^2}+\frac{4}{n^4}}\right)}=\frac{1}{4}$$

$\therefore\ 100L=100\times\frac{1}{4}=25$

7) [정답] 39

[해설]

$|f(x)|=\begin{cases}-e^{x+1}+1 & (x<-1)\\ e^{x+1}-1 & (x\geq -1)\end{cases}$이므로

$\frac{d}{dx}|f(x)|=\begin{cases}-e^{x+1} & (x<-1)\\ e^{x+1} & (x\geq -1)\end{cases}$

이다.

따라서 $p(x)=100|f(x)|$라 하면 함수 $p(x)$는 $x=-1$에서 미분가능하지 않고.

$\lim_{x\to-1-0}p'(x)=-100$,

$\lim_{x\to-1+0}p'(x)=100$이다.

한편, $k=2m-1$ (m은 자연수)일 때,

$f(x^k)=e^{x^{2m-1}+1}-1$이므로

$f(x^k)=e^{x^{2m-1}+1}-1=0$에서

$x=-1$

$|f(x^{2m-1})|=\begin{cases}-e^{x^{2m-1}+1}+1 & (x<-1)\\ e^{x^{2m-1}+1}-1 & (x\geq -1)\end{cases}$

$\therefore\frac{d}{dx}|f(x)|=\begin{cases}-(2m-1)x^{2m-2}e^{x^{2m-1}+1} & (x<-1)\\ (2m-1)x^{2m-2}e^{x^{2m-1}+1} & (x>-1)\end{cases}$

따라서 $q(x^{2m-1})=|f(x^{2m-1})|$이라 하면 함수 $q(x^{2m-1})$는 $x=-1$에서 미분가능하지 않고,

$\lim_{x\to-1-0}q'(x^{2m-1})=-(2m-1)$,

$\lim_{x\to-1+0}q'(x^{2m-1})=2m-1$이다.

또 $f=2m$ (m은 자연수)일 때,

$f(x^k)=e^{x^{2m}+1}-1$이므로 모든 실수 x에 대하여 $f(x^k)>0$이다.

따라서

$|f(x^k)|=e^{x^{2m}+1}-1$

이므로

$\frac{d}{dx}|f(x^k)|=2mx^{2m-1}e^{x^{2m}+1}$

따라서 $r(x^{2m})=|f(x^{2m})|$이라 하면 함수 $r(x^{2m})$은 실수 전체 집합에서 미분가능하다.

이제 $n=2m-1$ 또는 $n=2m$일 때,

함수 $100|f(x)|-\sum_{k=1}^{m}|f(x^{2k-1})|$를 $s(x)$라 하자. 즉

$s(x)=p(x)-\sum_{k=1}^{m}q(x^{2k-1})$

이때 함수 $s(x)$가 $x=-1$에서 미분가능하면 함수 $g(x)$는 실수전체의 집합에서 미분가능하다.

$x\neq-1$일 때,

$s'(x)=p'(x)-\sum_{k=1}^{m}q'(x^{2k-1})$

이므로

$\lim_{x\to-1-0}s'(x)=-100+\sum_{k=1}^{m}(2k-1)$

$\lim_{x\to-1+0}s'(x)=100-\sum_{k=1}^{m}(2k-1)$

이때 함수 $s(x)$가 $x=-1$에서 미분가능하려면

$\lim_{x\to-1-0}s'(x)=\lim_{x\to-1+0}s'(x)$

즉,

$-100+\sum_{k=1}^{m}(2k-1)=100-\sum_{k=1}^{m}(2k-1)$

이어야 한다.

$\sum_{k=1}^{m}(2k-1)=m^2=100$에서

$m=10$

따라서 $n=2m-1$또는 $n=2m$이므로

$n=19$또는 $n=20$

이다.

따라서 구하는 모든 자연수 n의 값의 합은

$19+20=39$

8) [정답] 25

[해설]

원점을 지나고 기울기가 $\tan(\sin t)$인 직선의 방정식은

$y=\tan(\sin t)x \cdots$ ㉠ 점 P는 원과 직선의 교점이므로

원의 방정식 $x^2+y^2=e^{2t}$과 연립하면

$x^2+\{\tan(\sin t)x\}^2=e^{2t}$

$\Leftrightarrow \{1+\tan^2(\sin t)\}x^2=e^{2t} \Leftrightarrow \dfrac{x^2}{\cos^2(\sin t)}=e^{2t}$

$\Leftrightarrow x^2=e^{2t}\cos^2(\sin t) \Leftrightarrow x=e^t\cos(\sin t)$ $(\because\ x>0)$

이를 ㉠에 대입하면 $y=e^t\sin(\sin t)$

그러므로 점 P의 좌표를 $(x,\ y)$라 하면

$x=e^t\cos(\sin t),\ y=e^t\sin(\sin t)$

$\dfrac{dx}{dt}=e^t\cos(\sin t)-\{e^t\sin(\sin t)\}\cos t$

$=e^t\{\cos(\sin t)-\sin(\sin t)\times\cos t\}$

$\dfrac{dy}{dt}=e^t\sin(\sin t)+\{e^t\cos(\sin t)\}\cos t$

$=e^t\{\sin(\sin t)+\cos(\sin t)\times\cos t\}$

$t=\pi$일 때, 점 P의 좌표는

$(e^\pi\cos(\sin\pi),\ e^\pi\sin(\sin\pi))$이므로 $\mathrm{P}(e^\pi,\ 0)$

$t=\pi$일 때, 곡선 C 위의 점 P에서의 접선의 기울기는

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{e^\pi\{\sin(\sin\pi)+\cos(\sin\pi)\times\cos\pi\}}{e^\pi\{\cos(\sin\pi)-\sin(\sin\pi)\times\cos\pi\}}=\frac{-e^\pi}{e^\pi}$$

$=-1$

그러므로 점 P에서의 접선의 방정식은 $y=-(x-e^\pi)$

이때 접선의 x절편은 e^π, y절편은 e^π이므로 접선과 x축 및 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이는 $\dfrac{1}{2}\times e^\pi\times e^\pi=\dfrac{1}{2}e^{2\pi}$

따라서 $a=\dfrac{1}{2}$, $b=2$이므로

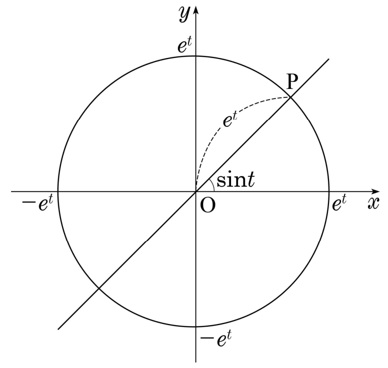
$10(a+b)=10\left(\dfrac{1}{2}+2\right)=25$

<참고>

원 $x^2+y^2=(e^t)^2$은 중심이 원점이고 반지름의 길이가 e^t인 원이고, 점 P가 원 위의 점이므로 $\overline{\mathrm{OP}}=e^t$이다.

직선 OP의 기울기가 $\tan(\sin t)$이므로 직선 OP와 x축의 양의 방향이 이루는 각의 크기는 $\sin t$이다.

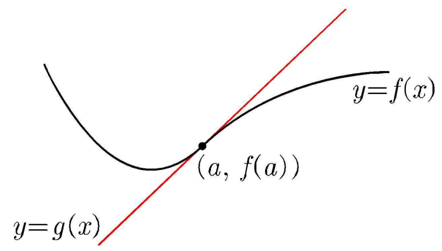
따라서 점 P의 좌표는 $\mathrm{P}(e^t\cos(\sin t),\ e^t\sin(\sin t))$이다.



9) [정답] 9

[해설]

조건을 만족시키려면 점 $(a,\ f(a))$가 곡선 $y=f(x)$의 변곡점
이어야 한다.



$f(x)=-xe^{2-x}$에서

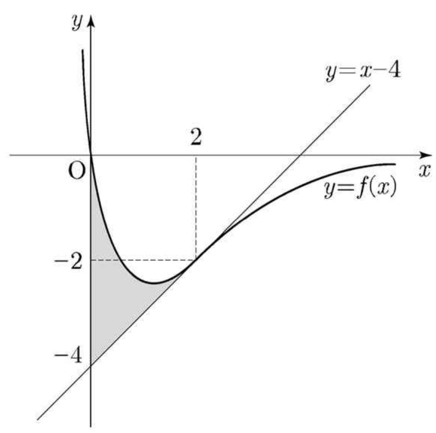
$f'(x)=e^{2-x}(x-1)$

$f''(x)=e^{2-x}(2-x)$

함수 $f(x)$의 증감을 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0		$+$	
$f''(x)$		$+$		0	$-$
$f(x)$	↘	극소	↗	변곡	↗

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



$f''(2)=0$이므로 $a=2$이고

$f'(2)=1$, $f(2)=-2$이므로 $g(x)=x-4$이다.

따라서 구하는 넓이는

$$\int_0^2\{-xe^{2-x}-(x-4)\}dx$$

$$=\left[xe^{2-x}+e^{2-x}-\frac{1}{2}x^2+4x\right]_0^2$$

$$=9-e^2$$

$\therefore\ k=9$

10) [정답] **32**

[해설]

직선 l의 기울기가 $-\frac{\sqrt{3}}{2}$이고, 세 직선 l, m, n으로 둘러싸인 삼각형이 정삼각형이므로 두 접선 m, n과 직선 l이 이루는 예각의 크기는 $60°$이다.

직선 l과 이루는 예각의 크기가 $60°$인 직선의 기울기를 k라 하면 삼각함수의 덧셈정리에 의하여

$$\left|\frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}-k}{1-\frac{\sqrt{3}}{2}k}\right|=\sqrt{3},\ k=\frac{\sqrt{3}}{5}\ \text{또는}\ k=3\sqrt{3}$$

$f(x)=\sqrt{3}\ln x$에서 $f'(x)=\frac{\sqrt{3}}{x}$이므로

$$\frac{\sqrt{3}}{\alpha}=\frac{\sqrt{3}}{5},\ \frac{\sqrt{3}}{\beta}=3\sqrt{3}$$

$\alpha=5,\ \beta=\frac{1}{3}$이므로 $6(\alpha+\beta)=32$

11) [정답] ①

[해설]

$x\ge 0$일 때

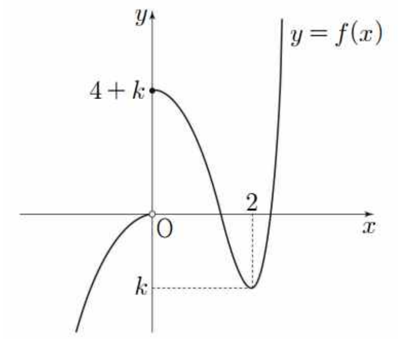
$f'(x)=x(x-2)e^x\ (x>0)$

$f'(x)=0$에서 $x=2$

$f(0)=4+k$

x	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$	$4+k$	↘	k	↗

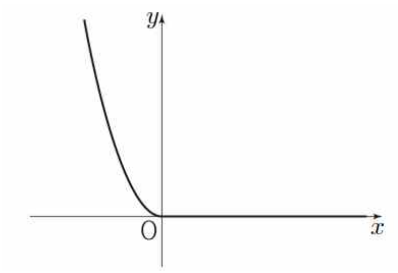
$y=f(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



$$g(x)=\begin{cases}0 & (f(x)\ge 0)\\ -2f(x) & (f(x)<0)\end{cases}\text{이므로}$$

k의 값의 범위에 따라 $y=g(x)$의 그래프를 그리면 다음과 같다.

i) $k\ge 0$일 때



$x=0$에서 연속이고,

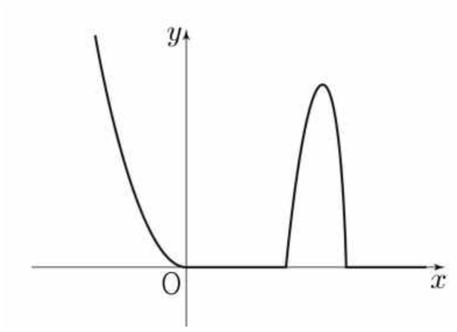
$$\lim_{x\to -0}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=\lim_{x\to -0}\frac{2x^2}{x}=0$$

$$\lim_{x\to +0}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=\lim_{x\to +0}\frac{0}{x}=0\text{이므로}$$

$x=0$에서 미분가능하다.

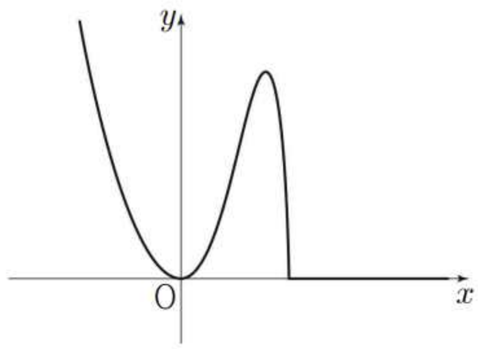
$\therefore$ 미분가능하지 않은 점의 개수는 0

ii) $-4<k<0$일 때



$\therefore$ 미분가능하지 않은 점의 개수는 2

iii) $k=-4$일 때



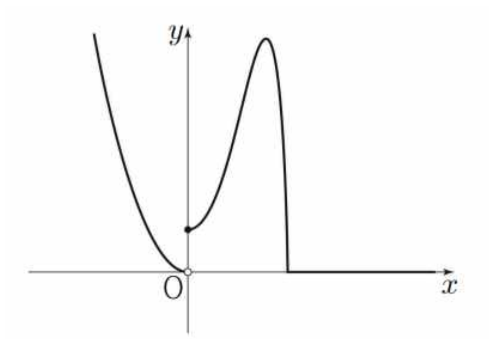
$x=0$에서 연속이고

$\lim\limits_{x\to-0}\dfrac{g(x)-g(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{g(x)-g(0)}{x-0}=0$

이므로 $x=0$에서 미분가능하다.

$\therefore$ 미분가능하지 않은 점의 개수는 1

ⅳ) $k<-4$일 때



$\therefore x=0$에서는 불연속이고,

연속이면서 미분가능하지 않은 점의 개수는 1

ⅰ)~ⅳ)에 의하여 $-4<k<0$이고

정수 k의 개수는 3

12) [정답] 128

[해설]

$0\le k\le 7$ 인 각각의 정수 k 에 대하여

① $f(k+t)=f(k)$ $(0<t\le 1)$ 인 경우

$k<x\le k+1$ 에서 $f(x)=f(k)$: 상수함수

② $f(k+t)=2^t\times f(k)$ $(0<t\le 1)$ 인 경우

$k<x\le k+1$ 에서 $f(x)=f(k)\times 2^{x-k}$: 지수함수

주어진 조건에서 함수 $f(x)$ 는 미분가능하지 않은 점이 2개이므로 ① ⇨ ② ⇨ ① 또는 ② ⇨ ① ⇨ ②처럼 변화되는 지점이 2번 있어야 한다. 또한 ②가 7번이상 나오면

$f(8)>100$

이 되므로 조건을 만족하지 않는다.

가능한 경우 중에 ②가 그려지는 구간이 많이 들어가 있을수록

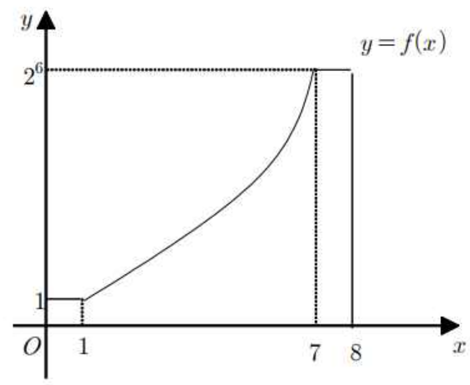
$\int_0^8 f(x)dx$ 의 값이 커지므로 8개의 소구간이

①②②②②②②①

의 순서로 이어지는 연속함수일 때, $\int_0^8 f(x)dx$ 가 최대가 된다.

따라서, 주어진 조건을 만족하는 함수 중 $\int_0^8 f(x)dx$ 가 최대가 될 때, 함수 $f(x)$는

$f(x)=\begin{cases} f(0)=1 & (0\le x\le 1) \\ f(1)\times 2^{x-1}=2^{x-1} & (1\le x\le 7) \\ f(7)=64 & (7\le x\le 8)\end{cases}$ 이다.



따라서 $\int_0^8 f(x)dx$ 의 최댓값은

$\int_0^8 f(x)dx$

$=\int_0^1 1\,dx+\int_1^7 2^{x-1}dx+\int_7^8 64\,dx$

$=[x]_0^1+\left[\dfrac{2^{x-1}}{\ln 2}\right]_1^7+[64x]_7^8$

$=65+\dfrac{63}{\ln 2}$

$\therefore p+q=65+63=128$

13) [정답] ⑤

[해설]

함수 $f(x)$는 주기가 2이고, 그래프는 원점에 대하여

대칭이므로 실수 t와 정수 k에 대하여

$$\int_{t}^{t+2k} f(x)dx=0,\ \int_{-t}^{t+2k} f(x)dx=0$$

따라서 구간 $[-1,1]$에서 방정식 $h(x)=0$

즉 $\int_{g(x)}^{g(x+1)} f(t)dt=0$을 만족시키려면

$g(x+1)-g(x)=2n$ (n은 정수)

또는 $g(x+1)+g(x)=2m$ (m은 정수)이어야 한다.

$g(x)=x(x+1)$이므로 $g(x+1)-g(x)=2(x+1)$

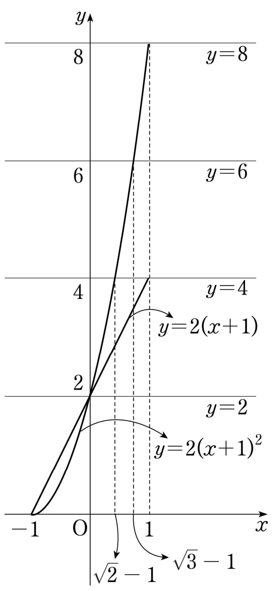
$g(x+1)+g(x)=2(x+1)^2$

구간 $[-1,1]$에서 두 함수 $y=2(x+1)$,

$y=2(x+1)^2$의 그래프는 그림과 같으므로

$2(x+1)=2n$(n은 정수)를 만족시키는 x의 값은 $-1,\ 0,$ 1이고, $2(x+1)^2=2m$(m은 정수)를 만족시키는 x의 값은 $-1,\ 0,\ \sqrt{2}-1,\ \sqrt{3}-1,\ 1$이다.

따라서 서로 다른 실근의 개수는 5



14) [정답] 48

[해설]

$$g(x)=\begin{cases} |2\sin 3x+1| & (x\ge 0) \\ |-2\sin x+1| & (x<0) \end{cases}$$ 이므로

함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이고, $x=0$과 $g(x)=0$을 만족시키는 x의 값에서 미분가능하지 않다.

또, $\lim_{x\to 0+} g'(x)=6,\ \lim_{x\to 0-} g'(x)=-2$ 이다.

(i) 함수 $h(x)$가 $x=0$에서 미분가능하려면

$\lim_{x\to 0+} h'(x)=\lim_{x\to 0-} h'(x)$가 성립해야한다.

$\lim_{x\to 0+} h'(x)=\lim_{x\to 0+} f'(g(x))g'(x)$

$=\lim_{x\to 0+} f'(g(x))\times\lim_{x\to 0+} g'(x)$

$=f'(1)\times 6$

$\lim_{x\to 0-} h'(x)=\lim_{x\to 0-} f'(g(x))g'(x)$

$=\lim_{x\to 0-} f'(g(x))\times\lim_{x\to 0-} g'(x)$

$=f'(1)\times(-2)$

즉 $6f'(1)=-2f'(1)$ 에서

$f'(1)=0$ ……㉠

(ii) $g(x)=0$을 만족시키는 x의 값을 α라 하자.

함수 $h(x)$가 $x=\alpha$에서 미분가능하려면

$\lim_{x\to\alpha+} h'(x)=\lim_{x\to\alpha-} h'(x)$가 성립해야 한다.

$\lim_{x\to\alpha+} h'(x)=\lim_{x\to\alpha+} f'(g(x))g'(x)$

$=\lim_{x\to\alpha+} f'(g(x))\times\lim_{x\to\alpha+} g'(x)$

$=f'(0)\times k$ (단, k는 양의 상수)

$\lim_{x\to\alpha-} h'(x)=\lim_{x\to\alpha-} f'(g(x))g'(x)$

$=\lim_{x\to\alpha-} f'(g(x))\times\lim_{x\to\alpha-} g'(x)$

$=f'(0)\times(-k)$

즉 $kf'(x)=-kf'(0)$에서

$f'(0)=0$ ……㉡

(iii) 함수 $h'(x)$가 $x=0$에서 미분가능하려면

$\lim_{x\to 0+} h''(x)=\lim_{x\to 0-} h''(x)$가 성립해야 한다.

$\lim_{x\to 0+} h''(x)=\lim_{x\to 0+}[f''(g(x))\{g'(x)\}^2+f'(g(x))g''(x)]$

$=\lim_{x\to 0+} f''(g(x))\{g'(x)\}^2+\lim_{x\to 0+} f'(g(x))g''(x)$

$=\lim_{x\to 0+} f''(g(x))\times\lim_{x\to 0+}\{g'(x)\}^2+0$

$=f''(1)\times 6^2$

$\lim_{x\to 0-} h''(x)=\lim_{x\to 0-}[f''(g(x))\{g'(x)\}^2+f'(g(x))g''(x)]$

$=\lim_{x\to 0-} f''(g(x))\{g'(x)\}^2+\lim_{x\to 0-} f'(g(x))g''(x)$

$=\lim_{x\to 0-} f''(g(x))\times\lim_{x\to 0-}\{g'(x)\}^2+0$

$=f''(1)\times(-2)^2$

즉 $36f''(1)=4f''(1)$에서

$f''(1)=0$ ……ⓒ

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서

함수 $f'(x)$는 최고차항의 계수가 4인 삼차함수이고,

ⓐ, ⓑ에서 $f'(1)=0$, $f'(0)=0$이므로

$f'(x)=4x(x-1)(x-a)$ (a는 상수)로 놓을 수 있다.

$f'(x)=(4x^2-4x)(x-a)$에서

$f''(x)=(8x-4)(x-a)+(4x^2-4x)$

ⓒ에서 $f''(1)=0$이므로

$4(1-a)+0=0$에서 $a=1$

따라서 $f'(x)=4x(x-1)^2$이므로

$f'(3)=4\times3\times2^2=48$

[참고]

함수 $h'(x)$가 $x=\alpha$에서 미분가능한지 확인해보자

$\lim\limits_{x\to\alpha+}h''(x)=\lim\limits_{x\to\alpha+}[f''(g(x))\{g'(x)\}^2+f'(g(x))g''(x)]$

$=\lim\limits_{x\to\alpha+}f''(g(x))\{g'(x)\}^2+\lim\limits_{x\to\alpha+}f'(g(x))g''(x)$

$=\lim\limits_{x\to\alpha+}f''(g(x))\times\lim\limits_{x\to\alpha+}\{g'(x)\}^2+0$

$=f''(0)\times k^2$

$\lim\limits_{x\to\alpha-}h''(x)=\lim\limits_{x\to\alpha-}[f''(g(x))\{g'(x)\}^2+f'(g(x))g''(x)]$

$=\lim\limits_{x\to\alpha-}f''(g(x))\{g'(x)\}^2+\lim\limits_{x\to\alpha-}f'(g(x))g''(x)$

$=\lim\limits_{x\to\alpha-}f''(g(x))\times\lim\limits_{x\to\alpha-}\{g'(x)\}^2+0$

$=f''(0)\times(-k)^2$

즉 $\lim\limits_{x\to\alpha+}h''(x)=\lim\limits_{x\to\alpha-}h''(x)$ 이므로

함수 $h'(x)$가 $x=\alpha$에서 미분가능하다.

15) [정답] ①

[해설]

ㄱ. 조건 (가)에서 $f(x)\neq1$이고

조건 (나)에서 $f(x)=-f(-x)$이므로

$-f(-x)\neq1$, $f(-x)\neq-1$

즉, 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\neq-1$(참)

ㄴ. 조건 (가)와 거에 의해 모든 실수 x에 대하여

$-1<f(x)<1$이거나 모든 실수 x에 대하여

$f(x)>1$또는 $f(x)<-1$이다.

이때 조건 (나)에서 $x=0$을 대입하면 $f(0)+f(0)=0$에서

$f(0)=0$

따라서 모든 실수 x에 대하여 $-1<f(x)<1$이고

조건 (다)에서

$f'(x)=\{1+f(x)\}\{1+f(-x)\}=\{1+f(x)\}\{1-f(x)\}$

이므로 $f'(x)>0$

즉, 모든 실수 x에 대하여 함수 $f(x)$는 증가한다. (거짓)

ㄷ. $f'(x)=\{1+f(x)\}\{1-f(x)\}=1-\{f(x)\}^2$

이고 양변을 x에 대하여 미분하면

$f''(x)=-2f(x)f'(x)$

ㄴ에서 $f'(x)>0$이므로 $f''(x)=0$에서 $f(x)=0$

이때 함수 $f(x)$는 $f'(x)>0$이므로 실수 전체의 집합에서 증가한다.

따라서 $f(x)=0$을 만족시키는 x의 값은 $x=0$뿐이므로

곡선 $y=f(x)$는 세 개의 변곡점을 갖지 않는다. (거짓)

이상에서 옳은 것은 ㄱ이다.

16) [정답] 216

[해설]

$f(x)=\dfrac{g(x)}{x-a}$ $(x>a)$에서

$f(\alpha)=\dfrac{g(\alpha)}{\alpha-a}=M$

$f(\beta)=\dfrac{g(\beta)}{\beta-a}=M$

$f'(x)=\dfrac{g'(x)(x-a)-g(x)}{(x-a)^2}$에서

$f'(\alpha)=0$ 이므로

$g'(\alpha)(\alpha-a)-g(\alpha)=0$

$g'(\alpha)=\dfrac{g(\alpha)}{\alpha-a}$

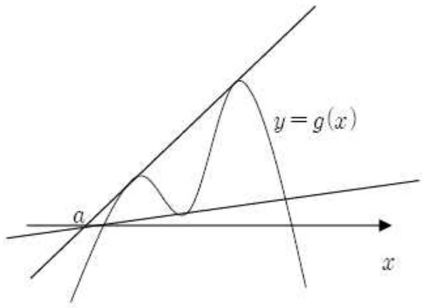
$f'(\beta)=\dfrac{g(\beta)}{\beta-\alpha}$

이때, $g'(\alpha)$는 $x=\alpha$에서 곡선 $y=g(x)$의 접선의 기울기이고,

$g'(\beta)$는 $x=\beta$에서 곡선 $y=g(x)$의 접선의 기울기이다.

따라서 곡선 $y=g(x)$의 그래프는 다음 두 가지의 경우로 나누어 생각할 수 있다.

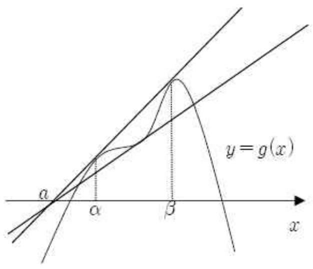
(ⅰ)



함수 $y=g(x)$의 그래프가 위의 그림과 같을 때, 함수 $y=g(x)$가 극대 또는 극소가 되는 x의 값은 3개다.

이때 함수 $y=f(x)$의 그래프도 극대 또는 극소가 되는 x의 값은 3개이므로 조건 (다)를 만족시키지 않는다.

(ii)



함수 $y=g(x)$의 그래프가 위의 그림과 같을 때, 함수 $y=g(x)$가 극대 또는 극소가 되는 x의 값은 1개다.

이때, 함수 $y=f(x)$의 그래프는 극대 또는 극소가 되는 x의 값은 3개이므로 조건 (다)를 만족시킨다.

(i), (ii)에서

함수 $y=g(x)$는 극값을 1개 갖는다.

$g(x)-kx=-(x-\alpha)^2(x-\beta)^2$으로 놓으면

$g(x)=-(x-\alpha)^2(x-\beta)^2+kx$

이므로

$$g'(x)=-4(x-\alpha)(x-\beta)\left(x-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)+k$$

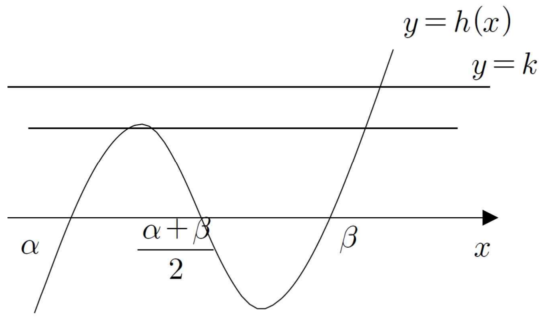
이때, $g'(x)=0$

즉 $4(x-\alpha)(x-\beta)\left(x-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=k$

의 서로 다른 실근의 개수는 1 또는 2이어야 한다.

이때, $h(x)=4(x-\alpha)(x-\beta)\left(x-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$라 하면 곡선 $y=h(x)$

와 직선 $y=k$는 한점에서 만나거나 두 점에서 만나야 한다.



함수 $h(x)$의 극값은 $\beta=\alpha+6\sqrt{3}$이므로

$\frac{\alpha+\beta}{2}=0$으로 놓은 후

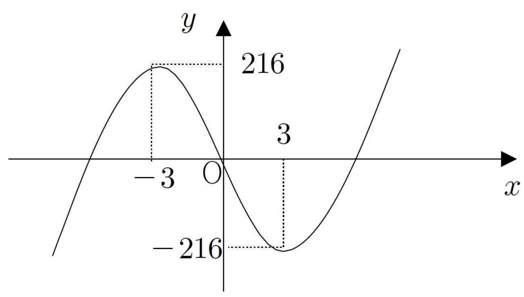
함수 $y=4x(x+3\sqrt{3})(x-3\sqrt{3})$의 극값을 구해도 된다.

이때, $y'=-12(x+3)(x-3)$이므로

$y'=0$에서

$x=-3$ 또는 $x=3$

함수 $y=4x(x+3\sqrt{3})(x-3\sqrt{3})$의 그래프는 다음 그림과 같다.



따라서 k의 범위는

$k\le -216$ 또는 $k\ge 216$

이때, $k>0$이므로 k의 최솟값은 216다.

따라서 M의 최솟값도 216이다.

17)[정답] 25

[해설]

함수 $f(x)=x^2e^{ax}\ (a<0)$에서

$f'(x)=(x^2)'e^{ax}+x^2(e^{ax})'$

$=2xe^{ax}+ax^2e^{ax}=(ax^2+2x)e^{ax}=ax\left(x+\frac{2}{a}\right)e^{ax}$

$f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

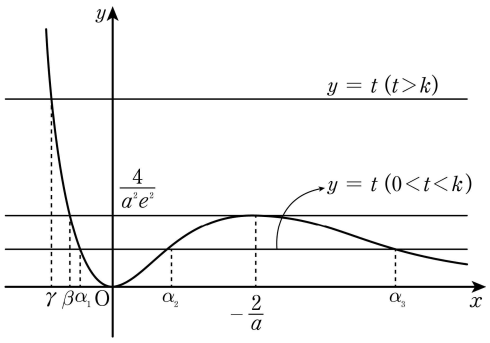
x	$\cdots$	0	$\cdots$	$-\frac{2}{a}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{4}{a^2e^2}$	$\searrow$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극솟값 0를 갖고

$x=-\frac{2}{a}$ 에서 극댓값 $\frac{4}{a^2e^2}$ 를 갖는다.

또 $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\infty$ 이고, $\lim_{x\to\infty} f(x)=0$ 이므로

함수 $f(x)=x^2e^{ax}\,(a<0)$의 그래프는 그림과 같다.



부등식 $f(x)\geq t\,(t>0)$을 만족시키는 x의 최댓값 $g(t)$에 대하여 $k=\frac{4}{a^2e^2}$ 라 하면, $g(t)$는 $0<t<k$ 또는 $t=k$ 또는 $t>k$로 나누어 생각할 수 있다.

i) $0<t<k$일 때

방정식 $f(x)=t$의 서로 다른 세 실근을 α_1, α_2, α_3라 하면 부등식 $f(x)\geq t$의 해는 그림에서 $x\leq\alpha_1$ 또는 $\alpha_2\leq x\leq\alpha_3$이므로 부등식을 만족시키는 x의 최댓값은 α_3이다.

따라서 $g(t)=\alpha_3$이다.

ii) $t=k$일 때

방정식 $f(x)=t$의 음의 실근을 β라 하면 부등식 $f(x)\geq t$의 해는 $x\leq\beta$ 또는 $x=-\frac{2}{a}$ 이므로

$g(t)=-\frac{2}{a}$이다.

iii) $t>k$일 때

방정식 $f(x)=t$의 실근을 γ라 하면 부등식 $f(x)\geq t$의 해는 $x\leq\gamma$이므로 $g(t)=\gamma$이다.

정의역이 $\left\{x\,|\,x<\beta,\ x\geq-\frac{2}{a}\right\}$인 함수 $h(x)$를

$$h(x)=\begin{cases} h_1(x)=f(x) & (x<\beta) \\ h_2(x)=f(x) & \left(x\geq-\frac{2}{a}\right)\end{cases}$$

라 정의하면, 두 함수 $y=h_1(x)$와 $y=h_2(x)$는 각각의 정의역에서 일대일 대응이므로 역함수를 갖는다. 또한, $y=h_1(x)$의 치역은 $\{y\,|\,y>k\}$이고, $y=h_2(x)$의 치역은 $\{y\,|\,0<y\leq k\}$이므로 함수 $h(x)$의 역함수의 정의역은 $\{x\,|\,x>0\}$이다. 이때, $h(x)=t$를 만족하는 x의 값은 방정식 $f(x)=t$의 해 중에서 최댓값이므로 $h(x)$의 역함수가 $g(t)$이다. $g(t)$는 $0<t<k$, $t>k$인 모든 점에서 연속함수이므로 $t=k$에서의 연속성을 조사하면 된다.

$\lim_{t\to k-} g(t)=-\frac{2}{a}$에서 $a<0$이므로 $-\frac{2}{a}>0$

$\lim_{t\to k+} g(t)=\beta$에서 $\beta<0$이므로

$\lim_{t\to k-} g(t)\neq\lim_{t\to k+} g(t)$이다.

따라서 함수 $g(t)$는 $t=k$에서만 불연속이다.

$k=\frac{4}{a^2e^2}=\frac{16}{e^2}$, $\frac{4}{a^2}=16$, $a^2=\frac{1}{4}$

따라서 $100a^2=100\times\frac{1}{4}=25$

18) [정답] ③

[해설]

조건 (가)에서 $\left(\frac{f(x)}{x}\right)'=x^2e^{-x^2}$이고

$f(1)=\frac{1}{e}$이므로 조건 (나)에서

$$g(x)=\frac{4}{e^4}\int_1^x e^{t^2}f(t)dt$$

$$=\frac{2}{e^4}\int_1^x\left(2te^{t^2}\times\frac{f(t)}{t}\right)dt$$

$$=\frac{4}{e^4}\int_1^x\left\{\left(e^{t^2}\right)'\times\frac{f(t)}{t}\right\}dt$$

$$=\frac{2}{e^4}\left\{\left[e^{t^2}\times\frac{f(t)}{t}\right]_1^x-\int_1^x e^{t^2}\times\left(\frac{f(t)}{t}\right)'dt\right\}$$

$$=\frac{2}{e^4}\left\{e^{x^2}\times\frac{f(x)}{x}-ef(1)-\int_1^x e^{t^2}\times\left(t^2e^{-t^2}\right)dt\right\}$$

$$=\frac{2}{e^4}\left\{e^{x^2}\times\frac{f(x)}{x}-1-\int_1^x t^2dt\right\}$$

$$=\frac{2}{e^4}\left\{e^{x^2}\times\frac{f(x)}{x}-1-\left[\frac{1}{3}t^3\right]_1^x\right\}$$

$$=\frac{2}{e^4}\left\{e^{x^2}\times\frac{f(x)}{x}-1-\frac{1}{3}(x^3-1)\right\}$$

$x=2$를 대입하면

$$g(2)=\frac{2}{e^4}\left(e^4\times\frac{f(2)}{2}-1-\frac{7}{3}\right)$$

$$g(2)=f(2)-\frac{20}{3e^4}$$

따라서,

$$f(2)-g(2)=\frac{20}{3e^4}$$

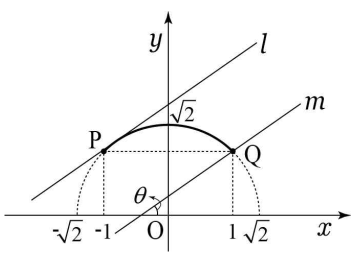
19) [정답] 25

[해설]

곡선 $y=\sqrt{2-x^2}\,(-1\le x\le 1)$ 위의 양 끝점 $(-1,\ 1)$, $(1,\ 1)$을 각각 P, Q라 하고, 직선 l의 y절편이 직선 m의 y절편보다 크다고 하자.

점 P를 지나고 곡선 $y=\sqrt{2-x^2}$ 에 접하는 접선이 x축과 양의 방향으로 이루는 각의 크기가 $\frac{\pi}{4}$ 이므로

(i) $0\le\theta<\frac{\pi}{4}$일 때



$f(\theta)$는 직선 l이 곡선과 접하고, 직선 m이 점 Q를 지날 때 점 Q와 직선 l 사이의 거리이다.

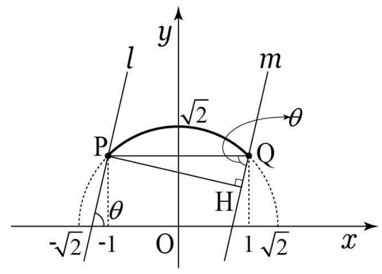
곡선은 중심이 $(0,\ 0)$이고 반지름의 길이가 $\sqrt{2}$ 인 원의 일부이므로 곡선과 접하는 직선 l의 방정식은

$y=\tan\theta x+\sqrt{2}\sec\theta$ 이므로

$$f(\theta)=\frac{|\tan\theta-1+\sqrt{2}\sec\theta|}{\sqrt{\tan^2\theta+1}}$$

$=\sin\theta-\cos\theta+\sqrt{2}\ (\sin\theta-\cos\theta\ \ge\ -1)$

(ii) $\frac{\pi}{4}\le\theta\le\frac{\pi}{2}$일 때



$f(\theta)$는 직선 l이 점 P를 지나고 직선 m이 점 Q를 지날 때 점 P와 직선 m 사이의 거리와 같다. 즉, 점 P에서 직선 m에 내린 수선의 발을 H라 하면 $f(\theta)$는 선분 PH의 길이와 같다.

$\angle$PQH$=\theta$ 이므로

$f(\theta)=2\sin\theta$

(i), (ii)에 의하여

$$f(\theta)=\begin{cases}\sin\theta-\cos\theta+\sqrt{2} & \left(0\le\theta<\frac{\pi}{4}\right)\\ 2\sin\theta & \left(\frac{\pi}{4}\le\theta\le\frac{\pi}{2}\right)\end{cases}$$

함수 $f(\theta)$는 닫힌 구간 $\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$에서 연속이므로

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\theta)d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\sin\theta-\cos\theta+\sqrt{2})d\theta+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}2\sin\theta\,d\theta$$

$$=\left[-\cos\theta-\sin\theta+\sqrt{2}\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}}+\left[-2\cos\theta\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=1+\frac{\sqrt{2}}{4}\pi$$

$a=1,\ b=\frac{1}{4}$

따라서 $20(a+b)=25$

20) [정답] 83

[해설]

조건 (나)

$\int_x^{x+a}f(t)dt=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$ 에서 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x+a)-f(x)=\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$ ...... ㉠

이 식의 양변에 $x=-\frac{a}{2}$를 대입하면

$f\left(\frac{a}{2}\right)-f\left(-\frac{a}{2}\right)=\cos\left(-\frac{a}{2}+\frac{\pi}{3}\right)$

조건 (가)에서 의해

$f\left(\frac{a}{2}\right)=f\left(-\frac{a}{2}\right)$이므로 $\cos\left(-\frac{a}{2}+\frac{\pi}{3}\right)=0$

$0<a<2\pi$ 에서 $-\frac{2}{3}\pi\le-\frac{a}{2}+\frac{\pi}{3}\le\frac{\pi}{3}$이므로

$-\frac{a}{2}+\frac{\pi}{3}=-\frac{\pi}{2}$ 따라서 $a=\frac{5\pi}{3}$

㉠에서 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x+a)-f'(x)=-\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$

이 식에 $x=-\frac{a}{2}$를 대입하면

$f'\left(\frac{a}{2}\right)-f'\left(-\frac{a}{2}\right)=-\sin\left(-\frac{a}{2}+\frac{\pi}{3}\right)$

이때, 조건 (가) $f(x)=f(-x)$에서 $f'(x)=-f'(x)$이므로

$2f'\left(\frac{a}{2}\right)=-\sin\left(-\frac{a}{2}+\frac{\pi}{3}\right)$

$a=\frac{5}{3}\pi$이므로 $2f'\left(\frac{5}{6}\pi\right)=-\sin\left(-\frac{5\pi}{6}+\frac{\pi}{3}\right)=-\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)=1$

$f'\left(\frac{5}{6}\pi\right)=\frac{1}{2}$ ...... ㉡

$f(x)=b\cos(3x)+c\cos(5x)$에서

$f'(x)=-3b\sin(3x)-5c\sin(5x)$

$f'\left(\frac{5}{6}\pi\right)=-3b\sin\left(\frac{5\pi}{2}\right)-5c\sin\left(\frac{25\pi}{6}\right)=-3b-\frac{5c}{2}=\frac{1}{2}$

$-6b-5c=1$ ...... ㉢

한편 $\int_{x}^{x+a}f(t)dt=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$의 양변에 $x=-\frac{a}{2}$를 대입하면

$\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}f(t)dt=\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{a}{2}\right)$ 조건 (가)에서 함수 $f(x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이므로 $2\int_{0}^{\frac{a}{2}}f(t)dt=\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{a}{2}\right)$

$2\int_{0}^{\frac{a}{2}}\{b\cos(3t)+c\cos(5t)\}dt=2\left[\frac{b}{3}\sin(3t)+\frac{c}{5}\sin(5t)\right]_{0}^{\frac{a}{2}}$

$=2\left\{\frac{b}{3}\sin\left(\frac{3a}{2}\right)+\frac{c}{5}\sin\left(\frac{5a}{2}\right)\right\}=\sin\left(-\frac{a}{2}+\frac{\pi}{3}\right)$

양변에 $a=\frac{5\pi}{3}$을 대입하면

$2\left\{\frac{b}{3}\sin\left(\frac{5}{2}\pi\right)+\frac{c}{5}\sin\left(\frac{25}{6}\pi\right)\right\}=\sin\left(-\frac{5\pi}{6}+\frac{\pi}{3}\right)$

$2\left(\frac{b}{3}+\frac{c}{5}\times\frac{1}{2}\right)=\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-1$

$\frac{2b}{3}+\frac{c}{5}=-1$

$10b+3c=-15$ ...... ㉣

㉢, ㉣에서 $b=-\frac{9}{4}$, $c=\frac{5}{2}$

따라서 $abc=\frac{5}{3}\pi\cdot\left(-\frac{9}{4}\right)\cdot\frac{5}{2}=-\frac{75}{8}\pi$

$p=8, q=75$이므로

$\therefore\ p+q=83$

21) [정답] 15

[해설]

$t=\frac{s+\sqrt{s^2+4}}{2}$에서 $2t-s=\sqrt{s^2+t}$, $4t^2-4ts=4$이므로

$s=t-\frac{1}{t}$ ...... ㉠

$x=2\ln t$, $y=f(t)$에서 $\frac{dx}{dt}=\frac{2}{t}$, $\frac{dy}{dt}=f'(t)$이므로 시각 t에서의 속도는 $\left(\frac{2}{t},\ f'(t)\right)$이고, 가속도는 $\left(-\frac{2}{t^2},\ f''(t)\right)$이다.

$t=2$일 때, 점 P의 속도가 $\left(1,\ \frac{3}{4}\right)$이므로

$f'(2)=\frac{3}{4}$ ...... ㉡

$s=\int_{1}^{t}\sqrt{\left(\frac{dx}{dk}\right)^2+\left(\frac{dy}{dk}\right)^2}\,dk$

$=\int_{1}^{t}\sqrt{\left(\frac{2}{k}\right)^2+\{f'(k)\}^2}\,dk$

$=t-\frac{1}{t}$ ($\because$ ㉠에 의해)

양변을 t에 대하여 미분하면

$\sqrt{\left(\frac{2}{t}\right)^2+\{f'(t)\}^2}=1+\frac{1}{t^2}$, $\left(\frac{2}{t}\right)^2+\{f'(t)\}^2=\left(1+\frac{1}{t^2}\right)^2$

$\{f'(t)\}^2=\left(1-\frac{1}{t^2}\right)^2$

$f'(t)=1-\frac{1}{t^2}$ ($\because$ ㉡에 의해)

$f''(t)=\dfrac{2}{t^3}$ 이므로 $a=f''(2)=\dfrac{1}{4}$

따라서 $60a=60\times\dfrac{1}{4}=15$

22) [정답] 9

[해설]

직선 $y=x$와 x축 및 직선 $x=n$으로 둘러싸인 삼각형의 넓이가 $\dfrac{n^2}{2}$이다.

$2\lim\limits_{n\to\infty}\left(a_n-\dfrac{n^2}{2}\right)=\dfrac{241}{768}$ 이므로

$$F(x)=h(x)-x$$
$$=\begin{cases} g(x)-x & (0\le x<5,\ x\ge k) \\ x-g(x) & (5\le x<k) \end{cases}$$

로 놓으면

$2\lim\limits_{n\to\infty}\displaystyle\int_0^n F(x)\,dx=\dfrac{241}{768}$ 이다.

$n\le x<n+1$일 때

$$g(x)-x=\frac{1}{2^n}\{f(x-n)-(x-n)\}$$
$$=\frac{1}{2^n}\left\{\frac{3}{2}(x-n)-\frac{1}{2}(x-n)^2-(x-n)\right\}$$
$$=\frac{1}{2^n}\left\{\frac{1}{2}(x-n)-\frac{1}{2}(x-n)^2\right\}$$
$$=\frac{1}{2^n+1}(x-n)(1+n-x)$$
$$=-\frac{1}{2^{n+1}}(x-n)(x-(n+1))$$

이므로

$$\int_n^{n+1}\{g(x)-x\}\,dx$$
$$=\int_n^{n+1}\left\{-\frac{1}{2^{n+1}}(x-n)(x-(n+1))\right\}dx$$
$$=\int_0^1\left\{-\frac{1}{2^{n+1}}x(x-1)\right\}dx$$
$$=-\frac{1}{2^{n+1}}\int_0^1 x(x-1)\,dx$$
$$=\frac{1}{2^{n+1}}\times\frac{1}{6}\qquad\cdots\cdots㉠$$

한편,

$$\int_0^n F(x)\,dx$$
$$=\int_0^1(x-g(x))\,dx+\cdots+\int_4^5(x-g(x))\,dx$$
$$+\int_5^6(x-g(x))\,dx+\cdots+\int_{k-1}^k(x-g(x))\,dx$$
$$+\int_k^{k+1}(x-g(x))\,dx+\cdots+\int_{n-1}^n(x-g(x))\,dx$$

이때, ㉠은 $n=0$일 때도 성립하므로 ㉠에서

$$2\int_0^n F(x)\,dx$$
$$=\frac{1}{3}\times\left\{\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^5\right\}$$
$$-\frac{1}{3}\times\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^6+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^k\right\}$$
$$+\frac{1}{3}\times\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}$$
$$=\frac{1}{3}\times\left\{\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}$$
$$-\frac{2}{3}\times\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^6+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^k\right\}$$
$$=\frac{1}{3}\times\frac{\frac{1}{2}\times\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}}{1-\frac{1}{2}}$$
$$-\frac{2}{3}\times\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^6\times\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{k-5}\right\}}{1-\frac{1}{2}}$$
$$=\frac{1}{3}\times\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}-\frac{2}{3}\times\left(\frac{1}{2}\right)^5\times\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{k-5}\right\}$$
$$=\frac{1}{3}\times\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}-\frac{1}{48}\times\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{k-5}\right\}$$

따라서 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n=0$이므로

$$2\lim_{n\to\infty}\int_0^n F(x)\,dx=\frac{1}{3}-\frac{1}{48}\times\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{k-5}\right\}$$
$$=\frac{15}{48}+\frac{1}{48}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{k-5}$$

즉, $\dfrac{15}{48}+\dfrac{1}{48}\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^{k-5}=\dfrac{241}{768}$에서

$\left(\dfrac{1}{2}\right)^{k-5}=\dfrac{1}{16}$이므로

$k-5=4$에서

$k=9$

23) [정답] 27

[해설]

(i) $t<8$일 때,

$f(x)=x^2-18x+2(x-t)+80=x^2-16x-2t+80$

$=(x-8)^2-2t+16$

이므로 $8\le x\le 10$에서 함수 $f(x)$는 $x=8$에서

최솟값 $f(8)=-2t+16$을 갖는다.

따라서 $g(t)=-2t+16$이다.

(ii) $8\le t<10$일 때,

(ㄱ) $x<t$인 경우

$f(x)=x^2-18x-2(x-t)+80=x^2-20x+2t+80$

$=(x-10)^2+2t-20$

(ㄴ) $x\ge t$인 경우

$f(x)=x^2-18x+2(x-t)+80=x^2-16x-2t+80$

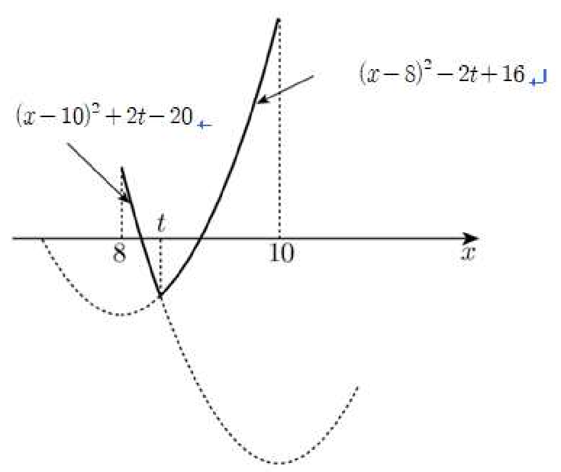
$=(x-8)^2-2t+16$

(ㄱ), (ㄴ)에 의해

$$f(x)=\begin{cases}(x-10)^2+2t-20 & (8\le x<t)\\(x-8)^2-2t+16 & (t\le x\le 10)\end{cases}$$

이다. 이때 $8\le x\le 10$에서 함수 $f(x)$의 그래프는

다음과 같다.



함수 $f(x)$는 $x=t$에서 최솟값 $f(t)=(t-9)^2-1$을

갖는다.

따라서 $g(t)=(t-9)^2-1$이다.

(iii) $t\ge 10$일 때,

$f(x)=x^2-18x-2(x-t)+80$

$=x^2-20x+2t+80$

$=(x-10)^2+2t-20$

이므로 $8\le x\le 10$에서 함수 $f(x)$는 $x=10$에서

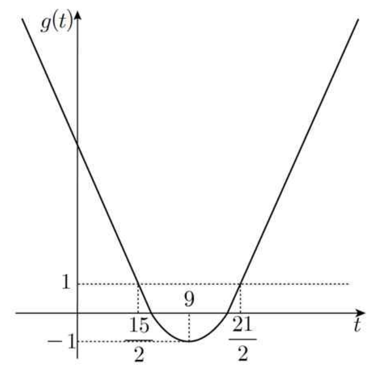
최솟값 $f(10)=2t-20$을 갖는다.

따라서 $g(t)=2t-20$이다.

(i)~(iii)에서 함수 $g(t)$는

$$g(t)=\begin{cases}-2t+16 & (t<8)\\(t-9)^2-1 & (8\le t<10)\\2t-20 & (t\ge 10)\end{cases}$$

이고 함수 $g(t)$의 그래프는 다음과 같다.



① $g(t)=-1\,(t=9)$일 때,

$\lim_{n\to\infty}\{g(t)\}^{2n}=1$ 이므로

$h(t)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\{g(t)\}^{2n}}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$ 이다.

② $-1<g(t)<1\,(\frac{15}{2}<t<9$ 또는 $9<t<\frac{21}{2})$일 때,

$\lim_{n\to\infty}\{g(t)\}^{2n}=0$ 이므로

$h(t)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\{g(t)\}^{2n}}=\frac{1}{1+0}=1$ 이다.

③ $g(t)=1\,(t=\frac{15}{2}$ 또는 $t=\frac{21}{2})$일 때,

$\lim_{n\to\infty}\{g(t)\}^{2n}=1$ 이므로

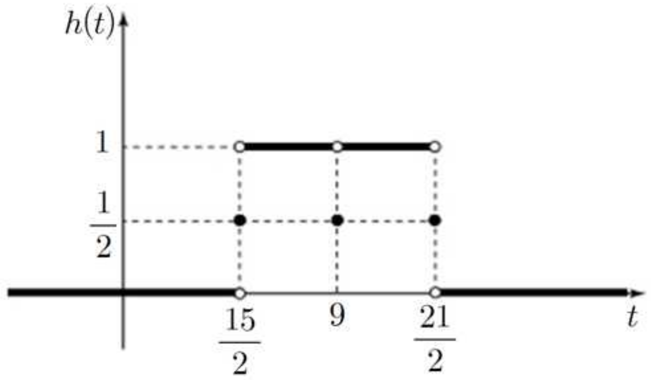
$h(t)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\{g(t)\}^{2n}}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$ 이다.

④ $g(t)>1\,(t<\frac{15}{2}$ 또는 $t>\frac{21}{2})$일 때,

$\lim_{n\to\infty}\{g(t)\}^{2n}=\infty$ 이므로

$h(t)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\{g(t)\}^{2n}}=0$ 이다.

그러므로 함수 $h(t)$의 그래프는 다음과 같다.

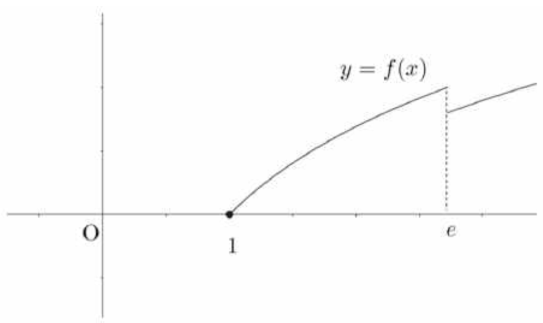


따라서 함수 $h(t)$는 $t=\frac{15}{2}, 9, \frac{21}{2}$에서 불연속이므로 모든 a의 값의 합은 $9+\frac{15}{2}+\frac{21}{2}=27$이다.

24) [정답] ④

[해설]

함수 $f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



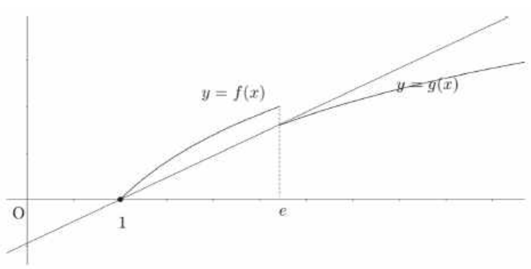
이때 일차함수 $g(x)$가 주어진 조건을 만족시키려면

$1 \le x < e$일 때 $g(x) \le f(x)$이고,

$x \ge 1$일 때 $g(x) \ge f(x)$이어야 한다.

따라서 일차함수 $g(x)$의 기울기의 최솟값 $h(t)$는 다음과 같다.

(i) 점 $(1,\ 0)$에서 곡선 $y=-t+\ln x\ (x \ge e)$에 그은 접선이 존재하지 않을 때



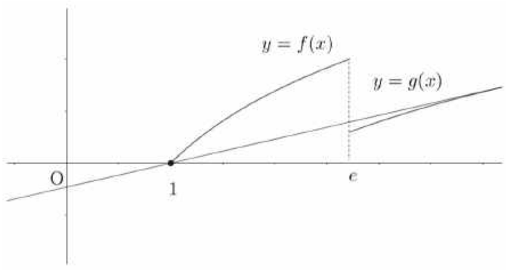
두 점 $(1,\ 0)$, $(e,\ f(e))$를 지나는 직선의 기울기가 $h(t)$이다.

즉, $h(t)=\frac{-t+\ln e}{e-1}=\frac{-t+1}{e-1}$이다.

이때, $h'(t)=\frac{-1}{e-1}$이므로

$$h'\left(\frac{1}{2e}\right)=\frac{-1}{e-1}$$

(ii) 점 $(1,\ 0)$에서 곡선 $y=-t+\ln x\ (x \ge e)$에 그은 접선이 존재할 때



그 접선의 기울기가 $h(t)$이다.

이때 $f'(x)=\frac{1}{x}\ (x \ne e)$이므로 접점의 x좌표를 α라 하면

$$h(t)=\frac{1}{\alpha}$$

이다.

한편, 접점 $(\alpha,\ -t+\ln\alpha)$에서의 접선의 방정식은

$$y-(-t+\ln\alpha)=\frac{1}{\alpha}(x-\alpha)$$

이다.

이 접선이 점 $(1,\ 0)$을 지나므로

$$t-\ln\alpha=\frac{1}{\alpha}-1$$

$$\ln\alpha+\frac{1}{\alpha}=t+1$$

이때 $h(t)=\frac{1}{\alpha}$이므로

$$\ln\frac{1}{h(t)}+h(t)=t+1$$

즉, $h(t)-\ln h(t)=t+1$이다.

위 등식의 양변을 t에 대하여 미분하면

$$h'(t)-\frac{h'(t)}{h(t)}=1$$

이므로 $h'(t)=\frac{h(t)}{h(t)-1}$이다.

한편, 두 점 $(1,\ 0)$, $(e,\ f(e))$, 즉 두 점 $(1,\ 0)$, $(e,\ -t+1)$을 지나는 지선의 기울기는

$$\frac{-t+1}{e-1}$$

이고, 점 $\lim_{x\to e+} f'(x)=\frac{1}{e}$이므로

$$\frac{-t+1}{e-1}>\frac{1}{e}$$

즉, $t<\frac{1}{e}$이면

$$h(t)=\frac{-t+1}{e-1}\text{이므로}$$

$$h'(t)=\frac{-1}{e-1}\text{이고,}$$

$$\frac{-t+1}{e-1} \le \frac{1}{2}$$

즉, $t \ge \frac{1}{e}$이면

$$h(t) - \ln h(t) = t+1$$

이므로

$$h'(t) = \frac{h(t)}{h(t)-1}$$

이다.

$\frac{1}{2e} < \frac{1}{e}$이므로

$$h'\left(\frac{1}{2e}\right) = \frac{-1}{e-1}$$

한편, $t \le \frac{1}{e}$에서 $h(t) = \frac{-t+1}{e-1}$의 최솟값은

$$h\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{-\frac{1}{e}+1}{e-1} = \frac{1}{e}$$

이다.

한편, 양수 a에 대하여 $h(a) = \frac{1}{e+2}$일 때

$$h(a) = \frac{1}{e+2} < \frac{1}{e} = h\left(\frac{1}{e}\right)$$

이므로 $a > \frac{1}{e}$이다.

따라서

$$h'(a) = \frac{h(a)}{h(a)-1}$$

$$= \frac{\frac{1}{e+2}}{\frac{1}{e+2}-1} = \frac{-1}{e+1}$$

따라서

$$h'\left(\frac{1}{2e}\right) \times h'(a) = \frac{-1}{e-1} \times \frac{-1}{e+1}$$

$$= \frac{1}{(e-1)(e+1)}$$

이다.

25) [정답] 90

[해설]

$A\left(\alpha, -\frac{2}{\alpha}\right)$, $B\left(\beta, -\frac{2}{\beta}\right)$라 하자.

$y = -\frac{2}{x}$의 양변을 x에 대하여 미분하면 $\frac{dy}{dx} = \frac{2}{x^2}$

점 A를 지나는 접선의 방정식은 $y = \frac{2}{\alpha^2}(x-\alpha) - \frac{2}{\alpha}$

즉, $y = \frac{2}{\alpha^2}x - \frac{4}{\alpha}$ …… ㉠

같은 방법으로 점 B를 지나는 접선의 방정식은

$y = \frac{2}{\beta^2}x - \frac{4}{\beta}$ …… ㉡

㉠, ㉡이 모두 $P(a, 2a)$를 지나므로

$2a = \frac{2a}{\alpha^2} - \frac{4}{\alpha}$, $2a = \frac{2a}{\beta^2} - \frac{4}{\beta}$

즉, $a\alpha^2 + 2\alpha - a = 0$, $a\beta^2 + 2\beta - a = 0$이므로

α, β는 이차방정식 $ax^2 + 2x - a = 0$의 근이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의해서

$\alpha + \beta = -\frac{2}{a}$, $\alpha\beta = -1$

$$\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2$$

$$= (a-\alpha)^2 + \left(2a + \frac{2}{\alpha}\right)^2 + (a-\beta)^2 + \left(2a + \frac{2}{\beta}\right)^2$$

$$= 10a^2 - 2a(\alpha+\beta) + (\alpha^2+\beta^2) + 8a\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right) + 4\left(\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2}\right)$$

$$= 10a^2 + 4 + \{(\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta\}$$

$$+ 8a \times \frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta} + 4 \times \frac{(\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta}{(\alpha\beta)^2}$$

$$= 10a^2 + \frac{20}{a^2} + 30,$$

$$\overline{AB}^2 = (\alpha-\beta)^2 + \left(-\frac{2}{\alpha} + \frac{2}{\beta}\right)^2$$

$$= 5(\alpha-\beta)^2$$

$$= 5\{(\alpha+\beta)^2 - 4\alpha\beta\}$$

$$= 5\left(\frac{4}{a^2} + 4\right)$$

$$= \frac{20}{a^2} + 20$$

그러므로 $\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 + \overline{AB}^2 = 10a^2 + \frac{40}{a^2} + 50$

$a^2 = t\,(t>0)$으로 놓고 $f(t) = 10t + \frac{40}{t} + 50$이라 하면

$f'(t) = 10 - \frac{40}{t^2} = \frac{10(t^2-4)}{t^2}$

함수 $f(t)$의 증가와 감소를 나타낸 표는 다음과 같다.

t	(0)	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(t)$		$-$	0	$+$
$f(t)$		$\searrow$	90	$\nearrow$

함수 $f(t)$는 $t=2$에서 최솟값 90을 갖는다.

$a^2=2$이므로 $a=\sqrt{2}$에서 점 P의 좌표는 $(\sqrt{2},\, 2\sqrt{2})$이다.

따라서 $\overline{\mathrm{PA}}^2+\overline{\mathrm{PB}}^2+\overline{\mathrm{AB}}^2$의 최솟값은 90이다.

[다른 풀이]

절대부등식을 이용하면

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{PA}}^2+\overline{\mathrm{PB}}^2+\overline{\mathrm{AB}}^2&=10a^2+\frac{40}{a^2}+50\\&\geq 2\sqrt{10a^2\times\frac{40}{a^2}}+50\\&=2\times 20+50\\&=90\end{aligned}$$

(단, 등호는 $10a^2=\dfrac{40}{a^2}$ 즉, $a=\sqrt{2}$일 때 성립한다.)

26) [정답] **50**

[해설]

(가)에서 $f(x)=x^m(x-2)^n$ (단, m, n은 자연수)

(나)에서 $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)^3}{x^m(x-2)^n}=\begin{cases}0 & (n=1,\,2)\\ \dfrac{1}{2^m} & (n=3)\\ \text{발산} & (n\geq 4)\end{cases}$

$\therefore n$은 3 이하의 자연수

$f'(x)=x^{m-1}(x-2)^{n-1}\{(m+n)x-2m\}$이므로

$$g(x)=x-\frac{x^m(x-2)^n}{x^{m-1}(x-2)^{n-1}\{(m+n)x-2m\}}$$

(ⅰ) $m\geq 2$, $n\geq 2$일 때

함수 $g(x)$는 $x\neq 0$, $x\neq 2$, $x\neq\dfrac{2m}{m+n}$인 모든 실수에서 정의된다.

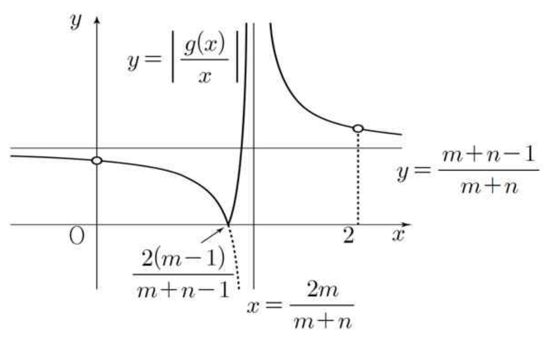
$$g(x)=\frac{x\{(m+n-1)x-2(m-1)\}}{(m+n)x-2m}$$

$$\frac{g(x)}{x}=\frac{(m+n-1)x-2(m-1)}{(m+n)x-2m}$$

$$=\frac{\dfrac{2n}{(m+n)^2}}{x-\dfrac{2m}{m+n}}+\frac{m+n-1}{m+n}$$

이고 점근선의 방정식은

$x=\dfrac{2m}{m+n}$, $y=\dfrac{m+n-1}{m+n}$



$\dfrac{g(x)}{x}=0$에서 $x=\dfrac{2(m-1)}{m+n-1}$

함수 $\left|\dfrac{g(x)}{x}\right|$는 $x=\dfrac{2(m-1)}{m+n-1}$일 때 연속이고 미분가능하지 않다.

(다)에서

$\dfrac{2(m-1)}{m+n-1}=\dfrac{5}{4}$

$m=\dfrac{5n+3}{3}$

m은 자연수이고 $n\leq 3$인 자연수이므로

$m=6$, $n=3$

(ⅱ) $m\neq 1$, $n=1$일 때

함수 $g(x)$는 $x\neq 0$, $x\neq\dfrac{2m}{m+1}$인 모든 실수에서 정의된다.

$$g(x)=\frac{x\{mx-2(m-1)\}}{(m+1)x-2m}$$

함수 $\left|\dfrac{g(x)}{x}\right|$는 $x=\dfrac{2(m-1)}{m}$일 때 연속이고 미분가능하지 않다.

$\dfrac{2(m-1)}{m}=\dfrac{5}{4}$

$\therefore$ 자연수 m이 존재하지 않는다.

(ⅲ) $m=1$, $n\neq 1$일 때

함수 $g(x)$는 $x\neq 2$, $x\neq\dfrac{2}{n+1}$인 모든 실수에서 정의된다.

$$g(x)=\frac{nx^2}{(n+1)x-2}$$

함수 $\left|\dfrac{g(x)}{x}\right|$는 $x=\dfrac{5}{4}$에서 미분가능하므로

조건 (다)를 만족시키지 않는다.

(ⅳ) $m=n=1$일 때

$g(x)$는 $x\neq 1$인 모든 실수에서 정의된다.

$$g(x)=\frac{x^2}{2x-2}$$

함수 $\left|\frac{g(x)}{x}\right|$는 $x=\frac{5}{4}$에서 미분가능하므로

조건 (다)를 만족시키지 않는다.

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ), (ⅳ)에 의하여 $m=6$, $n=3$

$$\therefore g(x)=\frac{2x(4x-5)}{3(3x-4)}$$

$$g'(x)=\frac{8(3x^2-8x+5)}{3(3x-4)^2}$$

$g'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=\frac{5}{3}$

함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면

x	$\cdots$	1	$\cdots$	$\left(\frac{4}{3}\right)$	$\cdots$	$\frac{5}{3}$	$\cdots$
$g'(x)$	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
$g(x)$	$\nearrow$	$\frac{2}{3}$	$\searrow$		$\searrow$	$\frac{50}{27}$	$\nearrow$

함수 $g(x)$의 극솟값 k는 $\frac{50}{27}$

따라서 $27k=50$

27) [정답] **71**

[해설]

$f(x)=a(x-m)^2+n$이라 하자.

$f'(x)=2a(x-m)$이고 $f''(x)=2a$이다.

두 곡선 $y=f(x)$와 $y=|f'(x)|$는 각각

직선 $x=m$에 대하여 대칭이므로

함수 $g(x)=|f'(x)|e^{f(x)}$의 그래프도

직선 $x=m$에 대하여 대칭이다.

(ⅰ) $x>m$인 경우

$a>0$이면 함수 $y=f'(x)e^{f(x)}$는

실수 전체에서 증가하므로 함수 $g(x)$의 최댓값이 존재하지 않는다.

그러므로 조건 (나)에 의하여 $a<0$이다.

$g'(x)=-\left(f'(x)e^{f(x)}\right)'$ $g'(x)=-\left[f''(x)+\{f'(x)\}^2\right]e^{f(x)}$

$g'(x)=\{-4a^2(x-m)^2-2a\}e^{f(x)}$

방정식 $g'(x)=0$을 만족하는 x는 한 개이고

그 값을 $p\ (p>m)$이라 하자.

함수 $g(x)$는 $x=p$에서 극댓값을 갖고,

그 값이 최댓값이다.

(ⅱ) $x<m$인 경우

함수 $y=g(x)$의 그래프는

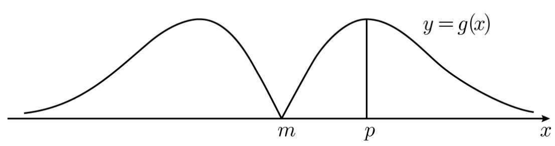
직선 $x=m$에 대하여 대칭이므로

함수 $g(x)$는 $x=2m-p$에서 극댓값을 갖고,

그 값이 최댓값이다.

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 함수 $y=g(x)$의 그래프의 개형은

다음과 같다.



$g(m)=0$이고, 함수 $g(x)$는 $x=2$에서 극솟값을 가지므로

$m=2$이다.

함수 $g(x)$는 $x=p$에서 최댓값이 $4\sqrt{e}$이므로

$g(p)=|f'(p)|e^{f(p)}=4\sqrt{e}$이다.

상수항을 포함한 모든 항의 계수가 유리수이므로

$f'(p)=2a(p-2)=-4$ …… ㉠

$f(p)=a(p-2)^2+n=\frac{1}{2}$ …… ㉡

또한 함수 $g(x)$는 $x=p$에서 극댓값을 가지므로

$g'(p)=0$에서 $2a(p-2)^2+1=0$ …… ㉢

㉠, ㉡, ㉢에 의하여 $n=1$, $p=\frac{9}{4}$이므로

$a=-8$

$f(x)=a(x-m)^2+n=-8(x-2)^2+1$

따라서 $|f(-1)|=71$

28) [정답] **6**

[해설]

함수 $h(x)$의 최솟값이 $g(k)$이므로 $|g(k)-f(0)|=g(k)$에서

$g(k)-f(0)=g(k)$ 또는 $g(k)-f(0)=-g(k)$

그런데 $f(0)=\ln 2+2\neq 0$ 이므로 $g(k)-f(0)=-g(k)$

즉 $g(k)=\frac{1}{2}f(0)=\ln\sqrt{2}+1$

한편, 함수 $y=g(x)-f(x-k)$의 그래프가 x축과 만나면 함수 $h(x)$의 최솟값은 0이다.

$f(x)>0$이고, $f'(x)=\frac{e^x}{e^x+1}+2e^x>0$이므로 함수 $y=g(x)-f(x-k)$의 그래프는 제3사분면과 제4사분면에 그려진다.

즉 $h(x)=f(x-k)-g(x)$

$h'(x)=f'(x-k)-g'(x)$이므로

$h'(k)=f'(0)-g'(k)=0$에서

$g'(k)=f'(0)=\frac{1}{2}+2=\frac{5}{2}$

$g(x)=ax^2+bx+c\ (a\neq 0)$으로 놓으면

$g'(x)=2ax+b$

$g(k)=ak^2+bk+c=\ln\sqrt{2}+1$ …… ㉠

$g'(k)=2ak+b=\frac{5}{2}$ …… ㉡

이때, $h(k-1)<h(k+1)$이므로

닫힌 구간 $[k-1,\ k+1]$에서 함수 $h(x)$의 최댓값은 $h(k+1)$이다.

$h(k+1)=f(1)-g(k+1)$

$=\ln(1+e)+2e-a(k+1)^2-b(k+1)-c$

$=\ln(1+e)+2e-(ak^2+bk+c)-(2ak+b)-a$

㉠, ㉡에서

$h(k+1)=\ln(1+e)+2e-(\ln\sqrt{2}+1)-\frac{5}{2}-a$

함수 $h(x)$의 최댓값이 $2e+\ln\left(\frac{1+e}{\sqrt{2}}\right)$이므로

$\ln(1+e)+2e-(\ln\sqrt{2}+1)-\frac{5}{2}-a=2e+\ln\left(\frac{1+e}{\sqrt{2}}\right)$에서

$a=-\frac{7}{2}$

따라서

$g'\left(k-\frac{1}{2}\right)=2a\left(k-\frac{1}{2}\right)+b=(2ak+b)-a=\frac{5}{2}-\left(-\frac{7}{2}\right)=6$

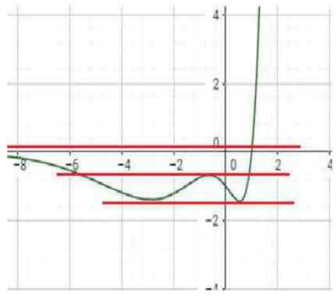
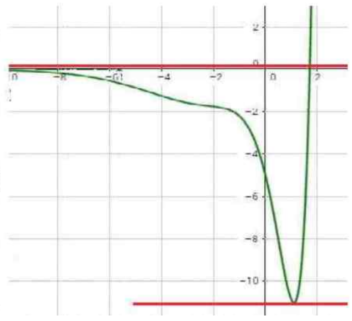
29) [정답] 49

[해설]

$f(x)=(x^3-a)e^x$에서 $f'(x)=(x^3+3x^2-a)e^x$이므로

가능한 극점의 개수는 1개 또는 3개 인데,

$\lim_{x\to-\infty}f(x)=0,\ \lim_{x\to\infty}f(x)=\infty$이므로 그래프의 개형은 극점에 개수에 따라 다음과 같다.

극점이 3개인 경우는 $g(t)$가 불연속인 점이 3곳이고

극점이 1개인 경우는 $g(t)$가 불연속인 점이 2곳이다.

따라서 주어진 조건을 만족하려면 극점이 1개일 때이다.

$f'(x)$에서 $h(x)=x^3+3x^2-a$의 값의 부호의 변화가 1번만 생길 때이다. $h(x)$에 대하여 살펴보면

$h'(x)=3x^2+6x=3x(x+2)$

이므로 위의 조건을 만족하려면 $h(0)h(-2)\geq 0$이다.

$h(0)h(-2)=a(a-4)\geq 0,\ a\leq 0$ 또는 $a\geq 4$

그러므로 10 이하의 자연수 a의 값의 합은

$4+5+6+7+8+9+10=49$

30) [정답] ④

[해설]

ㄱ. (가)의 $F(x)=f(x)-x$를 (나)의 $F(x)$에 대입하면

$\int_0^1 F(x)dx=\int_0^1\{f(x)-x\}dx$

$=\int_0^1 f(x)dx-\int_0^1 x\,dx$

$=\int_0^1 f(x)dx-\frac{1}{2}$

$=F(1)-\frac{1}{2}$

이므로 $F(1)=e-\frac{5}{2}+\frac{1}{2}=e-2$ (거짓)

ㄴ. (가)의 $F(x)=f(x)-x$를 $\int_0^1 xF(x)dx$의 $F(x)$에 대입하면

$\int_0^1 xF(x)dx=\int_0^1 x\{f(x)-x\}dx$

$=\int_0^1\{xf(x)-x^2\}dx$

$=\int_0^1 xf(x)\,dx-\int_0^1 x^2\,dx$

$=\left[xF(x)\right]_0^1-\int_0^1 F(x)\,dx-\frac{1}{3}$

$=F(1)-\left(e-\frac{5}{2}\right)-\frac{1}{3}$

$=e-2-e+\frac{5}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$ (참)

ㄷ. $F(0)=\int_0^0 f(t)\,dt=0$ 이고, $F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면 $F'(x)=f(x)$

(가)에 의해서

$\int_0^1 \{F(x)\}^2\,dx=\int_0^1 F(x)\{f(x)-x\}\,dx$

$=\int_0^1 F(x)f(x)\,dx-\int_0^1 xF(x)\,dx$

$=\int_0^1 F(x)F'(x)\,dx-\int_0^1 xF(x)\,dx$

$=\left[\frac{1}{2}\{F(x)\}^2\right]_0^1-\frac{1}{6}$

$=\frac{1}{2}\{F(1)\}^2-\frac{1}{2}\{F(0)\}^2-\frac{1}{6}$

$=\frac{1}{2}(e-2)^2-\frac{1}{6}$

$=\frac{1}{2}e^2-2e+\frac{11}{6}$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

[다른 풀이]

$F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$F'(x)=f(x)$

조건 (가)의 $F(x)=f(x)-x$ 의 양변을 x 에 대하여 두 번 미분하면 $f'(x)=f''(x)$

$\frac{f''(x)}{f'(x)}=1$ 이므로 양변을 x 에 대하여 적분하면

$\ln|f'(x)|=x+C_1$ (단, C_1 는 적분상수)

$f'(x)=C_2e^x$ (단, C_2 는 상수)이므로 양변을 x 에 대하여 적분하면 $f(x)=C_2e^x+C_3$ (단, C_3 은 적분상수)

$0=F(0)=f(0)-0,\ f(0)=0$

$f(x)=f'(x)-1$ 이므로 $f'(0)=1$

$f'(x)=C_2e^x,\ f(x)=C_2e^x+C_3$ 에 $x=0$ 을 대입하면

$f'(0)=C_2=1,\ f(0)=C_2+C_3=0,\ C_3=-1$

$f(x)=e^x-1$

이를 조건 (가)에 대입하면

$F(x)=e^x-x-1$

$\int_0^1 F(x)\,dx=\int_0^1 (e^x-x-1)\,dx$

$=\left[e^x-\frac{1}{2}x^2-x\right]_0^1$

$=(e-1)-\frac{1}{2}-1$

$=e-\frac{5}{2}$

이므로 함수 $F(x)=e^x-x-1$ 은 조건 (나)를 만족시킨다.

ㄱ. $F(1)=e^1-1-1=e-2$ (거짓)

ㄴ. $\int_0^1 xF(x)\,dx=\int_0^1 x(e^x-x-1)\,dx$

$=\int_0^1 xe^x\,dx-\int_0^1 x^2\,dx-\int_0^1 x\,dx$

$=\left[xe^x\right]_0^1-\int_0^1 e^x\,dx-\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1-\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^1$

$=\left[xe^x\right]_0^1-\left[e^x\right]_0^1-\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1-\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^1$

$=e-(e-1)-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$ (참)

ㄷ. $\int_0^1 \{F(x)\}^2\,dx=\int_0^1 (e^x-x-1)^2\,dx$

$=\int_0^1 \{e^{2x}+x^2+1-2xe^x+2x-2e^x\}\,dx$

$=\int_0^1 e^{2x}\,dx+\int_0^1 x^2\,dx+\int_0^1 1\,dx$

$-2\int_0^1 xe^x\,dx+\int_0^1 2x\,dx-2\int_0^1 e^x\,dx$

$=\left[\frac{e^{2x}}{2}\right]_0^1+\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1+\left[x\right]_0^1$

$-2\left[xe^x\right]_0^1+2\left[e^x\right]_0^1+\left[x^2\right]_0^1-2\left[e^x\right]_0^1$

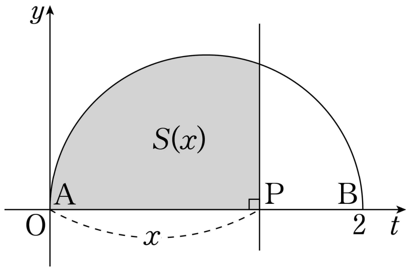
$=\frac{1}{2}(e^2-1)+\frac{1}{3}+1-2\times1+1-2(e-1)=\frac{1}{2}e^2-2e+\frac{11}{6}$

(참)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

31) [정답] 80

[해설]



$S(x)=\int_0^x \sqrt{1-(t-1)^2}\,dt$ 이므로

$S'(x)=\sqrt{1-(x-1)^2}$

$f(\theta)=S(1+\sin\theta)-S(1+\cos\theta)$ 라 하면

$f'(\theta)=S'(1+\sin\theta)\cos\theta+S'(1+\cos\theta)\sin\theta$

$=\sqrt{1-\sin^2\theta}\cos\theta+\sqrt{1-\cos^2\theta}\cos\theta$

$=|\cos\theta|\cos\theta+|\sin\theta|\sin\theta$

(i) $0\le\theta<\frac{\pi}{2}$일 때,

$f'(\theta)=\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$이므로 $f(\theta)=\theta+C_1$

(C_1은 적분상수)

$f(0)=S(1)-S(2)=-\frac{\pi}{4}$ 이므로 $C_1=-\frac{\pi}{4}$

따라서 $f(\theta)=\theta-\frac{\pi}{4}$

(ii) $\frac{\pi}{2}\le\theta<\pi$일 때,

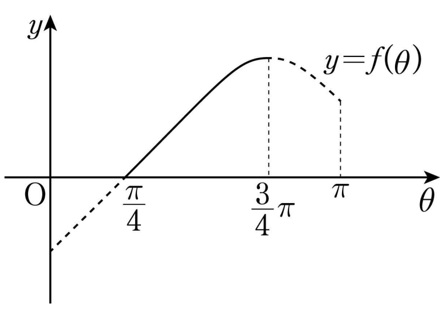
$f'(\theta)=-\cos^2\theta+\sin^2\theta=-\cos2\theta$ 이므로

$f(\theta)=-\frac{1}{2}\sin2\theta+C_2$ (C_2는 적분상수)

$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=S(2)-S(1)=\frac{\pi}{4}$ 이므로 $C_2=\frac{\pi}{4}$

따라서 $f(\theta)=-\frac{1}{2}\sin2\theta+\frac{\pi}{4}$

(i), (ii)에 의해 $y=f(\theta)$ 의 구간 $\left[\frac{\pi}{4},\,\frac{3}{4}\pi\right]$에서의 그래프는 그림의 실선 부분이다.



$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi} f(\theta)\,d\theta=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)d\theta+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{4}\pi}\left(-\frac{1}{2}\sin2\theta+\frac{\pi}{4}\right)d\theta$$

$$=\left[\frac{1}{2}\theta^2-\frac{\pi}{4}\theta\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}+\left[\frac{1}{4}\cos2\theta+\frac{\pi}{4}\theta\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{4}\pi}$$

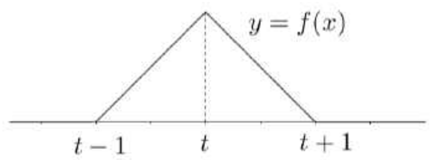
$$=\frac{1}{4}+\frac{3}{32}\pi^2$$

따라서 $p=\frac{1}{4}$, $q=\frac{3}{32}$ 이므로 $\frac{30p}{q}=80$

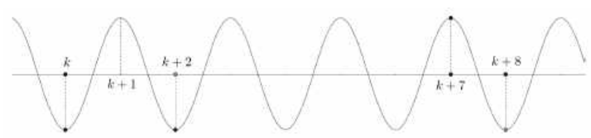
32) [정답] 21

[해설]

함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



한편, 함수 $y=\cos(\pi x)$의 주기는 $\frac{2\pi}{\pi}=2$이므로 홀수 k에 대하여 함수 $y=\cos(\pi x)$의 그래프는 다음과 같다.



한편, $x<t-1$ 또는 $x>t+1$일 때 $f(x)=0$이므로 닫힌 구간 $[a,\ b]$가 $(-\infty,\ t-1]$에 포함되거나 $[t+1,\ \infty)$에 포함되면

$$\int_a^b f(x)\cos(\pi x)\,dx=0$$

이다.

따라서 t의 값을 증가시키면서 함수 $g(t)$를 구하면 다음과 같다.

(i) $t+1\le k$일 때

$g(t)=\int_k^{k+8} f(x)\cos(\pi x)\,dx$

$=\int_k^{k+8} 0\times\cos(\pi x)\,dx=0$

(ii) $t-1\le k\le t+1$일 때

$g(t)=\int_k^{k+8} f(x)\cos(\pi x)\,dx$

$=\int_k^{t+1} f(x)\cos(\pi x)\,dx$

(iii) $k\le t-1<t+1\le k+8$일 때

$g(t)=\int_k^{k+8} f(x)\cos(\pi x)\,dx$

$=\int_{t-1}^{t+1} f(x)\cos(\pi x)\,dx$

(iv) $t-1 \le k+8 \le t+1$일 때

$g(t)=\int_{k}^{k+8} f(x)\cos(\pi x)\,dx$

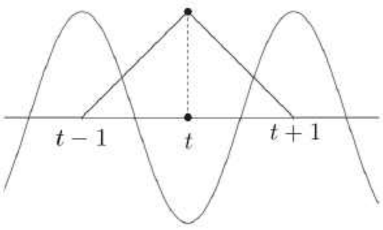
$=\int_{t-1}^{k+8} f(x)\cos(\pi x)\,dx$

(v) $t-1 \ge k+8$일 때

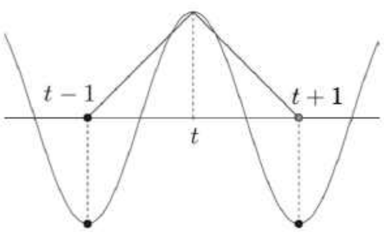
$g(t)=\int_{k}^{k+8} f(x)\cos(\pi x)\,dx$

$=\int_{k}^{k+8} = \times\cos(\pi x)\,dx=0$

한편, 다음 그래프에서 함수 $\int_{t-1}^{t+1} f(x)\cos(\pi x)\,dx$는 t가 홀수일 때 극소이자 최소이고, t가 짝수일 때 극대이자 최대임을 알 수 있다.



[t가 홀수일 때]



[t가 짝수일 때]

그런데,

$\int_{0}^{1} (1-x)\cos(\pi x)\,dx$

$=\left[\frac{1}{\pi}(1-x)\sin(\pi x)\right]_{0}^{1}+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{1}\sin(\pi x)\,dx$

$=0+\frac{1}{\pi}\left[-\frac{1}{\pi}\cos(\pi x)\right]_{0}^{1}$

$=\frac{2}{\pi^2}$

이므로 t가 $k \le t-1 < t+1 \le k+8$인 홀수일 때

$g(t)=\int_{k}^{k+8} f(x)\cos(\pi x)\,dx$

$=\int_{t-1}^{t+1} f(x)\cos(\pi x)\,dx$

$=\int_{-1}^{1} f(x+t)\cos\{\pi(x+t)\}\,dx$

$=-\int_{-1}^{1} (1-|x|)\cos(\pi x)\,dx$

$=-2\int_{0}^{1} (1-x)\cos(\pi x)\,dx$

$=-\frac{4}{\pi^2}$

이고, t가 $k \le t-1 < t+1 \le k+8$인 짝수일 때

$g(t)=\int_{k}^{k+8} f(x)\cos(\pi x)\,dx$

$=\int_{t-1}^{t+1} f(x)\cos(\pi x)\,dx$

$=\int_{-1}^{1} f(x+t)\cos\{\pi(x+t)\}\,dx$

$=\int_{-1}^{1} (1-\{x\})\cos(\pi x)\,dx$

$=2\int_{0}^{1} (1-x)\cos(\pi x)\,dx$

$=\frac{4}{\pi^2}$

이다.

그런데 k는 홀수이므로 함수 $g(t)$는 다음과 같이 극솟값을 갖는다.

(1) $t=k$에서 극솟값

$\int_{k}^{k+8} f(x)\cos(\pi x)\,dx$

$=\int_{k}^{k+1} f(x)\cos(\pi x)\,dx$

$=-\int_{0}^{1} (1-x)\cos(\pi x)\,dx$

$=-\frac{2}{\pi^2}$

을 갖는다.

(2) $t=k+8$에서 극솟값

$\int_{k}^{k+8} f(x)\cos(\pi x)\,dx$

$=\int_{k+7}^{k+8} f(x)\cos(\pi x)\,dx$

$=-\int_{-1}^{0} (1+x)\cos(\pi x)\,dx$

$=-\int_{0}^{1} (1-x)\cos(\pi x)\,dx$

$=-\frac{2}{\pi^2}$

를 갖는다.

(3) $t=k+2$에서 극솟값

$\int_{k}^{k+8} f(x)\cos(\pi x)\,dx$

$= \int_{k+1}^{k+3} f(x)\cos(\pi x)\,dx$

$= -\int_{-1}^{1} (1+x)\cos(\pi x)\,dx$

$= -2\int_{0}^{1} (1-x)\cos(\pi x)\,dx$

$= -\dfrac{4}{\pi^2}$

를 갖는다.

(4) $t=k+4$, $+6$에서도 (3)과 마찬가지로 극솟값

$-\dfrac{4}{\pi^2}$

를 갖는다.

이상에서

$\alpha_1 = k$, $\alpha_2 = k+2$, $\alpha_3 = k+4$, $a_4 = k+6$, $\alpha_5 = k+8$

이고,

$g(\alpha_1)= g(\alpha_8)= -\dfrac{2}{\pi^2}$

$g(\alpha_2)= g(\alpha_3)= g(\alpha_4)= -\dfrac{4}{\pi^2}$

이다.

이때 $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i = 5k+20 = 45$이므로

$k=5$

또,

$\sum_{i=1}^{m} g(\alpha_i) = \sum_{i=1}^{5} g(\alpha_i)$

$= -\dfrac{1}{\pi^2}(2+4+4+4+2)$

$= -\dfrac{16}{\pi^2}$

따라서

$k - \pi^2 \sum_{i=1}^{m} g(\alpha_i) = 5 - \pi^2 \times \left(-\dfrac{16}{\pi^2}\right)$

$= 5+16 = 21$

33) [정답] 16

[해설]

$g(x)= \int_{a}^{x} f(t)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$g'(x)= f(x)$

조건 (가)에서 $g'(1)=0$이므로

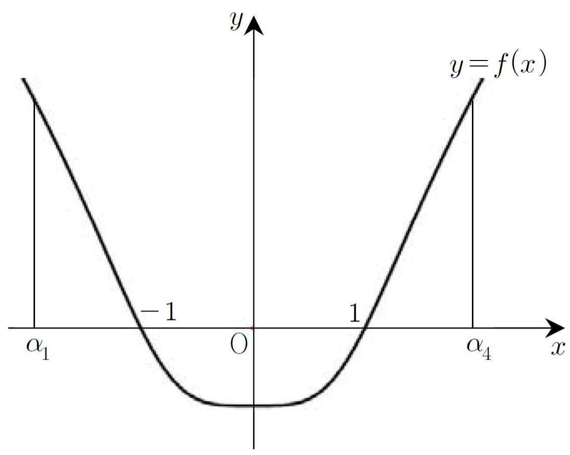
$f(1)= \ln 2 - c = 0$에서 $c = \ln 2$

$f(x)= \ln(x^4+1) - \ln 2$

$f'(x)= \dfrac{4x^3}{x^4+1}$

$f'(x)=0$에서 $x=0$

함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극솟값 $-\ln 2$를 갖고, 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)= f(x)$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



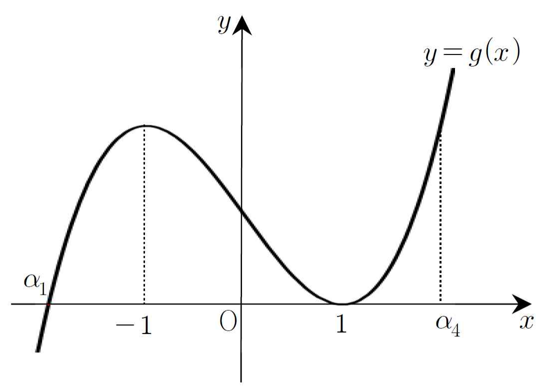
조건 (가)에서 그림과 같이 곡선 $y=f(x)$와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이와 곡선 $y=f(x)$와 x축 및 직선 $x=\alpha_1\,(\alpha_1 < -1)$로 둘러싸인 부분의 넓이가 같아지도록 α_1을 정할 수 있다.

이때, $g(x)= \int_{a}^{x} f(t)dt = 0$을 만족시키는 서로 다른 실근의 개수가 2가 되도록 하는 a의 값은

α_1, $\alpha_2 = -1$, $\alpha_3 = 1$, $\alpha_4 = -\alpha_1$

이므로 $m=4$이다.

따라서 조건을 만족시키는 함수 $y=g(x)$의 그래프는 그림과 같다.



한편,

$\int_0^1 |f(x)|dx = \int_0^1 \{-f(x)\}dx$

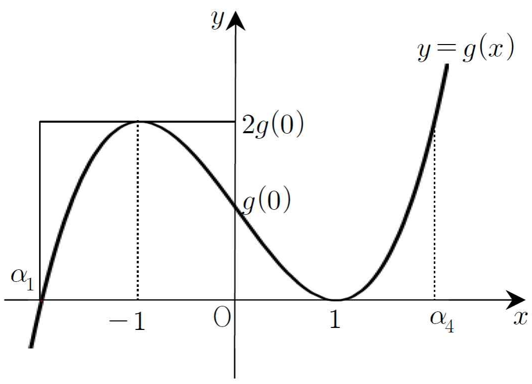
$= \int_0^1 \{-g'(x)\}dx$

$= \Big[-g(x)\Big]_0^1$

$= -g(1)+g(0)$

$= g(0)$

즉, $g(0) = \int_0^1 |f(x)|dx$



$\int_{\alpha_1}^{\alpha_4} g(x)dx$의 값은 위의 그림에서 직사각형의 넓이와 같으므로

$\int_{\alpha_1}^{\alpha_4} g(x)dx = (0-\alpha_1)\times 2g(0)$

$= -2\alpha_1 \times \int_0^1 |f(x)|dx$

$= 2\alpha_4 \times \int_0^1 |f(x)|dx$

이므로 조건 (나)에서 $k=2$

따라서 $c=\ln 2$, $m=4$, $k=2$이므로

$mk\times e^c = 4\times 2\times e^{\ln 2}$

$= 4\times 2\times 2 = 16$

34) [정답] ②

[해설]

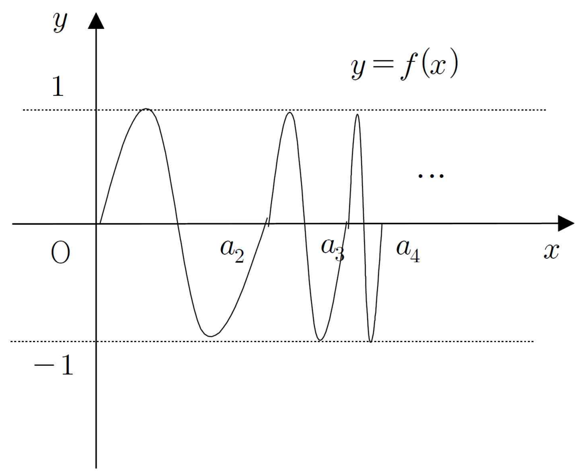
방정식 $\int_\alpha^t f(x)dx = 0$에서 $\int_\alpha^0 f(x)dx + \int_0^t f(x)dx = 0$

$\int_0^t f(x)dx = -\int_\alpha^0 f(x)dx$

이 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 함수 $y=\int_0^t f(x)dx$의 그래프와 직선 $y=-\int_\alpha^0 f(x)dx$의 교점의 개수이다.

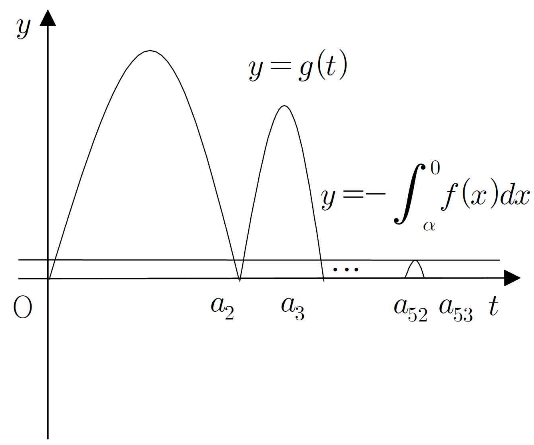
한편, $f(x)=\sin(2^n\pi x)$ $(a_n \le x \le a_{n+1})$

이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



$g(t)=\int_0^t f(x)dx$라 하면 $g'(t)=f(t)$이므로 함수 $y=g(t)$의 그래프는 그림과 같다.

이때, 함수 $y=g(t)$의 그래프와 직선 $y=-\int_\alpha^0 f(x)dx$의 교점의 개수가 103이기 위해서는 곡선 $y=g(t)$와 직선 $y=-\int_\alpha^0 f(x)dx$가 구간 $(a_{52},\ a_{53})$에서 접해야 한다.



한편 수직선 위에서 두 점 0, a_2의 중점을 b_1이라 하고, $n\ge 2$일 때, 두 점 a_n, a_{n+1}의 중점을 b_n이라 하면

$\int_0^{b_1} f(x)dx = \int_0^{b_1} \sin(2\pi x)dx$

$= \left[-\frac{1}{2\pi}\cos\pi x\right]_0^{\frac{1}{2}}$

$= -\frac{1}{2\pi}\{(-1)-1\} = \frac{1}{\pi}$

$\int_0^{b_2} f(x)dx = \int_0^{a_2} f(x)dx + \int_{a_2}^{b_2} f(x)dx$

$=\int_{a_2}^{b_2} f(x)\,dx$

$=\int_{0}^{\frac{1}{4}} \sin(2^2\pi x)\,dx$

$=\left[-\frac{1}{2^2\pi}\cos(2^2\pi x)\right]_0^{\frac{1}{4}}$

$=-\frac{1}{2^2\pi}\{(-1)-1\}$

$=\frac{1}{2\pi}$

이와 같은 방법으로 하면

$\int_{0}^{b_{52}} f(x)\,dx=\frac{1}{2^{51}\pi}$ ...... ㉠

한편,

$-\int_{\alpha}^{0} \sin(2\pi x)\,dx$

$=-\left[-\frac{1}{2\pi}\cos(2\pi x)\right]_{\alpha}^{0}$

$=\frac{1}{2\pi}\{1-\cos 2\pi\alpha\}$ ...... ㉡

㉠과 ㉡의 값이 같아야 하므로

$\frac{1}{2\pi}\{1-\cos(2\pi\alpha)\}=\frac{1}{2^{51}\pi}$

$1-\cos(2\pi\alpha)=\frac{1}{2^{50}}$

따라서 $\log_2(1-\cos(2\pi\alpha))=\log_2\frac{1}{2^{50}}=\log_2 2^{-50}=-50$

35) [정답] **253**

[해설]

$g(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{\{f(x)\}^{2n+1}-1}{\{f(x)\}^{2n}+1}$ 에서

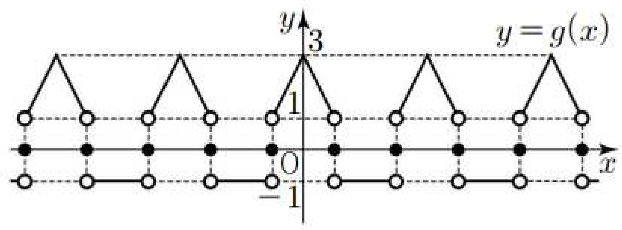
(i) $|f(x)|>1$ 일 때, $g(x)=f(x)$

(ii) $|f(x)|<1$ 일 때, $g(x)=-1$

(iii) $f(x)=1$ 일 때, $g(x)=0$

(iv) $f(x)=-1$ 일 때, $g(x)=-1$

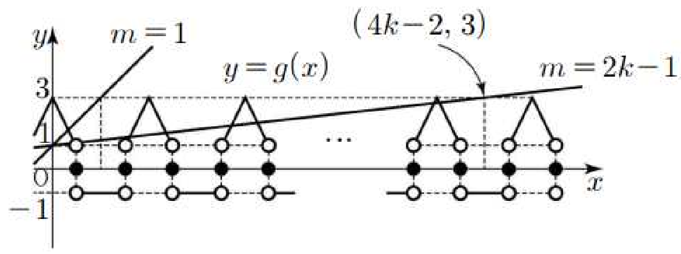
그러므로 함수 $g(x)$ 의 그래프는 그림과 같다.



방정식 $mg(x)=x+m$ 의 실근의 개수는 함수 $y=g(x)$ 의 그래프와 직선 $y=\frac{1}{m}x+1$ 이 만나는 점의 개수와 같다.

(i) $m=2k-1$ (k는 자연수)인 경우

(a) $x\geq 0$ 일 때,

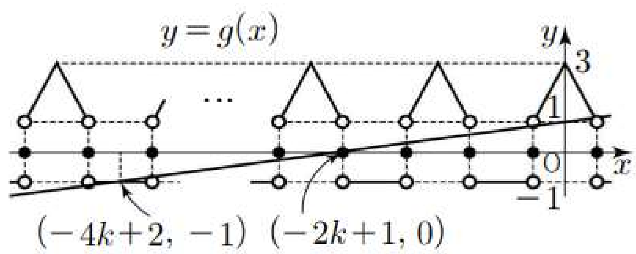


직선 $y=\frac{1}{m}x+1$ 이 함수 $y=g(x)$ 의 그래프 위에 있지 않은 점 $(4k-2,\ 3)$ 을 지난다.

$k=1$ 일 때, 만나는 점의 개수는 1

$k\geq 2$ 일 때, 함수 $y=g(x)$ 의 그래프와 직선 $y=\frac{1}{m}x+1$ 이 만나는 점의 개수는 구간 $(0,1)$에서 1, 구간 $(4l-5,4l-3)$ $(l=2,\ 3,\ \cdots,\ k)$에서 각각 2이다. 그러므로 함수 $y=g(x)$ 의 그래프와 직선 $y=\frac{1}{m}x+1$ 이 만나는 점의 개수는 $1+2(k-1)=2k-1$

(b) $x<0$ 일 때,

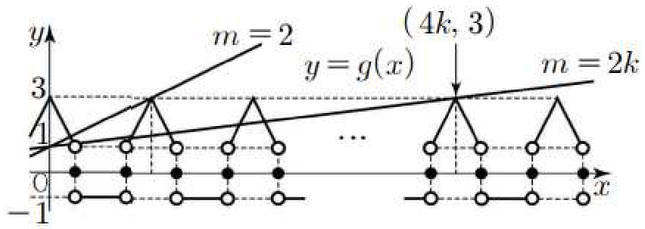


직선 $y=\frac{1}{m}x+1$ 이 점 $(-2k+1,\ 0)$ 과 $(-4k+2,\ -1)$ 을 지나므로 함수 $y=g(x)$ 의 그래프와 직선 $y=\frac{1}{m}x+1$ 이 만나는 점의 개수는 2 이다.

(a), (b)에 의하여 $a_{2k-1}=(2k-1)+2=2k+1$

(ii) $m=2k$ (k는 자연수)인 경우

(a) $x\geq 0$ 일 때,

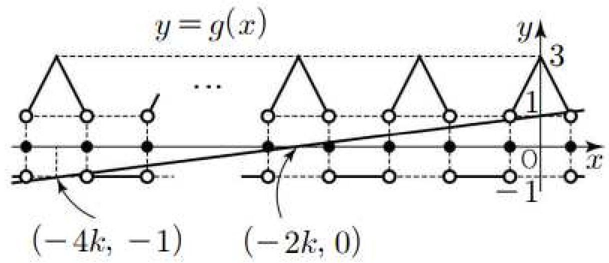


직선 $y=\frac{1}{m}x+1$이 함수 $y=g(x)$의 그래프 위의 점 $(4k,\ 3)$을 지난다.

$k=1$일 때, 만나는 점의 개수는 2

$k\geq 2$일 때, 함수 $y=g(x)$의 그래프와 직선 $y=\frac{1}{m}x+1$이 만나는 점의 개수는 구간 $(0,\ 1)$에서 1, 구간 $(4l'-5,\ 4l'-3)$ $(l'=2,\ 3,\ \cdots,\ k)$에서 각각 2이다. 그러므로 함수 $y=g(x)$의 그래프와 직선 $y=\frac{1}{m}x+1$이 만나는 점의 개수는 $1+2(k-1)+1=2k$

(b) $x<0$일 때,



직선 $y=\frac{1}{m}x+1$이 점 $(-2k,\ 0)$과 $(-4k,\ -1)$을 지나므로 함수 $y=g(x)$의 그래프와 직선 $y=\frac{1}{m}x+1$은 만나지 않는다. 그러므로 함수 $y=g(x)$의 그래프와 직선 $y=\frac{1}{m}x+1$이 만나는 점의 개수는 0이다.

(a), (b)에 의하여 $a_{2k}=2k+0=2k$

(ⅰ)과 (ⅱ)에 의하여

$a_{2k-1}=2k+1, a_{2k}=2k$ (k는 자연수)이며

$a_{2k-1}+a_{2k}=b_k$라 하면 $b_k=4k+1$

따라서

$$\sum_{m=1}^{21}a_m=\sum_{m=1}^{20}a_m+a_{21}$$

$$=\sum_{k=1}^{10}b_k+a_{21}$$

$$=\sum_{k=1}^{10}(4k+1)+23$$

$$=4\times\frac{10\times 11}{2}+10+23$$

$$=253$$

36) [정답] ②

[해설]

함수 $f(x)=\frac{x-1}{2x-6}$에 대하여

$$|f(3-a)|=\left|\frac{(3-a)-1}{2(3-a)-6}\right|=\left|\frac{2-a}{-2a}\right|=\left|\frac{a-2}{2a}\right|$$

$$|1-f(3+a)|=\left|1-\frac{(3+a)-1}{2(3+a)-6}\right|=\left|\frac{a-2}{2a}\right|$$

이다. $h(a)=\frac{a-2}{2a}$ $(a\neq 0)$라 하면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|f(3-a)|^{n+1}}{2^n+|1-f(3+a)|^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{|h(a)|^{n+1}}{2^n+|h(a)|^n}$$

이다.

(ⅰ) $|h(a)|<2$일 때,

$\left|\frac{h(a)}{2}\right|<1$이고 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{h(a)}{2}\right|^n=0$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|h(a)|^{n+1}}{2^n+|h(a)|^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2\left|\frac{h(a)}{2}\right|^{n+1}}{1+\left|\frac{h(a)}{2}\right|^n}=0$$

이 되어 $k=0$이다.

(ⅱ) $|h(a)|=2$일 때,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|h(a)|^{n+1}}{2^n+|h(a)|^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}}{2^n+2^n}=1$$

이 되어 $k=1$이다.

(ⅲ) $|h(a)|>2$일 때,

$\left|\frac{2}{h(a)}\right|<1$이고 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{2}{h(a)}\right|^n=0$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|h(a)|^{n+1}}{2^n+|h(a)|^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{|h(a)|}{\left|\frac{2}{h(a)}\right|^n+1}=|h(a)|$$

이다.

$|h(a)|=\left|\frac{a-2}{2a}\right|=\left|\frac{1}{a}-\frac{1}{2}\right|=k$ ($k\geq 3$인 자연수)를

만족시키는

a를 구하면

$\frac{1}{a}-\frac{1}{2}=k$일 때, $a=\frac{2}{2k+1}$

$\frac{1}{a}-\frac{1}{2}=-k$일 때, $a=-\frac{2}{2k-1}$

이다. 따라서 $g(k)=-2\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)$이다.

$\sum_{k=3}^{17} g(k)=-2\sum_{k=3}^{17}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)$

$=-2\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{7}-\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{33}-\frac{1}{35}\right)$

$=-2\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{35}\right)=-\frac{12}{35}$

37) [정답] ③

[해설]

점 $(a,\ 0)$에서 그은 접선이 곡선 $y=(x-n)e^x$과 만나는 점의 좌표를 $(t,\ (t-n)e^t)$라 하자.

$y'=e^x+(x-n)e^x=(x-n+1)e^x$이므로 점 $(t,\ (t-n)e^t)$에서 이 곡선에 그은 접선의 방정식은

$y=(t-n+1)e^t(x-t)+(t-n)e^t$

이 직선이 점 $(a,\ 0)$을 지나므로

$0=(t-n+1)e^t(a-t)+(t-n)e^t$

$t^2-(n+a)t+an+n-a=0$

이 방정식의 판별식을 D라 하면

$D=(n+a)^2-4(an+n-a)$

$=(n-a)(n-a-4)$

ㄱ. $a=0$일 때 $n=4$이면 $D=0$이므로 점 $(0,\ 0)$에서 곡선 $y=(x-4)e^x$에 그은 접선의 개수는 1이다.

따라서 $f(4)=1$ (참)

ㄴ. $D=(n-a)(n-a-4)=0$에서

$n=a$ 또는 $n=a+4$이므로 $f(n)=1$인 정수 n의 개수는 항상 2이다. (거짓)

ㄷ. 정수 a에 대하여 $f(n)$은

$$f(n)=\begin{cases}0\,(a<n<a+4)\\1\,(n=a\text{또는}n=a+4)\\2\,(n<a\text{또는}n>a+4)\end{cases}$$

이므로 $f(n)$이 가질 수 있는 값은 0, 1, 2뿐이다.

이때 $\sum_{n=1}^{5} f(n)=5$이므로 가능한 경우는 다음과 같다.

(ⅰ) $f(1)=0,\ f(2)=0,\ f(3)=1,\ f(4)=2,$ $f(5)=2$ 인 경우는 $3=a+4,\ a=-1$

(ⅱ) $f(1)=2,\ f(2)=2,\ f(3)=1,\ f(4)=0,$ $f(5)=0$ 인 경우는 $3=a,\ a=3$

따라서 $a=-1$ 또는 $a=3$ (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

38) [정답] 27

[해설]

$g'(x)=\frac{-\cos(f(x))\times f'(x)}{\{2+\sin(f(x))\}^2}$이므로

$g'(x)=0$에서

$\cos(f(x))=0$ 또는 $f'(x)=0$

이때, $\cos(f(x))=0$에서

$f(x)=\pm\frac{\pi}{2}$ 또는 $f(x)=\pm\frac{3}{2}\pi$ 또는 $f(x)=\pm\frac{5}{2}\pi\cdots$

그런데 조건 (가)에서 $\frac{1}{g(\alpha_1)}=\frac{1}{g(0)}=2+\sin(f(0))=\frac{5}{2}$

이므로 $\sin(f(0))=\frac{1}{2}$

이때 $0<f(0)<\frac{\pi}{2}$ 이므로

$f(0)=\frac{\pi}{6}$ ······㉠

따라서 $\cos(f(\alpha_1))=\cos(f(0))\neq 0$이므로

$f'(0)=0$ ······㉡

㉠, ㉡에서

$f(x)=6\pi x^3+px^2+\frac{\pi}{6}$ (p는 상수)로 놓으면 조건 (나)에서

$\frac{1}{g(\alpha_5)}-\frac{1}{g(\alpha_2)}=\sin(f(\alpha_5))-\sin(f(\alpha_2))=\frac{1}{2}$ ······㉢

이때, $\cos(f(x))=0$이면

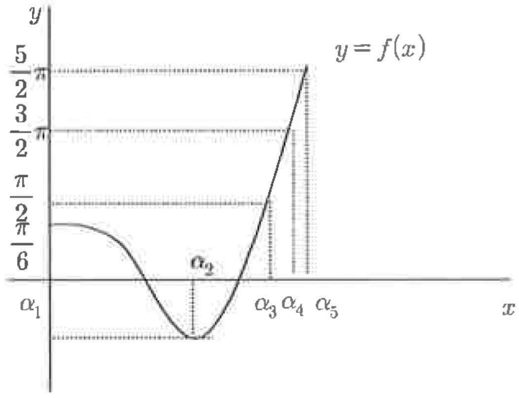
$\sin(f(x))=-1$ 또는 $\sin(f(x))=1$ 이므로

㉢을 만족시키기 위해서는

$f'(\alpha_2)=0,\ f'(\alpha_5)\neq 0$ 또는 $f'(\alpha_2)\neq 0,\ f'(\alpha_5)=0$

(ⅰ) $f'(\alpha_2)=0,\ f'(\alpha_5)\neq 0$인 경우

$x\geq 0$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



$f(\alpha_5)=\frac{5}{2}\pi$이므로

$\sin(f(\alpha_5))-\sin(f(\alpha_2))=1-\sin(f(\alpha_2))=\frac{1}{2}$

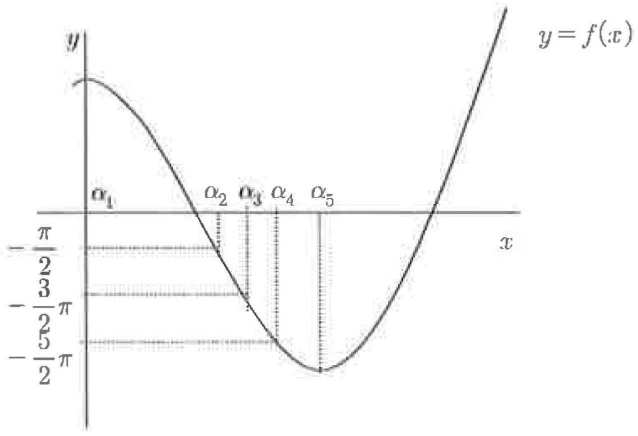
$\sin(f(\alpha_2))=\frac{1}{2}$ ……㉣

그런데, $-\frac{\pi}{2}<f(\alpha_2)<\frac{\pi}{6}$이므로

㉣을 만족시키는 α_2는 존재하지 않는다.

(ii) $f'(\alpha_2)\neq 0$, $f'(\alpha_5)=0$인 경우 $x\geq 0$에서

함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



이때

$\sin(f(\alpha_2))=\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-1$

이므로 $\sin(f(\alpha_5))=-\frac{1}{2}$이어야 한다.

따라서, $\cos(f(\alpha_5))\neq 0$이므로 $f'(\alpha_5)=0$

이고 위의 그림에서

$-\frac{7}{2}\pi<f(\alpha_5)<-\frac{5}{2}\pi$

이므로 $f(\alpha_5)=-3\pi+\frac{\pi}{6}$

즉 $f'(x)=18\pi x^2+2px=2x(9\pi x+p)=0$에서

$\alpha_5=-\frac{p}{9\pi}$ 이므로

$f(\alpha_5)=f\left(-\frac{p}{9\pi}\right)$

$=6\pi\times\left(-\frac{p}{9\pi}\right)^3+p\left(-\frac{p}{9\pi}\right)^2+\frac{\pi}{6}$

$=-3\pi+\frac{\pi}{6}$

$\frac{-2p^3}{3^5\pi^2}+\frac{p^3}{3^4\pi^2}=-3\pi$, $p^3 3^5\pi^2=-3\pi$

$p^3=-3^6\pi^3$

따라서 $p=-3^2\pi=-9\pi$ 이므로

$f(x)=6\pi x^3-9\pi x^2+\frac{\pi}{6}$

$f'(x)=18\pi x^2-18\pi x$

따라서

$f'\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{9}{2}\pi+9\pi=\frac{27}{2}\pi$

$f\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{3}{4}\pi-\frac{9}{4}\pi+\frac{\pi}{6}=-3\pi+\frac{\pi}{6}$

$\sin\left(f\left(-\frac{1}{2}\right)\right)=\sin\left(-3\pi+\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1}{2}$

$\cos\left(f\left(-\frac{1}{2}\right)\right)=\cos\left(-3\pi+\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$g'\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{-\cos\left(f\left(-\frac{1}{2}\right)\right)\times f'\left(-\frac{1}{2}\right)}{\left\{2+\sin\left(f\left(-\frac{1}{2}\right)\right)\right\}^2}$$

$$=\frac{-\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\times\frac{27}{2}\pi}{\left(2-\frac{1}{2}\right)^2}$$

$$=\frac{27\sqrt{3}}{4}\pi\times\frac{4}{9}=3\sqrt{3}\pi$$

따라서

$\alpha^2=(3\sqrt{3})^2=27$

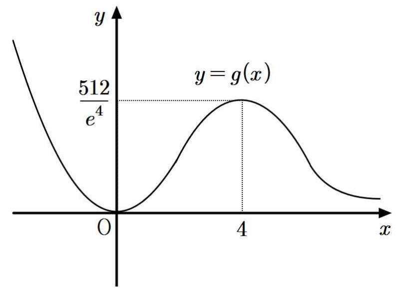
39) [정답] **30**

[해설]

$g(x)=2x^4e^{-x}$을 미분하면 $g'(x)=-2x^3(x-4)e^{-x}$이므로

$g(x)$의 극솟값은 $g(0)=0$이고 극댓값은 $g(4)=\frac{512}{e^4}$이다.

따라서 $y=g(x)$의 개형은 그림과 같다.



[그림1]

$h(x)=(f\circ g)(x)$에서 $h'(x)=f'(g(x))g'(x)$

(나)를 만족하기 위해서는 $h'(0)=0$이고 $x=0$의 좌우에서 부호가 바뀌어야 한다.

그런데 $h'(0)=f'(g(0))g'(0)$, 즉 $h'(0)=f'(0)g'(0)$

따라서 함수 $h(x)$가 $x=0$에서 극소이므로 함수 $f(x)$가 $x=0$에서 극솟값을 갖는다.

함수 $f(x)$가 $x=0,\ \alpha$에서 극솟값을 갖는다고 하자.

① $0=f(0)<f(\alpha)$이면 $h(x)=0$에서 $g(x)=0$이므로 실근은 $x=0$뿐이다.

② $0=f(\alpha)<f(0)$이면 $h(x)=0$에서 $g(x)=\alpha$이므로 [그림1]에서 실근의 개수는 3이하이다.

①, ②에서 (가)조건에 모순되므로 $f(0)=f(\alpha)$

이때, $h(x)=0$에서 $g(x)=0,\ \alpha$이므로 $0<\alpha<\frac{32}{e^4}$일 때 $h(x)=0$의 실근의 개수는 $1+3=4$이다.

또 그래프의 대칭성에 의하여 $y=f(x)$는 $x=\frac{\alpha}{2}$에서 극댓값을 갖는다.

(ⅰ) $f\left(\frac{\alpha}{2}\right)>8$일 때,

방정식 $f(x)=8$은 서로 다른 네 실근 $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \alpha_4$ $(\alpha_1<\alpha_2<\alpha_3<\alpha_4)$를 갖는데 방정식 $g(x)=\alpha_1,\ g(x)=\alpha_2,\ g(x)=\alpha_3,\ g(x)=\alpha_4$의 실근의 개수가 각각 0, 3, 3, 1이상이므로 방정식 $h(x)=8$의 실근의 개수는 7이상이다.
따라서 (다)조건에 부합하지 않는다.

(ⅱ) $f\left(\frac{\alpha}{2}\right)<8$이면 방정식 $h(x)=8$의 실근의 개수는 3이하이다.
따라서 이 범위에도 (다)조건에 부합하지 않는다.

(ⅰ), (ⅱ)에서 $f\left(\frac{\alpha}{2}\right)=8$

따라서 $f(x)=\frac{1}{2}x^2(x-\alpha)^2$이므로 $f\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{\alpha^4}{32}=8$

$\therefore \alpha=4$

$\therefore f(x)=\frac{1}{2}x^2(x-4)^2$

따라서 양변을 미분하면 $f'(x)=x(x-4)^2+x^2(x-4)$

$\therefore f'(x)=2x(x-4)(x-2)$

$\therefore f'(5)=2\cdot5\cdot1\cdot3=30$

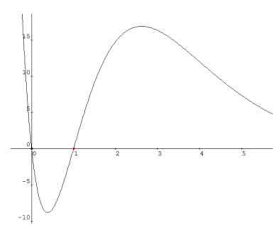
40) [정답] ②

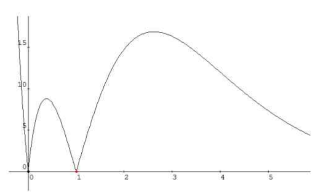
[해설]

$y=(x^2-x)e^{4-x}=x(x-1)e^{4-x}$

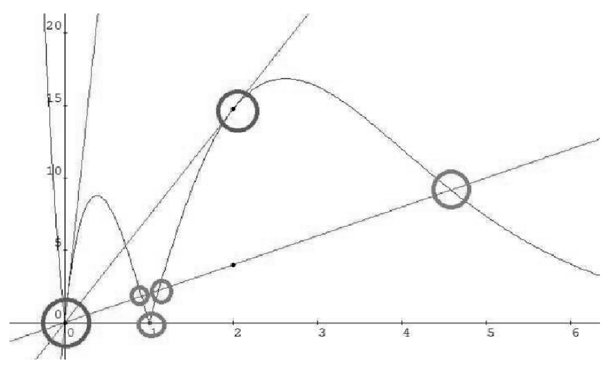
$y'=(2x-1)e^{4-x}-(x^2-x)e^{4-x}=(-x^2+3x-1)e^{4-x}$

$\lim(x^2-x)e^{4-x}=0$이다. 이것으로 부터 $y=(x^2-x)e^{4-x}$, $f(x)=|x^2-x|e^{4-x}$의 그래프의 개형은 다음과 같다.





이제 $y=kx(k>0)$와 $y=f(x)$에서 $g(x)$를 살펴보면 아래 그림과 같이 $y=kx$가 $y=f(x)$의 접선인 경우를 기준으로 동그라미에서 미분가능하지 않은 경우가 생긴다.



ㄱ. $k=2$이면 $f(2)=2e^2>4$이므로 $g(2)=4$

ㄴ. $y=kx$가 $x=2$에서 $y=f(x)$의 접선보다 아래쪽이면 $h(k)$는 최댓값 4를 갖는다.

ㄷ. 원점에서 접선을 구하여 보면 접점의 좌표를 $(t,\ f(t))$라 두면

$y=(-t^2+3t-1)e^{4-t}(x-t)+(t^2-t)e^{4-t}$

$0=(t^3-3t^2+t)e^{4-t}+(t^2-t)e^{4-t}$

$t^3-2t^2=0,\ t=0$ 또는 $t=2$

$t=2$에서 접선의 기울기는 $k=e^2$

$t=0$에서는 $y=-f(x)$의 접선의 기울기는 $k=e^4$
따라서 $e^2 \le k < e^4$, $k > e^4$일 때 $h(k)=2$이다.

41) [정답] ⑤

[해설]

함수 $f(x)$의 역함수가 $g(x)$이므로 $f(g(x))=x$
$f(1)=2$이므로 $g(2)=1$

주어진 식에서

$f'(g(x))=\dfrac{1-\{g(x)\}^2\{f(g(x))\}^3}{\{g(x)\}^3\{f(g(x))\}^2}=\dfrac{1-x^3\{g(x)\}^2}{x^2\{g(x)\}^3}=\dfrac{1}{g'(x)}$이므로

$g'(x)=\dfrac{x^2\{g(x)\}^3}{1-x^3\{g(x)\}^2}\cdots(*)$

ㄱ. 식 $(*)$에 $x=2$를 대입하면

$g'(2)=\dfrac{2^2\times\{g(2)\}^3}{1-2^3\times\{g(2)\}^2}$

$=\dfrac{2^2}{1-2^3}=-\dfrac{4}{7}$ ∴(참)

ㄴ. 식 $(*)$을 정리하면
$g'(x)=x^3\{g(x)\}^2g'(x)+x^2\{g(x)\}^3$
$=x^2\{g(x)\}^2\{xg'(x)+g(x)\}$
양변을 x에 대하여 적분하면
$xg'(x)+g(x)=\{xg(x)\}'$이므로
$\displaystyle\int g'(x)dx=\int\{xg(x)\}^2\{xg(x)\}'dx$

$g(x)=\dfrac{1}{3}x^3\{g(x)\}^3+C$ (단, C는 적분상수)

$x=2$를 대입하면 $1=\dfrac{8}{3}+C$이므로 $C=-\dfrac{5}{3}$

$g(x)=\dfrac{1}{3}x^3\{g(x)\}^3-\dfrac{5}{3}\cdots(**)$ ∴(참)

ㄷ. 식 $(**)$에 $x=1$을 대입하여 정리하면
$\{g(1)\}^3-3g(1)-5=0$
함수 $h(t)=t^3-3t-5$, $g(1)=\alpha$라 하면
$h'(t)=3(t+1)(t-1)$
$t=-1$ 에서 극댓값 -3, $t=1$에서 극솟값 -7을 가지므로 방정식 $h(t)=0$은 하나의 실근 α를 갖는다.
$h(2)=8-6-5=-3<0$,
$h\left(\dfrac{5}{2}\right)=\dfrac{125}{8}-\dfrac{15}{2}-5=\dfrac{25}{8}>0$이므로

사이값 정리에 의해 $2<\alpha<\dfrac{5}{2}$

$2<g(1)<\dfrac{5}{2}$ ∴(참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ

42) [정답] 16

[해설]

$g(t)$는 접선의 y절편이므로
$y=f(t)$의 $(t,\ f(t))$에서의 접선의 방정식은
$y=f'(t)(x-t)+f(t)$이므로 $g(t)=-tf'(t)+f(t)$
주어진 조건에서

$g(t+1)-g(t)=\dfrac{2t}{1+t^2}$

양변을 적분하면

$(\text{좌변})=\displaystyle\int_0^x(g(t+1)-g(t))dt$

$=\displaystyle\int_0^x g(t+1)dt-\int_0^x g(t)dt$

$=\displaystyle\int_1^{x+1}g(t)dt-\int_0^x g(t)dt$

$=\displaystyle\int_0^{x+1}g(t)dt-\int_0^x g(t)dt-\int_0^1 g(t)dt$

$=\displaystyle\int_x^{x+1}g(t)dt-\int_0^1 g(t)dt$

$(\text{우변})=\displaystyle\int_0^x\frac{2t}{1+t^2}dt=\left[\ln(1+t^2)\right]_0^x=\ln(1+x^2)$

$h(x)=\displaystyle\int_x^{x+1}g(t)dt=\ln(1+x^2)+\int_0^1 g(t)dt \quad\cdots㉠$
이라 하자.

$\displaystyle\int_0^1 g(t)dt=\int_0^1(-tf'(t)+f(t))dt$

$=\displaystyle\int_0^1(-tf'(t))dt+\int_0^1 f(t)dt$

$=\displaystyle[-tf(t)]_0^1+2\int_0^1 f(t)dt$

$=\displaystyle-f(1)+2\int_0^1 f(t)dt=-4-\frac{\ln17}{8}-\frac{\ln10}{2}$

$\displaystyle\int_{-4}^4 g(t)dt=\int_{-4}^4(-tf'(t)+f(t))dt$

$= \int_{-4}^{4}(-tf'(t))dt + \int_{-4}^{4}f(t)dt$

$= [-tf(t)]_{-4}^{4} + 2\int_{-4}^{4}f(t)dt$

$= -4f(4) - 4f(-4) + 2\int_{-4}^{4}f(t)dt$

$= -2\left(2\{f(4)+f(-4)\} - \int_{-4}^{4}f(t)dt\right)$ ⋯ ㉡

한편 ㉠ 에서

$\int_{-4}^{4}g(t)dt$

$= h(-4)+h(-3)+h(-2)+h(-1)+h(0)+h(1)+h(2)+h(3)$

$= \ln 17 + \ln 10 + \ln 5 + \ln 2 + 0 + \ln 2 + \ln 5 + 10 + 8\int_{0}^{1}g(t)dt$

$= \ln 17 + 4\ln 10 - 32 - \ln 17 - 4\ln 10 = -32$ ⋯ ㉢

따라서 ㉡=㉢에서

$-2\left(2\{f(4)+f(-4)\} - \int_{-4}^{4}f(t)dt\right) = -32$

$\therefore \left(2\{f(4)+f(-4)\} - \int_{-4}^{4}f(t)dt\right) = 16$

43) [정답] 49

[해설]

$f(x) = e^x(ax^3+bx^2) = x^2e^x(ax+b)$

$f'(x) = xe^x\{ax^2+(3a+b)x+2b\}$

$f(0) = f'(0) = 0$이므로 함수 $f(x)$의 그래프는
$x=0$에서 x축에 접하고,

조건 (가)에서 $M(t) = f(t)$에 의하여

함수 $f(x)$는 $x>0$에서 증가하므로 $a>0$

또한 함수 $f(x)$의 그래프가 $x>0$에서 x축과 만나지 않고

$f\left(-\frac{b}{a}\right) = 0$이므로 $-\frac{b}{a} < 0$

$\therefore b > 0$

$f'(x) = xe^x\{ax^2+(3a+b)x+2b\}$에서

이차방정식 $ax^2+(3a+b)x+2b=0$의 판별식을 D라 하면

$D = (3a+b)^2 - 8ab = (a-b)^2 + 8a^2 > 0$이므로

이차방정식은 서로 다른 두 실근 α, $\beta(\alpha<\beta)$를 갖는다.

$\alpha+\beta = -\frac{3a+b}{a} < 0$, $\alpha\beta = \frac{2b}{a} > 0$이므로

$\alpha < \beta < 0$이다.

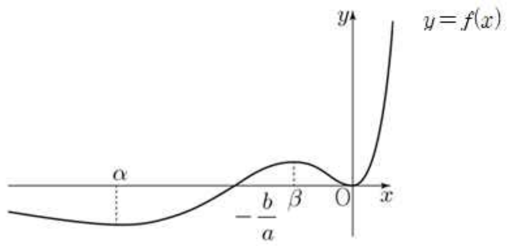
$f'(x)=0$에서 $x=\alpha$, $x=\beta$, $x=0$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면

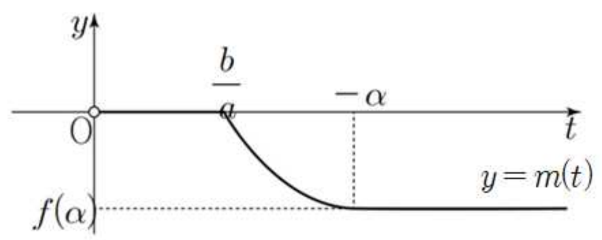
x	⋯	α	⋯	β	⋯	0	⋯
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘	0	↗

$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$

함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



따라서 $m(t) = \begin{cases} 0 & \left(0 < t < \frac{b}{a}\right) \\ f(-t) & \left(\frac{b}{a} \le t \le -\alpha\right) \\ f(\alpha) & (t > -\alpha) \end{cases}$



조건 (나)에서 양수 k에 대하여

닫힌 구간 $[k, k+2]$에 있는 임의의 실수 t에

대해서만 $m(t) = f(-t)$가 성립하므로

$\frac{b}{a} = k$, $-\alpha = k+2$

$f'(\alpha) = f'(-k-2) = 0$

$\frac{-k-2}{e^{k+2}}\{a(-k-2)^2 + (3a+ak)(-k-2) + 2ak\} = 0$

$\frac{-k-2}{e^{k+2}} \ne 0$이므로

$a(-k-2)^2 + (3a+ak)(-k-2) + 2ak = 0$

$a(k-2) = 0$

$\therefore k=2$, $\alpha = -4$

따라서 $f(x)=ae^{x}(x^3+2x^2)$이고,

$$m(t)=\begin{cases} 0 & (0<t<2) \\ ae^{-t}(-t^3+2t^2) & (2\le t\le 4) \\ -\dfrac{32a}{e^4} & (t>4) \end{cases}$$

조건 (다)에 의하여

$$\int_1^5 \{e^t\times m(t)\}dt=\int_2^4(-at^3+2at^2)dt+\int_4^5\left(-\frac{32a}{e^4}e^t\right)dt$$

$$=\left[-\frac{a}{4}t^4+\frac{2a}{3}t^3\right]_2^4+\left[-\frac{32a}{e^4}e^t\right]_4^5$$

$$=\frac{28a}{3}-32ae=\frac{7}{3}-8e$$

$$\therefore a=\frac{1}{4}$$

따라서 $f(k+1)=f(3)=\dfrac{45}{4}e^3$이고, $p+q=49$

44) [정답] ⑤

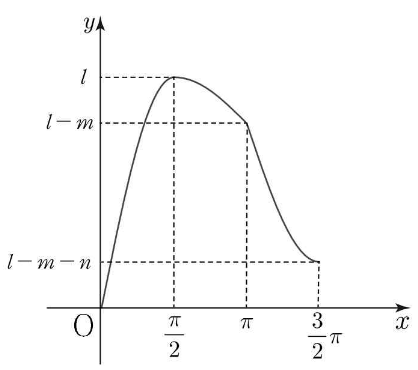
[해설]

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}f'(x)dx=f\left(\frac{\pi}{2}\right)-f(0)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}l\cos x dx=l$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}f'(x)dx=f(\pi)-f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}m\cos x dx=-m$$

$$\int_{\pi}^{\frac{3}{2}\pi}f'(x)dx=f\left(\frac{3}{2}\pi\right)-f(0)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}n\cos x dx=-n$$

이고 $f(0)=0$, $f\left(\dfrac{3}{2}\pi\right)=1$이므로 $y=f(x)$의 그래프를 $\displaystyle\int_0^{\frac{3}{2}\pi}f(x)dx$가 최대가 되도록 유추해보면 다음과 같다.



$f\left(\dfrac{3}{2}\pi\right)=1$에서 $l-m-n=1$ (l, m, $n\ge 0$)이므로 $l+m+n\le 10$에서 $2l\le 11$이다.

따라서 정수 l의 최댓값은 5이고 $m+n=4$ …… ㉠

$$\int_0^{\frac{3}{2}\pi}f(x)dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}l\sin x dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(m\sin x+l-m)dx$$

$$+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi}(n\sin x+l-m-n)dx$$

$$=l+\left\{(-m)+\frac{\pi}{2}(l-m)\right\}+\left\{(-n)+\frac{\pi}{2}(l-m-n)\right\}$$

$$=(l-m-n)\left(1+\frac{\pi}{2}\right)+(l-m)\frac{\pi}{2}$$

$$=\left(1+\frac{\pi}{2}\right)+(l-m)\frac{\pi}{2}\quad(\because l-m-n=1)$$

따라서 $\displaystyle\int_0^{\frac{3}{2}\pi}f(x)dx$가 최대가 되려면 $l-m$이 최대가 되어야 하므로 $m=1$

㉠에 대입하면 $n=3$

$$\therefore l+2m+3n=5+2+9=16$$

45) [정답] **26**

[해설]

(나)에서 $x=0$일 때 $g(1)=0$

$$g(x+1)=\int_0^x\{f(t+1)e^t-f(t)e^t+g(t)\}dt$$

의 양변을 x에 대하여 미분하여 정리하면

$$f(x+1)-f(x)=\{g'(x+1)-g(x)\}e^{-x}$$

임의의 실수 t에 대하여

$$\int_0^t\{f(x+1)-f(x)\}dx$$

$$=\int_0^t\{g'(x+1)-g(x)\}e^{-x}dx$$

$$(\text{좌변})=\int_0^t f(x+1)dx-\int_0^t f(x)dx$$

$$=\int_1^{t+1}f(x)dx-\int_0^t f(x)dx$$

$$=\int_t^{t+1}f(x)dx-\int_0^1 f(x)dx \quad \cdots\cdots ㉠$$

(우변)$=\int_0^t \{g'(x+1)-g(x)\}e^{-x}dx$

$=\int_0^t g'(x+1)e^{-x}dx-\int_0^t g(x)e^{-x}dx$

$\int_0^t g'(x+1)e^{-x}dx$에서

$\int_0^t g'(x+1)e^{-x}dx$

$=\left[\, g(x+1)e^{-x}\right]_0^t+\int_0^t g(x+1)e^{-x}dx$

(우변)$=\left[g(x+1)e^{-x}\right]_0^t+\int_0^t \{g(x+1)-g(x)\}e^{-x}dx$

$=g(t+1)e^{-t}-g(1)-\int_0^t \pi(e+1)\sin(\pi x)dx$

$=g(t+1)e^{-t}+\left[(e+1)\cos(\pi x)\right]_0^t$

$=g(t+1)e^{-t}+(e+1)\cos(\pi t)-(e+1)$

…… ㉡

㉠, ㉡에서

$\int_t^{t+1} f(x)dx$

$=\int_0^1 f(x)dx+g(t+1)e^{-t}+(e+1)\cos(\pi t)-(e+1)$

$g(x+1)=g(x)-\pi(e+1)\sin(\pi x)e^x$에서

$g(0)=g(1)=g(2)=\cdots=g(9)=0$

$\int_1^{10} f(x)dx$

$=\sum_{n=1}^{9}\int_n^{n+1} f(x)dx$

$=\sum_{n=1}^{9}\left\{\int_0^1 f(x)dx+g(n+1)e^{-n}\right.$

$\left.+(e+1)\cos(\pi n)-(e+1)\right\}$

$=9\int_0^1 f(x)dx++(e+1)\sum_{n=1}^{9}\{\cos(\pi n)-1\}$

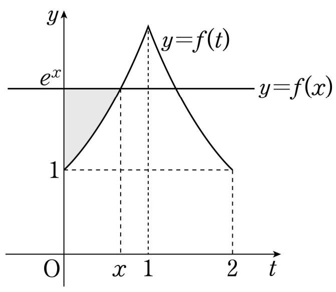
$=9\left(\frac{10}{9}e+4\right)+(e+1)\times(-10)$

$=26$

46) [정답] 36

[해설]

(ⅰ) $0<x\le 1$일 때,



그림에서 $0<t\le x$일 때, $f(x)\ge f(t)$이므로

$g(x)=\int_0^x |f(x)-f(t)|dt$

$=\int_0^x \{f(x)-f(t)\}dt$

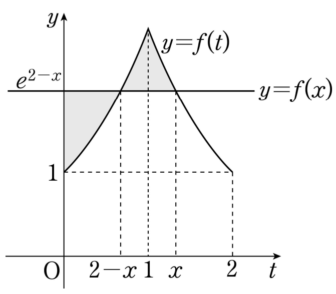
$=\int_0^x (e^x-e^t)dt$

$=\left[\, te^x-e^t\right]_0^x$

$=xe^x-e^x+1$

$=(x-1)e^x+1$

(ⅱ) $1<x<2$일 때,



그림에서

$0<t<2-x$일 때, $f(x)\ge f(t)$

$2-x\le t<x$일 때, $f(x)\le f(t)$이므로

$g(x)=\int_0^x |f(x)-f(t)|dt$

$=\int_0^{2-x}\{f(x)-f(t)\}dt+\int_{2-x}^{x}\{f(t)-f(x)\}dt$

위의 (ⅰ)에 의하여

$\int_0^{2-x}\{f(x)-f(t)\}dt=(2-x-1)e^{2-x}+1$

$=(1-x)e^{2-x}+1$

한편, 함수 $y=e^{2-x}$의 그래프는 함수 $y=e^x$의 그래프와 직선 $x=1$에 대하여 대칭이므로

$\int_{2-x}^{x}\{f(t)-f(x)\}dt=2\int_1^x\{f(t)-f(x)\}dt$

$=2\int_1^x (e^{2-t}-e^{2-x})dt$

$$=2\left[-e^{2-t}-te^{2-x}\right]_1^x$$
$$=2\{(-e^{2-x}-xe^{2-x})-(-e-e^{2-x})\}$$
$$=2e-2xe^{2-x}$$

따라서

$$g(x)=(1-x)e^{2-x}+1+2e-2xe^{2-x}$$
$$=(1-3x)e^{2-x}+2e+1$$

위의 (i), (ii)에서

$$g(x)=\begin{cases}(x-1)e^x+1 & (0<x\le 1)\\ (1-3x)e^{2-x}+2e+1 & (1<x<2)\end{cases}$$ 이므로

$$g'(x)=\begin{cases}xe^x & (0<x<1)\\ (3x-4)e^{2-x} & (1<x<2)\end{cases}$$

함수 $g(x)$의 증가와 감소를 나타내는 표는 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$	$\frac{4}{3}$	$\cdots$	(2)
$g'(x)$		$+$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		↗	극대	↘	극소	↗	

$$(\text{극댓값})=g(1)$$
$$=(1-1)e+1$$
$$=1$$

$$(\text{극솟값})=g\left(\frac{4}{3}\right)$$
$$=(1-4)e^{\frac{2}{3}}+2e+1$$
$$=2e-3e^{\frac{2}{3}}+1$$

함수 $g(x)$의 극댓값과 극솟값의 차는

$$1-\left(2e-3e^{\frac{2}{3}}+1\right)=-2e+3e^{\frac{2}{3}}$$
$$=-2e+3\sqrt[3]{e^2}$$

$a=-2,\ b=3$이므로

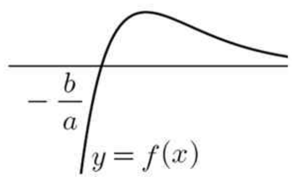
$(ab)^2=36$

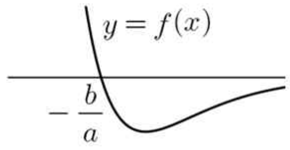
47) [정답] 125

[해설]

함수 $f(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.

(i) $a>0$ (ii) $a<0$





$g(x)=\int_0^x f(t)dt$ 에서 $g(0)=0$, $g'(x)=f(x)$

조건 (가)에 의하여 함수 $g(x)$는 $x=-\frac{b}{a}$ 에서 극댓값 α를 가지므로 $a<0$이고 $b>0$이다.

$g(x)-k\ge xf(x)$ 에서 $g(x)-xf(x)\ge k$이므로

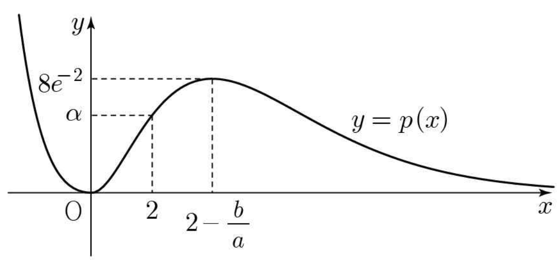
$p(x)=g(x)-xf(x)$라 하면

$p'(x)=g'(x)-f(x)-xf'(x)=-xf'(x)$

$$f'(x)=-\frac{1}{2}a\left(x-2+\frac{b}{a}\right)e^{-\frac{x}{2}}$$

$$p'(x)=\frac{1}{2}ax\left(x-2+\frac{b}{a}\right)e^{-\frac{x}{2}}$$

조건 (가), (나)를 만족시키는 함수 $p(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



$g\left(-\frac{b}{a}\right)=\alpha$, $f\left(-\frac{b}{a}\right)=0$에 의하여

$$p\left(-\frac{b}{a}\right)=g\left(-\frac{b}{a}\right)-\left(-\frac{b}{a}\right)f\left(-\frac{b}{a}\right)=\alpha$$

$$2=-\frac{b}{a}$$

$p(x)=g(x)-xf(x)\ge k$에서 양수 x의 범위에서 함수 $p(x)$의 최댓값은 $h(k)$의 값이 존재하는 k의 최댓값이므로

$p(4)=8e^{-2}$

$$g(4)=\int_0^4 a(t-2)e^{-\frac{t}{2}}dt$$

$$=\left[a(t-2)\left(-2e^{-\frac{t}{2}}\right)\right]_0^4-\int_0^4\left(-2ae^{-\frac{t}{2}}\right)dt$$

$=-4ae^{-2}-4a-\left[4ae^{-\frac{t}{2}}\right]_0^4=-4ae^{-2}-4a-4ae^{-2}+4a$

$=-8ae^{-2}$

$p(4)=g(4)-4f(4)$

$=-8ae^{-2}-4\times 2ae^{-2}$

$=-16ae^{-2}$

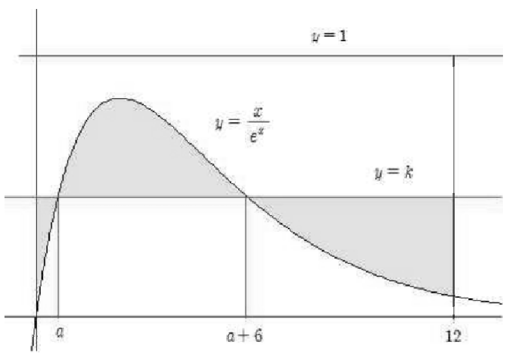
$-16ae^{-2}=8e^{-2}$ 이므로 $a=-\frac{1}{2}$, $b=1$

따라서 $100(a^2+b^2)=125$

48) [정답] 18

[해설]

$g(t)$는 그림과 같이 색칠한 영역의 넓이이다.



$f(x)=\frac{x}{e^x}=xe^{-x}$, $f'(x)=(1-x)e^{-x}$이므로

극댓값(최댓값)은 $f(1)=\frac{1}{e}<1$이므로

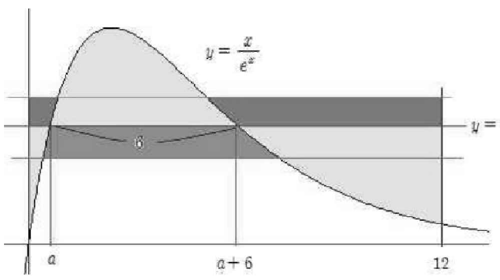
(i) $t>\frac{1}{e}$이면

$g(t)=\int_0^{12}(t-f(x))dx=12t-\int_0^{12}f(x)dx$이므로

$g'(1)=12$

(ii) $\frac{12}{e^{12}}\le t\le\frac{1}{e}$일 때

$f(x)=t$는 두 실근 a, $b(a<b)$를 갖는다.



$g(t)=\int_0^a(t-f(x))dx+\int_a^b(f(x)-t)dx+\int_b^{12}(t-f(x))dx$

$=\int_0^{12}(t-f(x))dx+2\int_a^b(f(x)-t)dx$

$=t\int_0^{12}dx-\int_0^{12}f(x)dx+2\int_a^b f(x)dx-2t\int_a^b dx$

$g'(t)=12-0+2(f(b(t))\times b'(t)-f(a(t))\times a'(t))$
$-2(b(t)-a(t))-2t(b'(t)-a'(t))$

$=12-2(b-a)$

$g'(k)=12-2(b-a)=0$

$\therefore\ b-a=6,\ b=a+6$

따라서 $f(a)=f(a+6)$이므로

$\frac{a}{e^a}=\frac{a+6}{e^{a+6}}$, 즉 $\frac{a+6}{a}=e^6$

즉 $\ln\left(\frac{6}{a}+1\right)=\ln e^6=6$이다.

(i), (ii)에서

$\therefore\ g'(1)+\ln\left(\frac{6}{a}+1\right)=12+6=18$

49) [정답] ⑤

[해설]

$\left|\frac{x-1}{k}\right|<1$일 때, $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x-1}{k}\right)^{2n}=0$이므로

$1-k<x<1+k$에서

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{x-1}{k}\right)^{2n}-1}{\left(\frac{x-1}{k}\right)^{2n}+1}=\frac{0-1}{0+1}=-1$$

$\left|\frac{x-1}{k}\right|>1$일 때, $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x-1}{k}\right)^{2n}=\infty$,

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(\frac{x-1}{k}\right)^{2n}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{k}{x-1}\right)^{2n}=0$이므로

$x<1-k$ 또는 $x>1+k$에서

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{x-1}{k}\right)^{2n}-1}{\left(\frac{x-1}{k}\right)^{2n}+1}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\left(\frac{k}{x-1}\right)^{2n}}{1+\left(\frac{k}{x-1}\right)^{2n}}$$

$$=\frac{1-0}{1+0}=1$$

$\left|\frac{x-1}{k}\right|=1$일 때, $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x-1}{k}\right)^{2n}=1$이므로

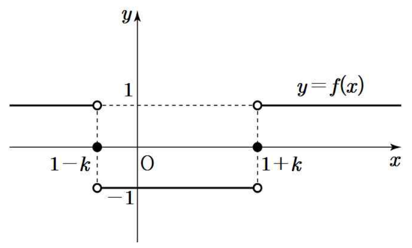
$x=1-k$ 또는 $x=1+k$에서

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{x-1}{k}\right)^{2n}-1}{\left(\frac{x-1}{k}\right)^{2n}+1}=\frac{1-1}{1+1}=0$$

따라서

$$f(x)=\begin{cases}1 & (x<1-k \text{ 또는 } x>1+k)\\ 0 & (x=1-k \text{ 또는 } x=1+k)\\ -1 & (1-k<x<1+k)\end{cases}$$

$y=f(x)$의 그래프는 그림과 같고 함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $\lim_{x\to k}g(x)=g(k)$가 성립한다.



$\lim_{x\to k}g(x)=\lim_{x\to k}(x-k)^2=0$, $g(k)=(f\circ f)(k)$이므로

$$(f\circ f)(k)=0$$

$f(1-k)=f(1+k)=0$이므로

$$f(k)=1-k \text{ 또는 } f(k)=1+k$$

$k>0$, $1+k>1$이고, $f(x)$의 치역은 $\{-1,\ 0,\ 1\}$이므로 $1+k$는 치역에 속하지 않는다.

$$\therefore\ f(k)=1-k$$

(ⅰ) $1-k=1$인 경우
$k=0$이므로 조건에 맞지 않는다.

(ⅱ) $1-k=0$인 경우
$k=1$이므로

$$f(x)=\begin{cases}1 & (x<0 \text{ 또는 } x>2)\\ 0 & (x=0 \text{ 또는 } x=2)\\ -1 & (0<x<2)\end{cases}$$

$f(f(1))=f(-1)=1\neq 0$이므로 조건에 맞지 않는다.

(ⅲ) $1-k=-1$인 경우
$k=2$이므로

$$f(x)=\begin{cases}1 & (x<-1 \text{ 또는 } x>3)\\ 0 & (x=-1 \text{ 또는 } x=3)\\ -1 & (-1<x<3)\end{cases}$$

$$f(f(2))=f(-1)=0$$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의하여 $k=2$

$$(g\circ f)(k)=g(f(2))=g(-1)$$

$=(-1-2)^2$

$=9$

50) [정답] ②

[해설]

점 P를 $\mathrm{P}(\alpha,\ t)$라 하면 $\sin\alpha=t$,

$\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\sqrt{1-t^2}$이다.

접선의 방정식은 $y-f(\alpha)=f'(\alpha)(x-\alpha)$이고,

$y-\sin\alpha=\cos\alpha(x-\alpha)$에서

$$-\sin\alpha=\cos\alpha(g(t)-\alpha),\ g(t)=\alpha-\tan\alpha$$

이다.

$\sin\alpha=t$의 양변을 t에 대하여 미분하면 $\cos\alpha\frac{d\alpha}{dt}=1$이므로

$$\frac{d\alpha}{dt}=\frac{1}{\cos\alpha}$$

$$g'(t)=\frac{d\alpha}{dt}-\sec^2\alpha\frac{d\alpha}{dt}$$

$=\frac{1}{\cos\alpha}-\frac{1}{\cos^3\alpha}$

$=\frac{\cos^2\alpha-1}{\cos^3\alpha}$

$=\frac{-t^2}{(1-t^2)^{\frac{3}{2}}}$

따라서 $g'\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)=-24$

51) [정답] ①

[해설]

$$f'(x)=2\sin2x+2(2x-3n)\cos2x-(4x-6n)\cos2x$$
$$+2\left(2x^2-6nx+4n^2-1\right)\sin2x$$

$=\left(4x^2-12nx+8n^2\right)\sin2x$

$=4(x-n)(x-2n)\sin2x$

(ⅰ) $n=1$일 때
열린구간 $(0,\ 3)$에서의 $f'(x)=0$인 x의 값은

$$x=1,\ x=\frac{\pi}{2},\ x=2$$

x	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	2	$\cdots$	(3)
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

$$a_1=3+\frac{\pi}{2},\ \cos a_1\neq 0$$

(ⅱ) $n=2$일 때

열린구간 $(3,\ 6)$에서의 $f'(x)=0$인 x의 값은

$$x=\pi,\ x=4,\ x=\frac{3}{2}\pi$$

x	(3)	$\cdots$	π	$\cdots$	4	$\cdots$	$\frac{3}{2}\pi$	$\cdots$	(6)
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

$$a_2=4+\frac{5}{2}\pi,\ \cos a_2\neq 0$$

(ⅲ) $n=3$일 때
열린구간 $(6,\ 9)$에서의 $f'(x)=0$인 x의 값은

$$x=2\pi,\ x=\frac{5}{2}\pi$$

x	(6)	$\cdots$	2π	$\cdots$	$\frac{5}{2}\pi$	$\cdots$	(9)
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

$a_3=\frac{9}{2}\pi,\ \cos a_3=0$이므로 $l=3$

(ⅳ) $n=4$일 때
열린구간 $(9,\ 12)$에서의 $f'(x)=0$인 x의 값은

$$x=3\pi,\ x=\frac{7}{2}\pi$$

x	(9)	$\cdots$	3π	$\cdots$	$\frac{7}{2}\pi$	$\cdots$	(12)
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

$$a_4=\frac{13}{2}\pi$$

(ⅴ) $n=5$일 때
열린구간 $(12,\ 15)$에서의 $f'(x)=0$인 x의 값은

$$x=4\pi,\ x=\frac{9}{2}\pi$$

x	(12)	$\cdots$	4π	$\cdots$	$\frac{9}{2}\pi$	$\cdots$	(15)
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

$$a_5=\frac{17}{2}\pi$$

따라서 $\displaystyle\sum_{k=1}^{l+2}a_k=\sum_{k=1}^{5}a_k=7+\frac{45}{2}\pi$

52) [정답] **77**

[해설]

자연수 k에 대하여 함수 $|(f\circ g)(x)|$의 미분가능성을 조사하므로 $k\geq 1$에서만 생각한다.
두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 함수 $(f\circ g)(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.

함수 $|(f\circ g)(x)|$의 미분가능성은 함수 $(f\circ g)(x)$의 부호가 바뀌는 x의 값에 대해서만 판단하면 된다.

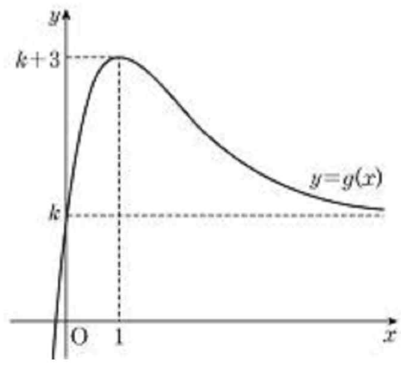
$$g(x)=\frac{3x}{e^{x-1}}+k=3xe^{1-x}+k\text{에서}$$

$$g'(x)=3e^{1-x}-3xe^{1-x}=3(1-x)e^{1-x}$$

함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면

x	$\cdots$	1	$\cdots$
$g'(x)$	$+$	0	$-$
$g(x)$	$\nearrow$	$k+3$	$\searrow$

이고, $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}g(x)=-\infty,\ \lim_{x\to\infty}g(x)=k$이므로 곡선 $y=g(x)$의 개형은 [그림1]과 같다.



[그림1]

함수 $f(x)$는 조건 (가)에서

$$f(x)=(x-1)^2(x^2+ax+b)\ (a,\ b\text{는 실수})$$

방정식 $f(x)=0$이 허근을 가지면 방정식 $x^2+ax+b=0$이 허근을 가지므로 모든 실수 x에 대하여 $x^2+ax+b>0$이다.

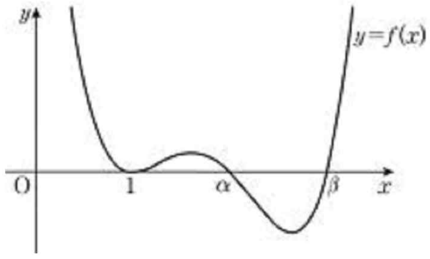
즉 $f(x)\geq 0$이므로 모든 자연수 k에 대하여 $(f\circ g)(x)\geq 0$이다.

모든 자연수 k에 대하여 함수 $|(f\circ g)(x)|$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 조건을 만족시키는 자연수 k의 개수가 4인 방정식 $f(x)=0$은 허근을 갖지 않는다.
두 자연수 α, $\beta(1\leq\alpha\leq\beta\leq 10)$에 대하여

$$f(x)=(x-1)^2(x-\alpha)(x-\beta)$$

(ⅰ) $\alpha=\beta$인 경우
$f(x)=(x-1)^2(x-\alpha)^2$이고 모든 실수 x에 대하여 $(x-\alpha)^2\geq 0$이므로 $f(x)\geq 0$
따라서 $(f\circ g)(x)\geq 0$이므로 모든 자연수 k에 대하여 함수 $|(f\circ g)(x)|$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.

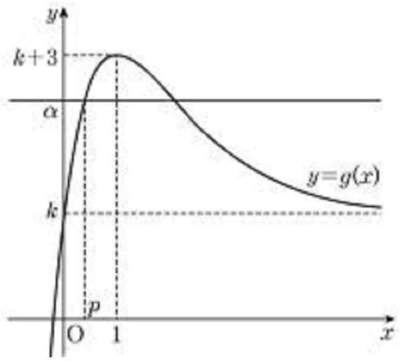
(ⅱ) $1<\alpha<\beta$인 경우
곡선 $y=f(x)$의 개형은 [그림2]와 같다.



[그림2]

(1) $k+3>\alpha$인 경우

[그림3]에서 방정식 $g(x)=\alpha$를 만족시키는 $x<1$인 실수 x를 p라 하자.



[그림3]

$$\lim_{x\to p}\frac{|(f\circ g)(x)|-|(f\circ g)(p)|}{x-p}$$
$$=\lim_{x\to p}\left\{\frac{|f(g(x))|-|f(g(p))|}{g(x)-g(p)}\times\frac{g(x)-g(p)}{x-p}\right\}$$

이때 $f(g(p))=0$이고, $x\to p-$이면 [그림3]에서 $g(x)\to\alpha-$이므로 [그림2]에서 $(f\circ g)(x)\to 0+$

$$\lim_{x\to p-}\left\{\frac{|f(g(x))|-|f(g(p))|}{g(x)-g(p)}\times\frac{g(x)-g(p)}{x-p}\right\}$$
$$=\lim_{x\to p-}\left\{\frac{f(g(x))-f(g(p))}{g(x)-g(p)}\times\frac{g(x)-g(p)}{x-p}\right\}$$
$$=f'(g(p))g'(p)$$
$$=f'(\alpha)g'(p)$$

한편, $f(g(p))=0$이고, $x\to p+$이면 [그림3]에서 $g(x)\to\alpha+$이므로 [그림2]에서

$$(f\circ g)(x)\to 0-$$
$$\lim_{x\to p+}\left\{\frac{|f(g(x))|-|f(g(p))|}{g(x)-g(p)}\times\frac{g(x)-g(p)}{x-p}\right\}$$
$$=\lim_{x\to p+}\left\{-\frac{f(g(x))-f(g(p))}{g(x)-g(p)}\times\frac{g(x)-g(p)}{x-p}\right\}$$
$$=-f'(g(p))g'(p)$$
$$=-f'(\alpha)g'(p)$$

이때 [그림2], [그림3]에서 $f'(\alpha)<0$, $g'(p)>0$이므로

$$f'(\alpha)g'(p)<0$$
$$f'(\alpha)g'(p)\neq -f'(\alpha)g'(p)$$

이므로 함수 $|(f\circ g)(x)|$는 $x=p$에서 미분가능하지 않다.

(2) $k+3\le\alpha$인 경우

모든 실수 x에 대하여 $g(x)\le k+3\le\alpha$이므로 [그림2]에서 $(f\circ g)(x)\ge 0$이다.

함수 $|(f\circ g)(x)|$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하도록 하는 자연수 k의 개수가 4이려면

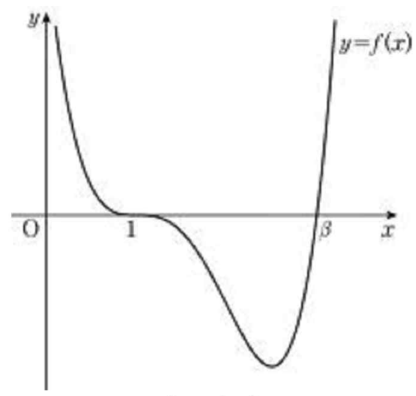
$$4\le\alpha-3<5,\ 7\le\alpha<8$$

그런데, α는 자연수이므로 $\alpha=7$

$\alpha<\beta\le 10$이므로 조건을 만족시키는 순서쌍 $(\alpha,\ \beta)$는 $(7,\ 8)$, $(7,\ 9)$, $(7,\ 10)$이다.

(iii) $1=\alpha<\beta$인 경우

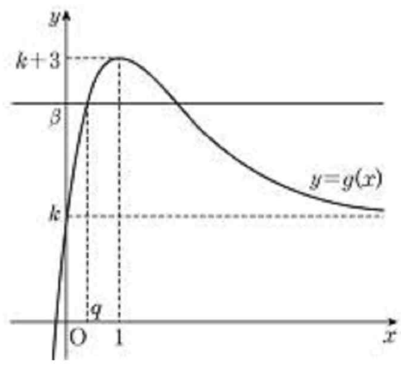
곡선 $y=f(x)$의 개형은 [그림4]와 같다.



[그림4]

(1) $k+3>\beta$인 경우

[그림5]에서 방정식 $g(x)=\beta$를 만족시키는 $x<1$인 실수 x를 q라 하자.



[그림5]

$$\lim_{x\to q}\frac{|(f\circ g)(x)|-|(f\circ g)(q)|}{x-q}$$
$$=\lim_{x\to q}\left\{\frac{|f(g(x))|-|f(g(q))|}{g(x)-g(q)}\times\frac{g(x)-g(q)}{x-q}\right\}$$

이때 $f(g(q))=0$이고, $x\to q-$이면 [그림5]에서 $g(x)\to\beta-$이므로 [그림4]에서 $(f\circ g)(x)\to 0-$

$$\lim_{x\to q-}\left\{\frac{|f(g(x))|-|f(g(q))|}{g(x)-g(q)}\times\frac{g(x)-g(q)}{x-q}\right\}$$
$$=\lim_{x\to q-}\left\{-\frac{f(g(x))-f(g(q))}{g(x)-g(q)}\times\frac{g(x)-g(q)}{x-q}\right\}$$
$$=-f'(g(q))g'(q)$$
$$=-f'(\beta)g'(q)$$

한편, $f(g(q))=0$이고, $x\to q+$이면 [그림5]에서 $g(x)\to\beta+$이므로 [그림4]에서 $(f\circ g)(x)\to 0+$

$$\lim_{x\to q+}\left\{\frac{|f(g(x))|-|f(g(q))|}{g(x)-g(q)}\times\frac{g(x)-g(q)}{x-q}\right\}$$
$$=\lim_{x\to q+}\left\{\frac{f(g(x))-f(g(q))}{g(x)-g(q)}\times\frac{g(x)-g(q)}{x-q}\right\}$$
$$=f'(g(q))g'(q)$$
$$=f'(\beta)g'(q)$$

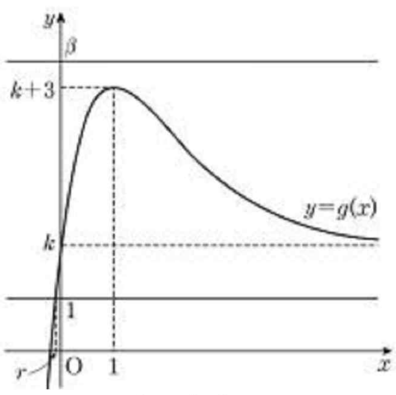
이때 [그림4], [그림5]에서 $f'(\beta)>0,\ g'(q)>0$이므로

$$f'(\beta)g'(q)>0$$
$$-f'(\beta)g'(q)\neq f'(\beta)g'(q)$$

이므로 함수 $|(f\circ g)(x)|$는 $x=q$에서 미분가능하지 않다.

(2) $1=\alpha<k+3\le\beta$인 경우

[그림6]에서 방정식 $g(x)=1$을 만족시키는 실수 x가 오직 하나 존재하며 $x<1$이다. 이 실수를 r라 하자.



[그림6]

(ㄱ) $x<r$인 경우

[그림6]에서 $x<r$인 모든 실수 x에 대하여 $g(x)<1$이므로 [그림4]에서 $(f\circ g)(x)>0$이다. 따라서 $x<r$인 모든 실수 x에 대하여 함수 $|(f\circ g)(x)|$는 미분가능하다.

(ㄴ) $x>r$인 경우

[그림6]에서 $x>r$인 모든 실수 x에 대하여 $1<g(x)\le\beta$이므로 [그림4]에서 $(f\circ g)(x)\le 0$이다.
따라서 $x>r$인 모든 실수 x에 대하여 함수 $|(f\circ g)(x)|$는 미분가능하다.

(ㄷ) $x=r$인 경우

$$\lim_{x\to r}\frac{|(f\circ g)(x)|-|(f\circ g)(r)|}{x-r}$$
$$=\lim_{x\to r}\left\{\frac{|f(g(x))|-|f(g(r))|}{g(x)-g(r)}\times\frac{g(x)-g(r)}{x-r}\right\}$$

이때 $f(g(r))=0$이고, $x\to r-$이면 [그림6]에서 $g(x)\to 1-$이므로 [그림4]에서 $(f\circ g)(x)\to 0+$

$$\lim_{x\to r-}\left\{\frac{|f(g(x))|-|f(g(r))|}{g(x)-g(r)}\times\frac{g(x)-g(r)}{x-r}\right\}$$
$$=\lim_{x\to r-}\left\{\frac{f(g(x))-f(g(r))}{g(x)-g(r)}\times\frac{g(x)-g(r)}{x-r}\right\}$$
$$=f'(g(r))g'(r)=f'(1)g'(r)=0$$

한편, $f(g(r))=0$이고, $x\to r+$이면 [그림6]에서 $g(x)\to 1+$이므로 [그림4]에서 $(f\circ g)(x)\to 0-$

$$\lim_{x\to r+}\left\{\frac{|f(g(x))|-|f(g(r))|}{g(x)-g(r)}\times\frac{g(x)-g(r)}{x-r}\right\}$$
$$=\lim_{x\to r+}\left\{-\frac{f(g(x))-f(g(r))}{g(x)-g(r)}\times\frac{g(x)-g(r)}{x-r}\right\}$$
$$=-f'(g(r))g'(r)$$
$$=-f'(1)g'(r)=0$$

따라서

$$\lim_{x\to r-}\frac{|(f\circ g)(x)|-|(f\circ g)(r)|}{x-r}$$
$$=\lim_{x\to r+}\frac{|(f\circ g)(x)|-|(f\circ g)(r)|}{x-r}$$

이므로 함수 $|(f\circ g)(x)|$는 $x=r$에서 미분가능하다. 즉, $1=\alpha<k+3\le\beta$일 때 실수 전체의 집합에서 함수 $|(f\circ g)(x)|$가 미분가능하도록 하는 자연수 k의 개수가 4이려면

$$4\le\beta-3<5,\ 7\le\beta<8$$

이고, β는 자연수이므로 $\beta=7$이다.
$\alpha=1$이므로 순서쌍 $(\alpha,\ \beta)$는 $(1,\ 7)$이다.

(3) $k+3\le 1=\alpha$인 경우

조건을 만족시키는 자연수 k가 존재하지 않는다.

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의하여 자연수 k의 개수가 4가 되도록 하는 순서쌍 $(\alpha,\ \beta)$는 $(7,\ 8)$, $(7,\ 9)$, $(7,\ 10)$, $(1,\ 7)$이다.

함수 $f(x)$에 대하여 $f(0)=\alpha\beta$이므로 $f(0)$은 순서쌍 $(\alpha,\ \beta)$가 $(7,\ 10)$일 때 최댓값 70, $(1,\ 7)$일 때 최솟값 7을 갖는다.

따라서 $f(0)$의 최댓값과 최솟값의 합은

$$70+7=77$$

53) [정답] **9**

[해설]

$g'(x)=f'(x)\{e^{f(x)}-1\}$이므로 $g'(x)=0$이려면 $f'(x)=0$ 또는 $f(x)=0$이어야 한다.

(ⅰ) 방정식 $f(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 갖는 경우

방정식 $f'(x)=0$의 서로 다른 두 실근은 방정식 $f(x)=0$의 세 실근과 모두 다르므로 $g'(x)=0$을 만족시키는 서로 다른 실수 x의 값의 개수는 5이다.
$g'(x)=0$을 만족시키는 서로 다른 5개의 실수 x의 값의 좌우에서 $g'(x)$의 부호가 바뀌므로 함수 $g(x)$는 서로 다른 5개의 극값을 갖는다.

(ⅱ) 방정식 $f(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 갖는 경우

(a) 방정식 $x^2+ax+b=0$의 실근 중 하나가 $x=0$인 경우

$b=0$이므로 방정식 $x^2+ax+b=0$의 0이 아닌 실근은

$$x=-a$$

$f(x)=x^3+ax^2$이므로 $f'(x)=0$에서 $x=0,\ x=-\frac{2}{3}a$

$g'(x)=0$에서 $x=-a,\ x=-\frac{2}{3}a,\ x=0$

함수 $g(x)$가 $x=-1$에서 극값을 가지므로 $a>0$

함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면

x	$\cdots$	$-a$	$\cdots$	$-\frac{2}{3}a$	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$+$		$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-$	0	$+$		$+$	0	$+$
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	↘	극소	↗	극대	↘	극소	↗

$-\frac{2}{3}a=-1$이므로 $a=\frac{3}{2}$

a가 정수인 조건을 만족하지 않는다.

(b) 방정식 $x^2+ax+b=0$이 0이 아닌 중근을 갖는 경우

방정식 $x^2+ax+b=0$의 판별식을 D라 하면

$D=a^2-4b=0$에서 $b=\frac{a^2}{4}$

$f(x)=x^3+ax^2+\frac{a^2}{4}x=x\left(x+\frac{a}{2}\right)^2$이므로 $f'(x)=0$에서

$$x=-\frac{a}{2},\ x=-\frac{a}{6}$$

$g'(x)=0$에서 $x=-\frac{a}{2},\ x=-\frac{a}{6},\ x=0$

함수 $g(x)$가 $x=-1$에서 극값을 가지므로 $a>0$

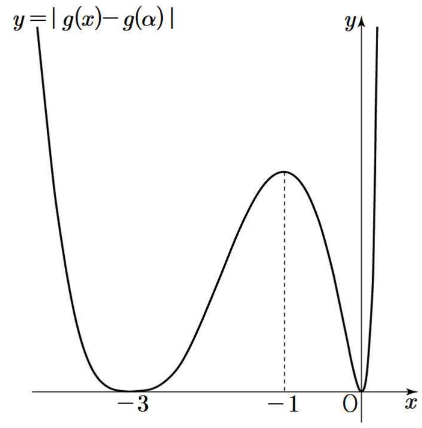
함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면

x	$\cdots$	$-\frac{a}{2}$	$\cdots$	$-\frac{a}{6}$	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$		$+$
$f(x)$	$-$	0	$-$		$-$	0	$+$
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	↘	극소	↗	극대	↘	극소	↗

$-\frac{a}{6}=-1$이므로 $a=6,\ b=9$

$$\alpha=-\frac{a}{2}=-3,\ \beta=0$$

이때, $g(\alpha)=g(0)=1$이므로 그림과 같이 함수 $y=|g(x)-g(\alpha)|$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.



(iii) 방정식 $f(x)=0$이 오직 하나의 실근을 갖는 경우

(a) 방정식 $x^2+ax+b=0$이 $x=0$을 중근으로 갖는 경우

$a=b=0$

$f(x)=x^3$이므로 $f'(x)=0$에서 $x=0$,

$g'(x)=0$에서 $x=0$

함수 $g(x)$는 $x=-1$에서 극값을 갖지 않는다.

(b) 방정식 $x^2+ax+b=0$이 두 허근을 갖는 경우

방정식 $f'(x)=0$의 실근 중 하나가 $x=-1$이므로

$3-2a+b=0,\ b=2a-3$

방정식 $x^2+ax+2a-3=0$의 판별식을 D라 하면

$D=a^2-8a+12<0$에서 $2<a<6$

$$f(x)=x^3+ax^2+(2a-3)x$$

$=x(x^2+ax+2a-3)$

이므로 $f'(x)=0$에서 $x=\frac{3-2a}{3},\ x=-1$

$g'(x)=0$에서 $x=\frac{3-2a}{3},\ x=-1,\ x=0$

함수 $g(x)$가 $x=\alpha,\ x=-1,\ x=\beta$에서만 극값을 가지므로

$\frac{3-2a}{3}<-1$

함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면

x	$\cdots$	$\frac{3-2a}{3}$	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$		$+$
$f(x)$	$-$		$-$		$-$	0	$+$
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	↘	극소	↗	극대	↘	극소	↗

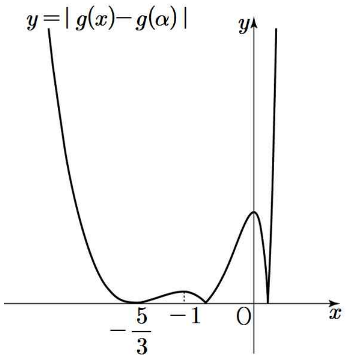
$2<a<6,\ \frac{3-2a}{3}<-1$을 만족하는 정수 a는 4, 5이다.

$a=4$이면 $b=5$

함수 $g(x)$는 $x=-\frac{5}{3},\ x=-1,\ x=0$에서 극값을 갖고

$g(\alpha)=g\left(-\frac{5}{3}\right)=e^{-\frac{50}{27}}+\frac{50}{27}>1,\ g(0)=1$이므로

함수 $y=|g(x)-g(\alpha)|$의 미분가능하지 않은 점의 개수는 2이다.



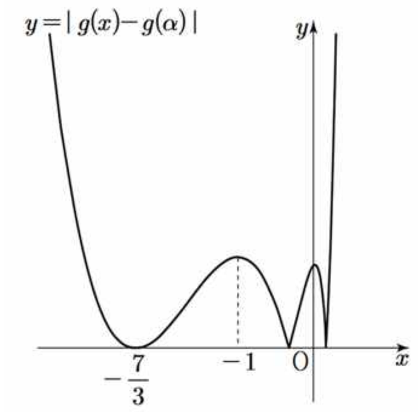
$\therefore \{f(-1)\}^2=(-2)^2=4$

$a=5$이면 $b=7$

함수 $g(x)$는 $x=-\frac{7}{3}$, $x=-1$, $x=0$에서 극값을 갖고,

$g(\alpha)=g\left(-\frac{7}{3}\right)=e^{-\frac{49}{27}}+\frac{49}{27}>1$, $g(0)=1$이므로

함수 $y=|g(x)-g(\alpha)|$의 미분가능하지 않은 점의 개수는 2이다.



$\therefore \{f(-1)\}^2=(-3)^2=9$

따라서 (ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의하여 $\{f(-1)\}^2$의 최댓값은 9이다.

54) [정답] 95

[해설]

$f(x)\neq 0$일 때

$$g'(x)=\frac{\pi(\sin\pi x)f(x)-(1-\cos\pi x)f'(x)}{\{f(x)\}^2}$$

$f(0)\neq 0$이면 $g'(0)=0$이 되어 조건 (가)에 모순이므로

$f(0)=0$이고 $g(0)=\frac{7}{128}\pi^2$

함수 $g(x)$는 $x=0$에서 연속이므로

$$\lim_{x\to 0}g(x)=\frac{7}{128}\pi^2 \quad \cdots\cdots ㉠$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos\pi x}{f(x)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2\pi x}{f(x)(1+\cos\pi x)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left\{\left(\frac{\sin\pi x}{\pi x}\right)^2\times\frac{(\pi x)^2}{f(x)}\times\frac{1}{1+\cos\pi x}\right\}$$

$$=\frac{7}{128}\pi^2$$

이므로 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $h(x)$에 대하여

$f(x)=kx^2h(x)$ (k는 $k\neq 0$인 상수, $h(0)\neq 0$) $\cdots\cdots$ ㉡

이라 하자.

함수 $f(x)$가 $x=a$에서 극댓값을 가지므로 $f'(a)=0$이다.

$f(a)=0$이라 가정하면 $f(x)=kx^2(x-a)^2$이고, $k>0$일 때 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 극솟값을 가지므로 모순이고,

$k<0$일 때 $f(1)\leq 0$이므로 $g(1)=\frac{2}{7}$라는 조건에 모순이다.

그러므로 $f(a)\neq 0$이다.

함수 $g(x)$가 $x=a$에서 극값을 가지므로

$$g'(a)=\frac{\pi(\sin a\pi)f(a)}{\{f(a)\}^2}=0$$

$\sin a\pi=0$이고

$\sin 2a\pi=0$, $\cos 2a\pi=1$ $\cdots\cdots$ ㉢

$f(2a)\neq 0$이면 $g'(x)=\frac{\pi(\sin\pi x)f(x)-(1-\cos\pi x)f'(x)}{\{f(x)\}^2}$에서

$g'(2a)=0$이 되어 조건 (가)에 모순이므로 $f(2a)=0$이다.

㉡에서 $f(x)=kx^2(x-2a)(x-b)$라 하면

$f'(a)=ka^2(b-2a)=0$이므로 $b=2a$이고

$$f(x)=kx^2(x-2a)^2$$

함수 $f(x)$는 $x=a$에서 극대이므로 $k>0$

㉠에서 $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos\pi x}{kx^2(x-2a)^2}=\frac{7}{128}\pi^2$

$$ka^2=\frac{16}{7} \quad \cdots\cdots ㉣$$

$g(1)=\frac{2}{7}$에서 $k(1-2a)^2=7$ $\cdots\cdots$ ㉤

㉣, ㉤에서 $\frac{7a^2}{16}=\frac{(1-2a)^2}{7}$이므로

$a=\frac{4}{15}$ 또는 $a=4$

㉢에 의하여 $a=4$이고 $k=\frac{1}{7}$이다.

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{7(1-\cos\pi x)}{x^2(x-8)^2} & (x\neq 0 \text{ 이고 } x\neq 8)\\ \dfrac{7}{128}\pi^2 & (x=0 \text{ 또는 } x=8)\end{cases}$$

$$g(-1)=\frac{14}{81}$$

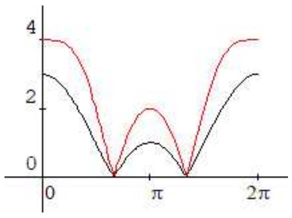
따라서 $p+q=95$

55) [정답] ⑤

[해설]

ㄱ. $g(x)=|2\cos x+1|$와

$h_1(x)=4\sin\left(\dfrac{\pi}{6}g(x)\right)$의 그래프는 그림과 같다.



$x=\dfrac{2}{3}\pi,\ x=\dfrac{4}{3}\pi$에서

$h_1(x)$는 미분가능하지 않다.

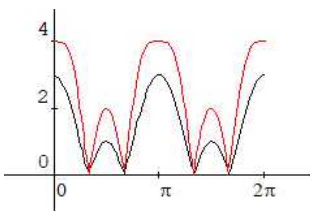
ㄴ. $g(x)=|2\cos(2x)+1|$와

$h_2(x)=4\sin\left(\dfrac{\pi}{6}g(x)\right)$의 그래프에서

$h_2(x)=2$의 실근은 $g(x)=1$

즉, $\cos(2x)=0$ 또는 $\cos(2x)=-1$

$x=\dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{3}{4}\pi,\ \dfrac{5}{4}\pi,\ \dfrac{7}{4}\pi$ 또는 $\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{3}{2}\pi$ --- 6개이다.



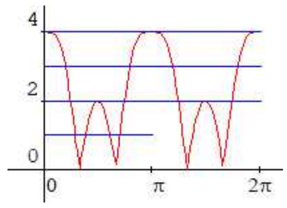
ㄷ. $y=|h_1(x)-1|$에서 $a_1=6$

$h_2(x)=h_1(2x)$이므로 $a_2=8$

$h_3(x)=h_1(3x)$이므로 $a_3=12$

$h_4(x)=h_1(4x)$이므로 $a_4=8$

$$\therefore \sum_{k=1}^{4}a_k=6+8+12+8=34$$



56) [정답] **64**

[해설]

곡선 $y=t^3\ln(x-t)$와 곡선 $y=2e^{x-a}$이 만나는 점의 x좌표를 α $(\alpha>t)$라 하면

$$t^3\ln(\alpha-t)=2e^{\alpha-a} \quad\cdots\cdots ㉠$$

곡선 $y=t^3\ln(x-t)$와 곡선 $y=2e^{x-a}$이 한 점에서 만나려면 두 곡선이 만나는 점에서의 미분계수가 같아야 한다.

곡선 $y=t^3\ln(x-t)$에서 $\quad y'=t^3\times\dfrac{1}{x-t}$

곡선 $y=2e^{x-a}$에서 $\quad y'=2e^{x-a}$

이때,

$$t^3\times\frac{1}{\alpha-t}=2e^{\alpha-a} \quad\cdots\cdots ㉡$$

㉠의 양변을 t에 대하여 미분하면

$$3t^2\ln(\alpha-t)+t^3\times\left(-\frac{1}{\alpha-t}\right)=2e^{\alpha-a}\times(-1)\times\frac{da}{dt}$$

$$t^3\ln(\alpha-t)\times\frac{3}{t}-\frac{t^3}{\alpha-t}=2e^{\alpha-a}\times(-1)\times\frac{da}{dt}$$

㉠, ㉡에 의해

$$2e^{\alpha-a}\times\frac{3}{t}-2e^{\alpha-a}=2e^{\alpha-a}\times(-1)\times\frac{da}{dt}$$

$$\frac{3}{t}-1=(-1)\times\frac{da}{dt}$$

$$\frac{da}{dt}=-\frac{3}{t}+1$$

$t=\dfrac{1}{3}$일 때 $\dfrac{da}{dt}=-8$이므로 $\quad f'\left(\dfrac{1}{3}\right)=8$

따라서 $\left\{f'\left(\dfrac{1}{3}\right)\right\}^2=(-8)^2=64$

57) [정답] **93**

[해설]

$a=f(1),\ b=f(3)$ 이라 하자.

$f'(x^2+x+1)=\pi a\sin\pi x+bx+5x^2$ 의 양변에 $2x+1$을 곱하면

$(2x+1)f'(x^2+x+1)=a\pi(2x+1)\sin\pi x+bx+(2b+5)x^2+10x^3$ 이다.

위 식의 양변을 부정적분 하면

$$f(x^2+x+1) = -a(2x+1)\cos\pi x+\frac{2a}{\pi}\sin\pi x+\frac{b}{2}x^2+\frac{2b+5}{3}x^3+\frac{5}{2}x^4+C$$

이다. (단, C는 상수)

$g(x)=x^2+x+1$이라 하자.

$a=f(g(0))=-a+C$ …… ㉠

$a=f(g(-1))=-a+\frac{b}{2}-\frac{2b+5}{3}+\frac{5}{2}+C$ …… ㉡

$b=f(g(1))=3a+\frac{b}{2}+\frac{2b+5}{3}+\frac{5}{2}+C$ …… ㉢

이때,

㉡+㉢ $\Rightarrow$ $a+b=2a+b+2C+5$ 이고

㉠ $\Rightarrow$ $C=2a$ 이다.

따라서 $a=-1,\ b=5,\ C=-2$ 이고

$f(x^2+x+1)=(2x+1)\cos\pi x-\frac{2}{\pi}\sin\pi x+\frac{5}{2}x^2+5x^3+\frac{5}{2}x^4-2$

이다.

$f(x^2+x+1)$에 $x=2$를 대입하면 $f(7)=93$ 이다.

58) [정답] **12**

[해설]

$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{4}a+\frac{\sqrt{2}}{2}b=3\sqrt{2}$ 에서

$a+2b=12$ …… ㉠

$f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{3\sqrt{3}}{8}a+\frac{\sqrt{3}}{2}b=5\sqrt{3}$ 에서

$3a+4b=40$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하면 $a=16,\ b=-2$.

$\therefore f(x)=2\sin x(8\sin^2 x-1)$

양변을 미분하면 $f'(x)=2\cos x(24\sin^2 x-1)$

$f'(x)=0$을 만족하는 값은 $\sin x=\pm\frac{1}{2\sqrt{6}}$, $\cos x=0$인 x의 값이므로 함수 $f(x)$의 증감표를 그리면 다음과 같다.

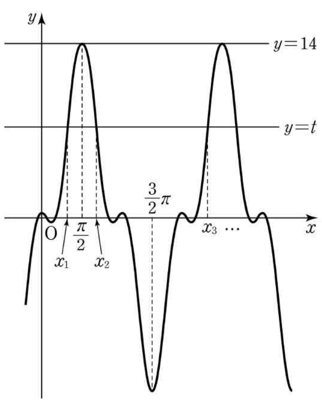
x	0	$\cdots$	α	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	β	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$		↘		↗		↘		↗

γ	$\cdots$	$\frac{3}{2}\pi$	$\cdots$	δ	$\cdots$	2π
	$-$		$+$		$-$	
	↘		↗		↘	

그런데, $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=14$, $f(\alpha)=16\sin^3\alpha-2\sin\alpha=\frac{\sqrt{6}}{9}<1$

($\because\ \sin\alpha=-\frac{1}{2\sqrt{6}}$)

이므로 $f(x)=t\,(1<t<14)$의 그래프를 그리면 다음과 같다.



위의 그래프를 보면

$x_1,\ x_3,\ x_5,\ \cdots$가 공차가 2π인 등차수열이므로

$x_{2n-1}=x_1+(n-1)\cdot 2\pi$

또, $f(x_1)=f(x_3)=f(x_5)=\cdots=f(x_{2n-1})$이고,

$f'(x_1)=f'(x_3)=f'(x_5)=\cdots=f'(x_{2n-1})$ …… ㉠

마찬가지로 $x_2,\ x_4,\ x_6,\ \cdots$도 공차가 2π인 등차수열이므로

$x_{2n}=x_2+(n-1)\cdot 2\pi$

또, $f(x_2)=f(x_4)=f(x_6)=\cdots=f(x_{2n})$이고,

$f'(x_2)=f'(x_4)=f'(x_6)=\cdots=f'(x_{2n})$ …… ㉡

따라서 $c_n=\int_{3\sqrt{2}}^{5\sqrt{3}}\frac{t}{f'(x_n)}dt$에 적용시킬 때, 홀수항과 짝수항을 구분하여 적용하면 다음과 같다.

(ⅰ) $c_{2n-1}=\int_{3\sqrt{2}}^{5\sqrt{3}}\frac{t}{f'(x_{2n-1})}dt$

$=\int_{3\sqrt{2}}^{5\sqrt{3}}\frac{t}{f'(x_1)}dt$ ($\because$ ㉠) …… ㉢

위의 그래프에서 $f(x_1)=t$이고, 조건에서 $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=3\sqrt{2}$, $f\left(\frac{\pi}{3}\right)=5\sqrt{3}$이므로 $f'(x_1)dx_1=dt$을 ㉢에 대입하면

$$c_{2n-1}=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} f(x_1)\,dx_1$$

$$=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}(16\sin^3 x_1-2\sin x_1)dx_1$$

$$=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\sin x_1(16\sin^2 x_1-2)dx_1$$

$$=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\sin x_1\{16(1-\cos^2 x_1)-2\}dx_1$$

$$=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\{\sin x_1(14-16\cos^2 x_1)\}dx_1 \quad \cdots\cdots \text{㉣}$$

㉣에서 치환적분을 하면 $\cos x_1=t$라 하면

$-\sin x_1 dx_1=dt$이고 $\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$이므로

$$c_{2n-1}=-\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{1}{2}}(14-16t^2)dt$$

$$=-\left[14t-\frac{16}{3}t^3\right]_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{17\sqrt{2}}{3}-\frac{19}{3} \quad \cdots\cdots \text{㉤}$$

(ii) $c_{2n}=\int_{3\sqrt{2}}^{5\sqrt{3}}\frac{t}{f'(x_{2n})}dt$

$$=\int_{3\sqrt{2}}^{5\sqrt{3}}\frac{t}{f'(x_2)}dt \ (\because \text{㉡}) \quad \cdots\cdots \text{㉥}$$

위의 그래프에서 $f(x_2)=t$이고, 조건에서 $f\left(\frac{3\pi}{4}\right)=3\sqrt{2}$, $f\left(\frac{2\pi}{3}\right)=5\sqrt{3}$이므로 $f'(x_2)dx_2=dt$을 ㉢에 대입하면

$$c_{2n}=\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{2\pi}{3}} f(x_2)\,dx_2$$

$$=\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{2\pi}{3}}(16\sin^3 x_2-2\sin x_2)dx_2$$

$$=\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{2\pi}{3}}\sin x_2(16\sin^2 x_2-2)dx_2$$

$$=\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{2\pi}{3}}\sin x_2\{16(1-\cos^2 x_2)-2\}dx_2$$

$$=\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{2\pi}{3}}\{\sin x_2(14-16\cos^2 x_2)\}dx_2 \quad \cdots\cdots \text{㉦}$$

㉦에서 치환적분을 하면 $\cos x_2=t$라 하면

$-\sin x_2 dx_2=dt$이고 $\cos\frac{3\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{2}$이므로

$$c_{2n}=-\int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{-\frac{1}{2}}(14-16t^2)dt$$

$$=-\left[14t-\frac{16}{3}t^3\right]_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{-\frac{1}{2}}$$

$$=-\frac{17\sqrt{2}}{3}+\frac{19}{3} \quad \cdots\cdots \text{㉧}$$

㉤, ㉧에서 $c_{2n}+c_{2n-1}=0$

즉, $c_1+c_2=0$, $c_3+c_4=0$, $\cdots$, $c_{99}+c_{100}=0$이므로

$$\sum_{n=1}^{101}c_n=(c_1+c_2)+(c_3+c_4)+\cdots+(c_{99}+c_{100})+c_{101}$$

$$=c_{101}=c_1$$

$$=\frac{17\sqrt{2}}{3}-\frac{19}{3} \ (\because \text{㉤})$$

따라서 $p=-\frac{19}{3}$, $q=\frac{17}{3}$이므로 $q-p=\frac{17}{3}-\left(-\frac{19}{3}\right)=12$

59) [정답] ②

[해설]

ㄱ. 조건 (가)에서

$$g(x)=(x+1)\int_1^x f'(t)dt-\int_1^x tf'(t)dt$$

양변을 x에 대하여 미분하면

$$g'(x)=\int_1^x f'(t)dt+(x+1)f'(x)-xf'(x)$$

$$=\int_1^x f'(t)dt+f'(x)$$

따라서 $g'(1)=f'(1)=\frac{1}{e}$ (참)

ㄴ. 조건 (가)에서 $g(x)=\int_1^x f'(t)(x+1-t)dt$의

양변에 $x=1$을 대입하면 $g(1)=0$

조건 (나)에서

$$f(x)=g'(x)-f'(x)=\int_1^x f'(t)dt$$

이므로 $x=1$을 대입하면 $f(1)=0$

따라서 $g(1)=f(1)$ (참)

ㄷ. $h(x)=g(x)-f(x)$라 하면 ㄴ에 의하여

$h(1)=g(1)-f(1)=0$

$h'(x)=g'(x)-f'(x)=f(x)$

$h'(1)=f(1)=0$

$h''(x)=f'(x)=xe^{-x^2}$

$x>0$에서 $h''(x)>0$이므로 $0<x<1$에서 $h'(x)<0$이고,

$x>1$에서 $h'(x)>0$

$x>0$에서 함수 $h(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$
$h'(x)$		$-$	0	$+$
$h(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$

$x>0$에서 함수 $h(x)$의 최솟값이 0이므로 모든 양수 x에 대하여 $h(x)=g(x)-f(x)\geq 0$이므로 $g(x)<f(x)$인 양수 x가 존재하지 않는다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

60) [정답] 16

[해설]

$g(x)=\int_0^x \frac{f(t)}{|t|+1}dt$, $g'(x)=\frac{f(x)}{|x|+1}$, $g(0)=0$

(가)에서 $g'(2)=0$이므로 $f(2)=0$

(나)에서 $f(0)=0$ 이어야한다. 따라서

$f(x)=x(x-2)(x-c)$이고

$g'(-1)=\frac{f(-1)}{2}$가 최대가 되도록 하려면

$0<c<2$이고 $g(2)\geq 0$ 인 최소의 c일 때이다.

$\frac{f(x)}{x+1}=\frac{x(x-2)(x-c)}{x+1}=x^2-(3+c)x+3(c+1)-\frac{3(c+1)}{x+1}$

$g(2)=\int_0^2\left(x^2-(3+c)x+3(c+1)-\frac{3(c+1)}{x+1}\right)dx$

$=\left[\frac{1}{3}x^3-x^2-\frac{1}{2}(c+1)x^2+3(c+1)x-3(c+1)\ln(x+1)\right]_0^2$

$=-\frac{4}{3}+4(c+1)-3(c+1)\ln 3\geq 0$

$3(c+1)\geq\frac{4}{4-3\ln 3}$, $f(-1)=-3(c+1)\leq\frac{-4}{4-3\ln 3}$

$\therefore n=-4$, $m=4$, $|m\times n|=16$

61) [정답] 331

[해설]

$g(x)=\lim_{h\to 0+}\left|\frac{f(2^{x+h})-f(2^x)}{h}\right|$에서 $f(2^x)=h(x)$라 하면

$g(x)=\lim_{h\to 0+}\left|\frac{h(x+h)-h(x)}{h}\right|$

$=\left|\lim_{h\to 0+}\frac{h(x+h)-h(x)}{h}\right|$ …… ㉠

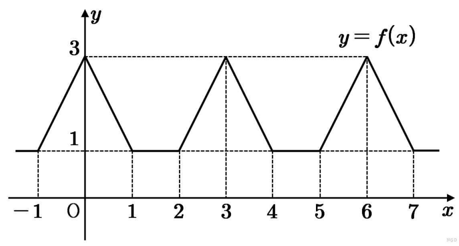
또, $f(2^x)=h(x)$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$h'(x)=f'(2^x)\cdot 2^x\ln 2$ …… ㉡

$\lim_{h\to 0+}\frac{h(x+h)-h(x)}{h}$가 의미하는 것은 x좌표에서의 우미분계수를 의미한다.

$0\leq x<3$에서 $f(x)=|x-1|+|x-2|$이고,

$f(x+3)=f(x)$를 만족하므로 함수 $f(x)$의 그래프와 식은 다음과 같다.



$$f(x)=\begin{cases}-2x+3 & (0\leq x<1)\\ 1 & (1\leq x<2)\\ 2x-3 & (2\leq x<3)\\ \vdots & \vdots\end{cases}$$

각각의 식을 미분하면

$$f'(x)=\begin{cases}-2 & (0\leq x<1)\\ 0 & (1\leq x<2)\\ 2 & (2\leq x<3)\\ \vdots & \vdots\end{cases}$$

$$\therefore f'(2^x)=\begin{cases}-2 & (0\leq 2^x<1)\\ 0 & (1\leq 2^x<2)\\ 2 & (2\leq 2^x<3)\\ \vdots & \vdots\end{cases}$$

㉡에 대입하면

$$h'(x)=\begin{cases}-2\ln 2\cdot 2^x & (0\leq 2^x<1)\\ 0 & (1\leq 2^x<2)\\ 2\ln 2\cdot 2^x & (2\leq 2^x<3)\\ \vdots & \vdots\end{cases}$$

열린구간 $(-5,\ 5)$, 즉 $-5<x<5$의 범위이므로

$2^{-5}<2^x<2^5$에서 $g(x)$의 불연속점을 구하면 된다.

(ⅰ) $2^{-5}<2^x<1$일 때, 즉 $-5<x<0$ 에서

$g(x)=2\ln 2\cdot 2^x$

(ii) $1\le 2^x<2$일 때, 즉, $0\le x<1$에서

$g(x)=0$

(iii) $2\le 2^x<3$일 때, 즉, $1\le x<\log_2 3$에서

$g(x)=2\ln 2\cdot 2^x$

(iv) $3\le 2^x<4$일 때, 즉, $\log_2 3\le x<2$에서

$g(x)=2\ln 2\cdot 2^x$

(v) $4\le 2^x<5$일 때, 즉, $2\le x<\log_2 5$에서

$g(x)=0$

(vi) $5\le 2^x<6$일 때, 즉, $\log_2 5\le x<\log_2 6$에서

$g(x)=2\ln 2\cdot 2^x$

$\vdots$

(*) $31\le 2^x<32$일 때, 즉, $\log_2 31\le x<5$에서

$g(x)=0$

따라서 $2^x=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \cdots,\ 29,\ 31$에서의 연속성을 조사해보면 다음과 같다.

따라서 불연속점은 $x=\log_2 1,\ \log_2 2,\ \log_2 4,\ \log_2 5,\ \cdots,$ $\log_2 28,\ \log_2 29,\ \log_2 31$ ($\because x$가 3의 배수인 점들은 연속이다.)

또, 불연속점의 개수는 $31-10=21$(개)이다.

그런데, $\log_2 1,\ \log_2 4,\ \log_2 7,\ \cdots$인 점에서는 $g(a_m)=0$이고,

$x=\log_2 2,\ \log_2 5,\ \log_2 8,\ \cdots,\ \log_2 29$인 점에서는 $g(a_m)=2\ln 2\cdot 2^x$이므로

$$g(a_m)=2\ln 2\cdot 2^{\log_2 2},\ 2\ln 2\cdot 2^{\log_2 5},\ 2\ln 2\cdot 2^{\log_2 8},\ \cdots$$

으로 봐도 무방하다.

즉, $g(a_m)$의 개수는 10개이고

$$g(a_m)=4\ln 2,\ 10\ln 2,\ 16\ln 2,\ \cdots$$

따라서 수열 $\{g(a_m)\}$의 일반항은

$$g(a_m)=4\ln 2+(m-1)6\ln 2$$

$=(6m-2)\ln 2$

로 볼 수 있다.

$$\therefore\ n+\sum_{k=1}^{n}\frac{g(a_k)}{\ln 2}=21+\sum_{m=1}^{10}\frac{g(a_m)}{\ln 2}$$

$=21+\sum_{m=1}^{10}\frac{(6m-2)\ln 2}{\ln 2}$

$=21+\sum_{m=1}^{10}(6m-2)$

$=21+6\cdot\frac{10\times 11}{2}-2\cdot 10$

$=21+330-20$

$=331$

62) [정답] **29**

[해설]

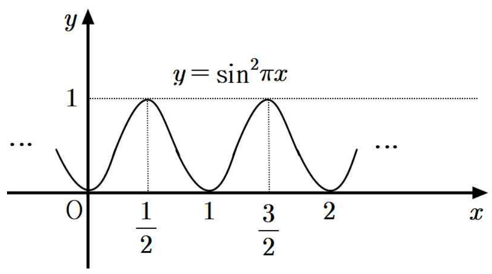
함수 $g(x)=f(\sin^2\pi x)$에서 $h(x)=\sin^2\pi x$라 하면

$h'(x)=2\sin\pi x\cdot\cos\pi x\cdot\pi$이므로 $h'(x)=0$인 값은

$\sin\pi x=0$ 또는 $\cos\pi x=0$

따라서 $x=0,\ \frac{1}{2},\ 1,\ \frac{3}{2},\ 2,\ \cdots$, 즉,

$x=0,\ \frac{1}{2},\ 1,\ \frac{3}{2},\ 2,\ \cdots$에서 극점이므로 그래프를 그리면 다음과 같다.



[그림1]

함수 $g(x)=f(\sin^2\pi x)$에서

$$g'(x)=f'(\sin^2\pi x)\cdot 2\pi\sin\pi x\cos\pi x$$

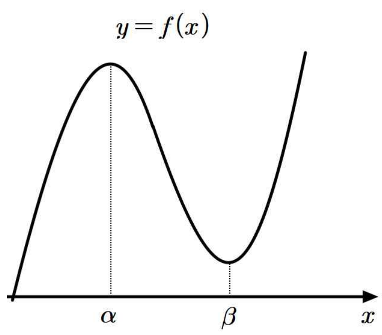
따라서 $0<x<1$에서 $g'(x)=0$이 되는 값은

$$f'(\sin^2\pi x)=0 \text{ 또는 } \cos\pi x=0$$

(가)조건에서 $0<x<1$에서 함수 $g(x)$가 극대가 되는 x의 개수가 3이므로 극소가 최소 2개가 있어야 한다.

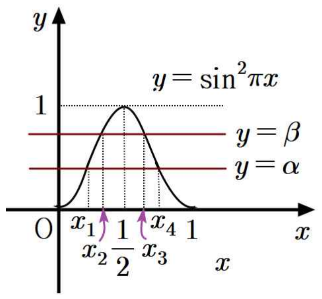
즉, $g'(x)=0$인 값이 최소 5개 이상이어야 하므로 삼차하수 $f(x)$도 극점이 존재해야 한다.

극점을 $\alpha,\ \beta$라고 하면 $f'(\alpha)=0,\ f'(\beta)=0$이므로 아래 그림과 같이 유추할 수 있다.



[그림2]

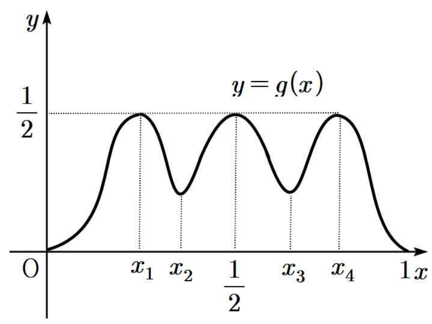
따라서 $f'(\sin^2\pi x)=0$을 만족하는 값은 $\sin^2\pi x=\alpha,\ \beta$을 만족하는 x의 값이므로 아래 그림과 같다.



[그림3]

즉, $g'(x)=0$인 값은 $x=x_1,\ x_2,\ \dfrac{1}{2},\ x_3,\ x_4$이다.

$g(x)$의 그래프를 조건에 맞게 유추해보면 다음 그림과 같다.



따라서 위의 그래프에서 $g(0)=g(1)=0$에서

$f(0)=0$ …… ㉠

$g(x_1)=g(x_4)=\dfrac{1}{2}$이므로 [그림3]에서 $f(\alpha)=\dfrac{1}{2}$ …… ㉡

[그림2]에서 $f'(\alpha)=0$ …… ㉢

$g\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{2}$이므로 $f(1)=\dfrac{1}{2}$ …… ㉣

㉡, ㉢, ㉣에서 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$는

$$f(x)-\frac{1}{2}=(x-\alpha)^2(x-1)$$

㉠을 대입하면 $-\dfrac{1}{2}=-\alpha^2$ $\quad\therefore a=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

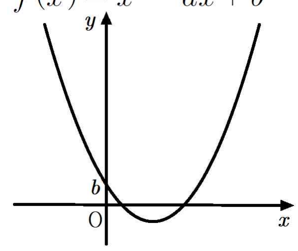
$$\therefore f(x)=\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2(x-1)+\frac{1}{2}$$

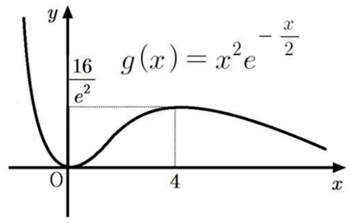
$$\therefore f(2)=\left(2-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\frac{1}{2}=5-2\sqrt{2}$$

따라서 $a=5,\ b=-2$이므로 $a^2+b^2=29$

63) [정답] **6**

[해설]





$g(x)$는 극솟값 $g(0)=0$, 극댓값 $g(4)=\dfrac{16}{e^2}$을 갖고,

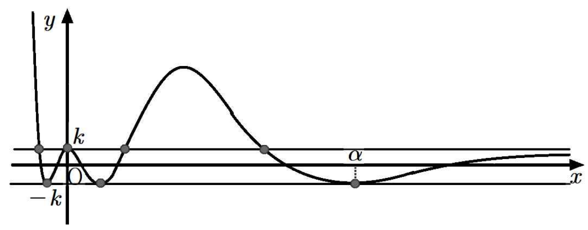
$\lim\limits_{x\to\infty}g(x)=0,\ \lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=\infty$가 된다.

(가) $h(0)=f(0)=b,\ h(4)=f\left(\dfrac{16}{e^2}\right)=\left(\dfrac{16}{e^2}\right)^2-a\left(\dfrac{16}{e^2}\right)+b$이고

$h(0)<h(4)$이므로 $b<\left(\dfrac{16}{e^2}\right)^2-a\left(\dfrac{16}{e^2}\right)+b$

$0<a<\dfrac{16}{e^2}\left(\because\ a>0\right)$ …… ㉠

(나)를 만족시키려면 $h(x)=f(g(x))$의 그래프는 다음과 같아야 한다.



또, $f'(x)=2x-a,\ g'(x)=\dfrac{1}{2}x(4-x)e$이므로

$$h'(x)=g'(x)f'(g(x))$$

$$=\frac{1}{2}x(4-x)e^{-\frac{x}{2}}\{2g(x)-a\}$$

$g(x)=\dfrac{a}{2}$, 즉 $\alpha=\dfrac{a}{2}\left(㉠\text{에서 } 0<\dfrac{a}{2}<\dfrac{8}{e^2}\right)$에서 $h(x)$는 극솟값이 된다.

따라서 $-k=f\left(\dfrac{a}{2}\right)$이어야 하므로

$f(x)=\left(x-\dfrac{a}{2}\right)^2+b-\dfrac{a^2}{4}$에서 $b-\dfrac{a^2}{4}=-k$

그런데 $f(0)=k=b$이므로 $\dfrac{a^2}{4}=2b$, 즉 $b=\dfrac{a^2}{8}$ …… ㉡

한편 $f(1)=1-a+b=1-a+\dfrac{a^2}{8}=-\dfrac{7}{32}$이므로

$$4a^2-32a+39=0,\ (2a-13)(2a-3)=0$$

㉠에서 $0<a<\dfrac{16}{e^2}$이므로 $a=\dfrac{3}{2}$

$\cdots\cdots$ ㉢

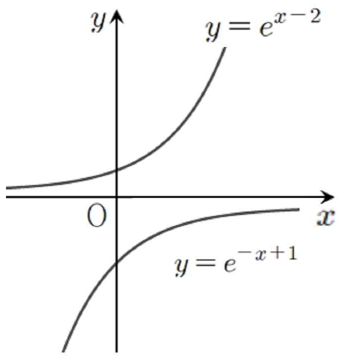
㉡에 대입하면 $b=\dfrac{9}{32}$

따라서 ㉡, ㉢에서 $a+16b=\dfrac{3}{2}+\dfrac{9}{2}-=6$

64) [정답] **43**

[해설]

$y=e^{x-2}$와 $y=-e^{-x+1}$의 그래프는 다음과 같다.



모든 실수 x에 대하여 부등식

$$-e^{-x+1}\le ax+b\le e^{x-2}$$

이 성립하려면 직선 $y=ax+b$가 두 그래프의 사이에 있으면 된다.

즉, $a\ge 0$

그래프 $y=e^{x-2}$ 위의 점 $(t,\ e^{t-2})$에서의 접선의 방정식은

$$y=e^{t-2}(x-t)+e^{t-2} \qquad \cdots\cdots ㉠$$

그래프 $y=-e^{-x+1}$위의 점 $(s,\ -e^{-s+1})$에서의 접선의 방정식은

$$y=e^{-s+1}(x-s)-e^{-s+1} \qquad \cdots\cdots ㉡$$

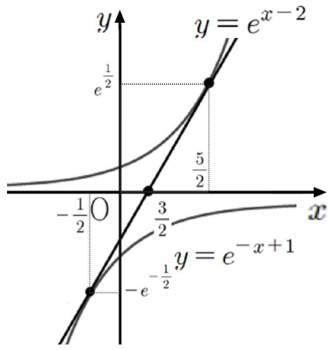
이때, 그래프 $y=e^{x-2}$와 그래프 $y=-e^{-x+1}$에 동시에 접하는 접선의 방정식을 구하면 ㉠, ㉡이 일치할 때이다.

즉, $e^{t-2}(x-t)+e^{t-2}=e^{-s+1}(x-s)-e^{-s+1}$

$$t-2=-s+1 \qquad \cdots\cdots ㉢$$

$$(-t+1)e^{t-2}=(-s-1)e^{-s+1} \qquad \cdots\cdots ㉣$$

㉢, ㉣을 연립하면 $t=\dfrac{5}{2},\ s=\dfrac{1}{2}$



위의 그래프에서 조건을 만족하려면

$$t\le\frac{5}{2},\ s\ge\frac{1}{2} \qquad \cdots\cdots ㉤$$

(ⅰ) 그래프 $y=e^{x-2}$위의 점 $(t,\ e^{t-2})$에서의 접선의 방정식 $y=e^{t-2}(x-t)+e^{t-2}$에서

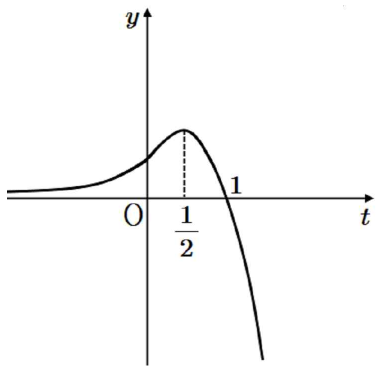
$$a=e^{t-2},\ b=(-t+1)e^{t-2}$$

따라서 $ab=f(t)=e^{2t-4}(-t+1)$

그런데 ㉤에서 $t\le\dfrac{5}{2}$을 만족하므로

$$f(t)=e^{2t-4}(-t+1)\left(\text{단, } t\le\frac{5}{2}\right)$$

$f'(t)=e^{2t-4}(-2t+1)$이고 $f'(t)=0$에서 $t=\dfrac{1}{2}$이므로 그래프 개형을 그리면 다음과 같다.



이때 ab의 최댓값은 $t=\dfrac{1}{2}$일 때, $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{2}e^{-3}$

(ⅱ) 그래프 $y=-e^{-x+1}$위의 점 $(s,\ -e^{-s+1})$에서의 접선의 방정식 $y=e^{-s+1}(x-s)-e^{-s+1}$에서

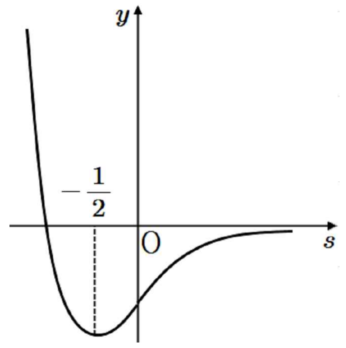
$$a=e^{-s+1},\ b=e^{-s+1}(-s-1)$$

따라서 $ab=g(s)=e^{-2s+2}(-s-1)$

그런데 ㉤에서 $s\ge\dfrac{1}{2}$을 만족하므로

$$g(s)=e^{-2s+2}(-s-1)\left(\text{단, } s\ge\frac{1}{2}\right)$$

$g'(s)=e^{-2s+2}(2s+1)$이고 $g'(s)=0$에서 $s=-\dfrac{1}{2}$이므로 그래프 개형을 그리면 다음과 같다.



이때, ab의 최솟값은 $s=\frac{1}{2}$일 때, $g\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{3}{2}e$

(i), (ii)에서 $M=\frac{1}{2}e^{-3}$, $m=-\frac{3}{2}e$이므로

$$|M\times m^3|=\frac{27}{16}$$

65) [정답] 48

[해설]

$g'(x)=f'(x)\{ae^{af(x)}+b\}$이고 $g'(x)=0$에서

$$f'(x)=0 \text{ 또는 } ae^{af(x)}+b=0$$

(i) $f'(x)=0$인 경우

$$f'(x)=\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2}x=0$$

$$x=1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9,\ 11$$

(ii) $ae^{af(x)}+b=0$인 경우

$e^{af(x)}=-\frac{b}{a}$를 만족시키는 x의 값이 존재해야 하므로

$$\frac{b}{a}<0$$

조건 (나)와 (i)에 의하여 x이 짝수일 때 α_n은 방정식 $ae^{af(x)}+b=0$의 실근이다.

$$ae^{af(\alpha_n)}+b=0 \quad \cdots\cdots \text{㉠}$$

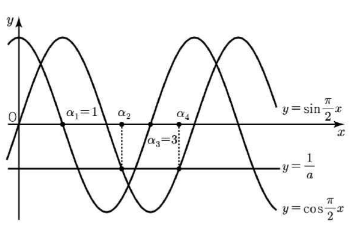
조건 (나)에 의하여 n이 짝수일 때

$$e^{af(\alpha_n)}+bf(\alpha_n)=0 \quad \cdots\cdots \text{㉡}$$

㉠, ㉡에서 $abf(\alpha_n)-b=0$이고, $f(\alpha_n)=\frac{1}{a}$

n이 짝수일 때, $f(\alpha_n)=\frac{1}{a}$을 만족시키려면 $-1<\frac{1}{a}<0$

그러므로 $a<-1$, $b>0$



열린구간 $(0,\ 4)$에서 함수 $g(x)$가 $x=\alpha$에서 극소인 서로 다른 α의 개수는 2이다.

함수 $g(x)$의 열린구간 $(0,\ 4)$에서의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	α_1	$\cdots$	α_2	$\cdots$	α_3	$\cdots$	α_4	$\cdots$	4
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$		$\nearrow$	e^a+b	$\searrow$	0	$\nearrow$	$e^{-a}-b$	$\searrow$		$\nearrow$	

함수 $g(x)$는 $x=0$과 $x=4$에서 극값을 갖지 않고 열린구간 $(0,\ 12)$에서 $g(x+4)=g(x)$를 만족한다.

열린구간 $(0,\ 12)$에서 함수 $g(x)$가 극댓값을 갖도록 하는 서로 다른 x의 개수와 극솟값을 갖도록 하는 서로 다른 x의 개수는 각각 6이므로 $m=12$

함수 $g(x)$는 열린구간 $(0,\ 4)$에서 $x=\alpha_1$과 $x=\alpha_3$일 때 각각 극댓값 e^a+b, $e^{-a}-b$를 갖는다.

함수 $g(x)$의 서로 다른 두 극댓값의 합이 e^3+e^{-3}이므로

$$(e^a+b)+(e^{-a}-b)=e^a+e^{-a}=e^3+e^{-3}$$

a는 음수이므로 $a=-3$

$f(\alpha_2)=f(\alpha_4)=-\frac{1}{3}$이고 ㉡에 대입하면

$$g(\alpha_2)=e^{-3f(\alpha_2)}+bf(\alpha_2)=e-\frac{1}{3}b=0$$

에서 $b=3e$

$$m\pi\int_{\alpha_3}^{\alpha_4}g(x)\cos\frac{\pi}{2}x\,dx$$

$$=12\pi\int_{\alpha_3}^{\alpha_4}\left\{e^{-3\sin\frac{\pi}{2}x}+3e\sin\frac{\pi}{2}x\right\}\cos\frac{\pi}{2}x\,dx$$

$\sin\frac{\pi}{2}x=t$로 치환하면 $\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2}x=\frac{dt}{dx}$이고

$\sin\frac{\pi}{2}\alpha_3=\sin\frac{3}{2}\pi=-1$, $\sin\frac{\pi}{2}\alpha_4=-\frac{1}{3}$이다.

$$=12\pi\int_{\alpha_3}^{\alpha_4}\left\{e^{-3\sin\frac{\pi}{2}x}+3e\sin\frac{\pi}{2}x\right\}\cos\frac{\pi}{2}x\,dx$$

$$=24\int_{-1}^{-\frac{1}{3}}(e^{-3t}+3et)\,dt$$

$$=24\left[-\frac{1}{3}e^{-3t}+\frac{3}{2}et^2\right]_{-1}^{-\frac{1}{3}}$$

$$=8e^3-40e$$

따라서 $p=8$, $q=-40$이므로 $p-q=48$

66) [정답] 25

[해설]

$f(x)=kx^2+px+q$ (p, q는 상수)라 하면

$f(0)=f(-2)$이므로 $q=4k-2p+q$, $p=2k$

$f(0)\neq 0$이므로 $q\neq 0$

따라서 $f(x)=kx^2+2kx+q$ ($k>0$, $q\neq 0$)

조건 (가)에서 $(x+1)\{g(x)-mx-m\}\leq 0$

$x\geq -1$일 때, $g(x)\leq mx+m$

$x<-1$일 때, $g(x)\geq mx+m$이고, $g(x)$는 연속함수이므로

$$g(-1)=0$$

$(-a+b)e^{f(-1)}=0$에서 $b=a$

$g(x)=(ax+a)e^{kx^2+2kx+q}$에서

$$g'(x)=a\{1+2k(x+1)^2\}e^{kx^2+2kx+q}$$

$$g''(x)=2ak(x+1)\{3+2k(x+1)^2\}e^{kx^2+2kx+q}$$

$a<0$, $k>0$이므로 모든 실수 x에 대하여

$g'(x)<0$이고, $x<-1$이면 $g''(x)>0$, $x>-1$이면 $g''(x)<0$이다.

조건 (가)에서 m의 최솟값이 -2이므로 $g'(-1)=-2$

$$ae^{-k+q}=-2 \quad \cdots\cdots ㉠$$

조건 (나)의 $\int_0^1 g(x)dx=\frac{e-e^4}{k}$에서 $kx^2+2kx+q=t$라 하면

$$\int_0^1 g(x)dx=\int_q^{3k+q}\frac{a}{2k}e^t dt$$

$$=\left[\frac{a}{2k}e^t\right]_q^{3k+q}$$

$$=\frac{a}{2k}\left(e^{3k+q}-e^q\right)$$

㉠을 대입하면 $\frac{-2e^k}{2k}(e^{3k}-1)=\frac{e-e^4}{k}$, $-e^{4k}+e^k=e-e^4$

$$e^{4k}-e^4-e^k+e=0$$

$$(e^k-e)\{(e^{2k}+e^2)(e^k+e)-1\}=0$$

$(e^{2k}+e^2)(e^k+e)-1>0$이므로 $e^k-e=0$, 즉 $k=1$

조건 (나)에서

$$\int_{-2f(0)}^1 g(x)dx-\int_0^1 g(x)dx$$

$$=\int_{-2f(0)}^0 g(x)dx$$

$$=0$$

$k=1$이므로 $x^2+2x+q=t$라 하면

$$\int_{-2f(0)}^0 g(x)dx=\int_{4q^2-3q}^q \frac{a}{2}e^t dt$$

$$=\left[\frac{a}{2}e^t\right]_{4q^2-3q}^q$$

$$=\frac{a}{2}\left(e^q-e^{4q^2-3q}\right)$$

$$=0$$

$a\neq 0$에서 $q=4q^2-3q$이고 $q\neq 0$이므로 $q=1$

㉠에 대입하면 $ae^{-1+1}=-2$, $a=-2$

따라서 $a=-2$, $b=-2$, $f(x)=x^2+2x+1$이므로

$$f(ab)=f(4)=16+8+1=25$$

67) [정답] 13

[해설]

$|x|>1$일 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{x^{2n}}=0$이므로

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{a+\frac{b}{x}+\frac{1}{x^{2n-1}}}{1+\frac{2}{x^{2n}}}=a+\frac{b}{x}$$

$x=1$일 때, $f(1)=\frac{a+b+1}{3}$

$x=-1$일 때, $f(-1)=\frac{a-b-1}{3}$

$|x|<1$일 때, $\lim_{n\to\infty}x^{2n}=0$이므로

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{ax^{2n}+bx^{2n-1}+x}{x^{2n}+2}=\frac{0+0+x}{0+2}=\frac{x}{2}$$

따라서

$$f(x)=\begin{cases} a+\dfrac{b}{x} & (|x|>1) \\ \dfrac{a+b+1}{3} & (x=1) \\ \dfrac{a-b-1}{3} & (x=-1) \\ \dfrac{x}{2} & (|x|<1) \end{cases}$$

함수 $g(x)=2(x-1)+m$이라 하면

방정식 $f(x)=2(x-1)+m$의 실근의 개수는

두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 만나는 점의 개수와 같다.

$x<-1$에서 $f(x)$는 감소하고 $x>1$에서 $f(x)$는 감소하므로

$|x|>1$에서 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 만나는 점의 개수의 최댓값은 2이고,

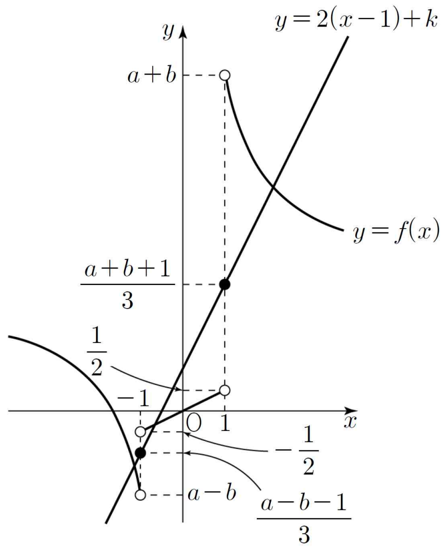
$|x|<1$에서 $f(x)$는 최고차항의 계수가 $\dfrac{1}{2}$인

일차함수이므로 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 만나는 점의 개수의 최댓값은 1이다.

그러므로 $c_k=5$인 자연수 k가 존재하려면

$f(1)=g(1)$, $f(-1)=g(-1)$이어야 하고,

두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 개형은 그림과 같아야 한다.



즉, 직선 $y=2(x-1)+k$는

두 점 $\left(1,\ \dfrac{a+b+1}{3}\right)$, $\left(-1,\ \dfrac{a-b-1}{3}\right)$을 지나므로

$\dfrac{a+b+1}{3}=k$, $\dfrac{a-b-1}{3}=k-4$에서

$b=5$

$k=\dfrac{a}{3}+2$가 자연수이므로 a는 3의 배수이다. …… ㉠

$\lim\limits_{x\to-1-}f(x)<f(-1)<\lim\limits_{x\to-1+}f(x)$이어야 하므로

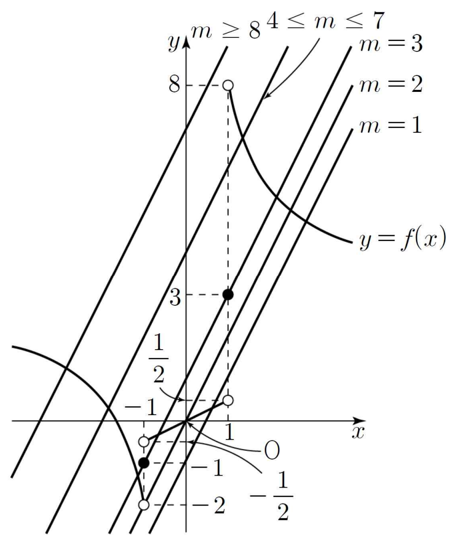
$a-5<\dfrac{a}{3}-2<-\dfrac{1}{2}$에서 $a<\dfrac{9}{2}$

…… ㉡

$a>0$이므로 $\dfrac{1}{2}<\dfrac{a}{3}+2<a+5$가 성립하며

$\lim\limits_{x\to1-}f(x)<f(1)<\lim\limits_{x\to1+}f(x)$를 만족시킨다.

㉠, ㉡에 의해 $0<a<\dfrac{9}{2}$이므로 $a=3$, $k=3$



(ⅰ) $m=1$일 때
$g(-1)=-3$, $g(1)=1$이므로 $y=f(x)$의 그래프와 $y=g(x)$의 그래프는 $-1<x<1$, $x>1$에서 각각 1개씩 교점을 갖는다.
그러므로 $c_1=2$

(ⅱ) $m=2$일 때
$g(-1)=-2$, $g(1)=2$이므로 $y=f(x)$의 그래프와 $y=g(x)$의 그래프는 $x=0$, $x>1$에서 각각 1개씩 교점을 갖는다.
그러므로 $c_2=2$

(ⅲ) $m=3$일 때
$m=k=3$이므로 $c_3=5$

(ⅳ) $4\leq m\leq 7$일 때
$g(-1)>\lim\limits_{x\to-1+}f(x)=-\dfrac{1}{2}$,
$g(1)<\lim\limits_{x\to1+}f(x)=8$이므로
$y=f(x)$의 그래프와 $y=g(x)$의 그래프는 $x<-1$, $x>1$에서 각각 1개씩 교점을 갖는다.
그러므로 $c_m=2$

(ⅴ) $m \geq 8$일 때

$g(-1) > \lim_{x \to -1+} f(x) = -\frac{1}{2}$,

$g(1) \geq \lim_{x \to 1+} f(x) = 8$이므로

$y=f(x)$의 그래프와 $y=g(x)$의 그래프는 $x<-1$에서 1개의 교점을 갖는다.

그러므로 $c_m = 1$

(ⅰ)~(ⅴ)에 의해

$$k + \sum_{m=1}^{\infty}(c_m - 1) = 3+1+1+4+1\times 4 = 13$$

68) [정답] 11

[해설]

곡선 $y=\ln(1+e^{2x}-e^{-2t})$과 직선 $y=x+t$가 만나는 서로 다른 두 점을 $(\alpha,\ \alpha+t)$, $(\beta,\ \beta+t)$ (단, $\alpha<\beta$)라 하면

$$f(t) = \sqrt{(\beta-\alpha)^2+(\beta-\alpha)^2} = \sqrt{2}(\beta-\alpha) \quad \cdots\cdots ㉠$$

곡선 $y=\ln(1+e^{2x}-e^{-2t})$와 직선 $y=x+t$를 연립하면

$\ln(1+e^{2x}-e^{-2t}) = x+t$,

$1+e^{2x}-e^{-2t} = e^{x+t}$,

$e^{2x}-e^t\times e^x+1-e^{-2t}=0$,

$(e^x+e^{-t})(e^x-e^{-t})-e^t(e^x-e^{-t})=0$,

$(e^x-e^{-t})(e^x+e^{-t}-e^t)=0$

$\therefore e^x = e^{-t}$ 또는 $e^x = e^t - e^{-t}$

$\therefore x=-t$ 또는 $x=\ln(e^t-e^{-t})$

그런데, $t>\frac{1}{2}\ln 2$이므로 $e^t-e^{-t}>e^{-t}$

즉, $\alpha=-t$, $\beta=\ln(e^t-e^{-t})$

㉠에 대입하면 $f(t)=\sqrt{2}\{\ln(e^t-e^{-t})+t\}=\sqrt{2}\ln(e^{2t}-1)$

양변을 미분하면 $f'(t)=\frac{2\sqrt{2}e^{2t}}{e^{2t}-1}$이므로

$$f'(\ln 2) = \frac{2\sqrt{2}\times 4}{4-1} = \frac{8}{3}\sqrt{2}$$

따라서 $p=3$, $q=8$이므로 $p+q=3+8=11$

69) [정답] 10

[해설]

$f(x) = -\frac{ax^3+bx}{x^2+1}$에서

$f'(x) = -\frac{(3ax^2+b)(x^2+1)-(ax^3+bx)(2x)}{(x^2+1)^2}$이므로

$$f'(x) = -\frac{ax^4+(3a-b)x^2+b}{(x^2+1)^2} \quad \cdots\cdots ㉠$$

모든 실수 x에 대하여 $x^2+1\neq 0$이므로 함수 $f'(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\neq 0$이고 $f'(0)=-b<0$이므로 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)<0$이다.

$h(x)=g(f(x))=f(f(x))-x$이므로

$h(0)=f(f(0))-0=f(0)=0$이다.

조건 (가)에서 $g(2)=f(2)-f^{-1}(2)=h(0)=0$이므로

$f(2)=f^{-1}(2)=t$ (t는 상수)라 하면 $f(t)=2$이다.

모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=-f(x)$이므로

$f(-2)=-f(2)=-t$이다.

즉 두 점 $(t,\ 2)$, $(-2,\ -t)$는 함수 $y=f(x)$의 그래프 위에 있다.

$t\neq -2$일 때, 두 점 $(t,\ 2)$, $(-2,\ -t)$를 지나는 직선의 기울기는 $\frac{2-(-t)}{t-(-2)}=1$이므로 평균값 정리에 의하여 $f'(c)=1$인 상수 c가 존재한다. 그러나 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)<0$이므로 모순이다. 즉 $t=-2$

$f(2)=-2$에서 $-\frac{8a+2b}{5}=-2$

그러므로 $4a+b=5 \quad \cdots\cdots ㉡$

$f^{-1}(2)=-2$이므로 역함수의 미분법에 의하여

$g'(2)=f'(2)-(f^{-1})'(2)=f'(2)-\frac{1}{f'(-2)}$

㉠에서 모든 실수 x에 대하여 $f'(-x)=f'(x)$이므로

$f'(-2)=f'(2)$이다.

즉 $g'(2)=f'(2)-\frac{1}{f'(2)}$

$h(x)=f(f(x))-x$에서 $h'(x)=f'(f(x))f'(x)-1$이므로

$h'(2)=f'(f(2))f'(2)-1=f'(-2)f'(2)-1=\{f'(2)\}^2-1$

조건 (나)에서 $g'(2)=-5h'(2)$이므로

$f'(2)-\frac{1}{f'(2)}=-5\{f'(2)\}^2+5$

$5\{f'(2)\}^3+\{f'(2)\}^2-5f'(2)-1=0$

$\{5f'(2)+1\}\{f'(2)+1\}\{f'(2)-1\}=0$

$f'(x)<0$이므로 $f'(2)=-\frac{1}{5}$ 또는 $f'(2)=-1$이다.

㉠에서 $f'(2)=-\frac{16a+4(3a-b)+b}{(4+1)^2}=-\frac{28a-3b}{25}$

(i) $f'(2)=-\dfrac{1}{5}$일 때, $-\dfrac{28a-3b}{25}=-\dfrac{1}{5}$이므로

$28a-3b=5$ …… ㉢

㉡, ㉢을 연립하면 $a=\dfrac{1}{2}$, $b=3$이다.

(ii) $f'(2)=-1$일 때, $-\dfrac{28a-3b}{25}=-1$이므로

$28a-3b=25$ …… ㉣

㉡, ㉣을 연립하면 $a=1$, $b=1$이므로 모순이다.

따라서 (i), (ii)에 의하여 $4(b-a)=4\times\left(3-\dfrac{1}{2}\right)=10$

70) [정답] 64

[해설]

조건(가)에서 $g(x)$는 실수 전체에서 연속이므로 $x=0$, $x=2$에서 극한값과 함숫값이 같아야 되고 $g(0)\neq 0$이면 $f(0)\neq 0$이어야 된다.

$x=0$일 때 $\lim\limits_{x\to 0+} g(x)=-f(0)$이고 $g(0)=f(0)$이므로

$-f(0)=f(0)$

$\therefore f(0)=0$ …… ㉠

$x=2$일 때 $\lim\limits_{x\to 2-} g(x)=f(2)$이고 $g(2)=f(2)$이므로

$f(2)=f(2)$

$x=2$에서 항상 연속이다.

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (0\le x\le 2) \\ \dfrac{f(x)}{x-1} & (x<0 \text{ 또는 } x>2)\end{cases}$$

$$g'(x)=\begin{cases} f'(x) & (0\le x\le 2) \\ \dfrac{f'(x)(x-1)-f(x)}{(x-1)^2} & (x<0 \text{ 또는 } x>2)\end{cases}$$

$x=0$일 때 $\lim\limits_{x\to 0+} g'(x)=f'(0)$이고,

$\lim\limits_{x\to 0-} g'(x)=-f'(0)-f(0)=-f'(0)(\because\ f(0)\neq 0)$

$x=2$일 때 $\lim\limits_{x\to 2+} g'(x)=f'(2)-f(2)$이고

$\lim\limits_{x\to 2-} g'(x)=f'(2)$

$f'(2)-f(2)\neq f'(2)(\because\ f(2)\neq 0)$

따라서 $x=2$에서 미분불가능하다.

조건(나)에서 $x=a$에 미분불가능한 x값이 1개이므로 $x=0$에서 미분불가능해야 된다.

$\therefore f'(0)=-f'(0)$

$\therefore f'(0)=0$ …… ㉡

㉠, ㉡에 의해 $f(x)=x^2(x-\alpha)(\alpha\neq 0)$

조건 (다)에 따라 $g(k)=0$이면 $f(k)=0$이다.

이때 $k=0$ 또는 $k=\alpha$인데 $g'(0)=0$이므로 $k=\alpha$이어야 한다.

(i) $0\le\alpha\le 2$일 때, $f'(\alpha)=\dfrac{16}{3}$, $\alpha^2=\dfrac{16}{3}$,

$\therefore \alpha=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$

$\alpha>2$이므로 모순

(ii) $\alpha<0$, $2<\alpha$일 때

$\dfrac{(\alpha-1)f'(\alpha)}{(\alpha-1)^2}=\dfrac{\alpha^2}{(\alpha-1)^2}=\dfrac{16}{3}$

$\therefore 3\alpha^2-16\alpha+16=0$

$\therefore \alpha=4$

$\therefore f(x)=x^2(x-4)$

$\lim\limits_{x\to 2-} g'(x)<0$, $\lim\limits_{x\to 2+} g'(x)>0$이므로 $x=2$에서 극솟값을 갖는다.

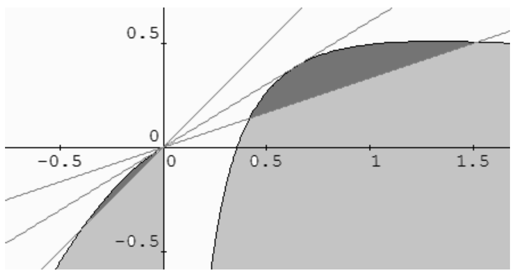
$\therefore g(2)=-8$, $p=-8$

$\therefore p^2=64$

71) [정답] 5

[해설]

그림과 같이 $y=\alpha x$가 원점에서 $y=-x^2+ax$에 접하고 점 $(b,\ f(b))$에서 $y=\dfrac{\ln(x+b)}{x}$에 접할 때,



$\lim\limits_{m\to\alpha-} g(m)=3$, $\lim\limits_{m\to\alpha+} g(m)=2$이므로

주어진 조건을 만족한다.

$y=-x^2+ax$에서 $y'=-2x+a$

$y=\dfrac{\ln(x+b)}{x}$에서 $y'=\dfrac{x-(x+b)\ln(x+b)}{x^2(x+b)}$

$a=\dfrac{\ln(2b)}{b^2}=\dfrac{b-2b\ln(2b)}{2b^3}$

이것을 풀면 $\ln(2b)=\dfrac{1}{4}$이므로 $ab^2=\dfrac{1}{4}$,

$\therefore p+q=4+1=5$

72) [정답] 143

[해설]

조건 (가)에서 $f(1)=1$이므로 조건 (나)에 의하여

$g(2)=2f(1)=2$

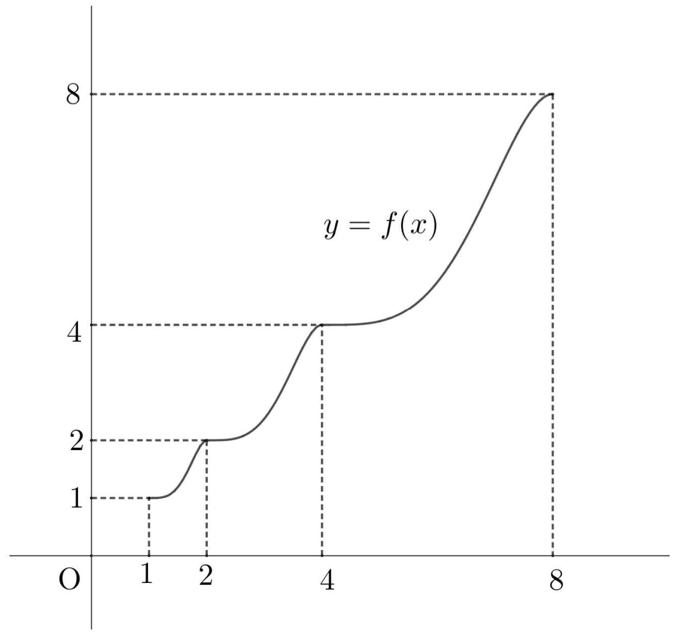
따라서 $f(2)=2$이므로

$g(4)=2f(2)=4$

따라서 $f(4)=4$이므로

$g(8)=2f(4)=8$

따라서 $f(8)=8$이다.



부분적분법에 의하여

$$\int_1^8 xf'(x)\,dx=\Big[xf(x)\Big]_1^8-\int_1^8 f(x)\,dx$$

$$=8f(8)-f(1)-\int_1^8 f(x)\,dx$$

$$=8\times8-1-\int_1^8 f(x)\,dx$$

$$=63-\int_1^8 f(x)\,dx\cdots\cdots ㉠$$

이때

$$\int_1^8 f(x)\,dx=\int_1^2 f(x)\,dx+\int_2^4 f(x)\,dx+\int_4^8 f(x)\,dx\cdots\cdots ㉡$$

이고,

$$\int_1^2 f(x)\,dx=\frac{5}{4}\cdots\cdots ㉢$$

이다.

이때 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 대칭성에 의하여

$$\int_2^4 f(x)\,dx=4\times4-2\times2-\int_2^4 g(y)\,dy$$

$$=12-\int_2^4 g(y)\,dy\cdots\cdots ㉣$$

이때 $y=2t$로 놓으면 치환적분법에 의하여

$$\int_2^4 g(y)\,dy=2\int_1^2 g(2t)\,dt$$

이므로 조건 (나)에서

$$\int_2^4 g(y)\,dy=2\int_1^2 g(2t)\,dt$$

$$=2\int_1^2 2f(t)\,dt$$

$$=4\int_1^2 f(x)\,dx$$

$$=4\times\frac{5}{4}=5$$

㉣에서

$$\int_2^4 f(x)\,dx=12-\int_2^4 g(y)\,dy$$

$$=12-5=7\cdots\cdots ㉤$$

또, 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 대칭성에 의하여

$$\int_4^8 f(x)\,dx=8\times8-4\times4-\int_4^8 g(y)\,dy$$

$$=48-\int_4^8 g(y)\,dy\cdots\cdots ㉥$$

이때 $y=2t$로 놓으면 치환적분법에 의하여

$$\int_4^8 g(y)dy=2\int_2^4 g(2t)\,dt$$

이므로 조건 (나)에서

$$\int_4^8 g(y)\,dy=2\int_2^4 g(2t)\,dt$$

$$=2\int_2^4 2f(t)\,dt$$

$$=4\int_2^4 f(x)\,dx$$

$$=4\times7=28$$

㉥에서

$$\int_4^8 f(x)\,dx=48-\int_4^8 g(y)\,dy$$

$$=48-28=20\cdots\cdots ㉦$$

㉡, ㉢, ㉤, ㉦에서

$$\int_1^8 f(x)\,dx=\int_1^2 f(x)\,dx+\int_2^4 f(x)\,dx+\int_4^8 f(x)\,dx$$

$$=\frac{5}{4}+7+20=\frac{113}{4}$$

이므로 ㉠에서

$$\int_1^8 xf'(x)\,dx=63-\int_1^8 f(x)\,dx$$

$$=63-\frac{113}{4}=\frac{139}{4}$$

따라서

$p+q=4+139=143$

[다른 풀이]

$\int_1^8 xf'(x)\,dx$에서 $x=g(y)$라 하면

$x=1$일 때 $y=1$, $x=8$일 때 $y=8$이고,

$\dfrac{dx}{dy}=g'(y)=\dfrac{1}{f'(x)}$

이므로

$$\int_1^8 xf'(x)\,dx=\int_1^8 g(y)\,dy$$
$$=\int_1^2 g(y)\,dy+\int_2^4 g(y)\,dy+\int_4^8 g(y)\,dy$$

이때

$$\int_1^2 g(y)\,dy=2\times2-1\times1-\int_1^2 f(x)\,dx$$
$$=3-\frac{5}{4}=\frac{7}{4}$$

한편, $\displaystyle\int_2^4 g(y)\,dy=\int_2^4 2f\left(\frac{y}{2}\right)dy$에서

$\dfrac{y}{2}=t$라 하면 $y=2$일 때 $t=1$, $y=4$일 때 $t=2$이고,

$\dfrac{1}{2}=\dfrac{dt}{dy}$이므로

$$\int_2^4 g(y)\,dy=\int_2^4 2f\left(\frac{y}{2}\right)dy$$
$$=\int_1^2 4f(t)\,dt=4\int_1^2 f(t)\,dt$$
$$=4\times\frac{5}{4}=5,$$

또, $\displaystyle\int_4^8 g(y)\,dy=\int_4^8 2f\left(\frac{y}{2}\right)dy$에서

$\dfrac{y}{2}=t$라 하면 $y=4$일 때 $t=2$, $y=8$일 때 $t=4$이고,

$\dfrac{1}{2}=\dfrac{dt}{dy}$이므로

$$\int_4^8 g(y)\,dy=\int_4^8 2f\left(\frac{y}{2}\right)dy$$
$$=\int_2^4 4f(t)\,dt=4\int_2^4 f(t)\,dt$$
$$=4\times\left\{4\times4-2\times2-\int_2^4 g(y)\,dy\right\}$$
$$=4(12-5)=28$$

따라서

$$\int_1^8 xf'(x)\,dx=\int_1^8 g(y)\,dy$$
$$=\int_1^2 g(y)\,dy+\int_2^4 g(y)\,dy+\int_4^8 g(y)\,dy$$
$$=\frac{7}{4}+5+28=\frac{139}{4}$$

이므로

$p+q=4+139=143$

73) [정답] **115**

[해설]

조건 (가)에서 $x\to0$일 때 (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$이어야 한다.

즉, $\displaystyle\lim_{x\to0}\sin(\pi\times f(x))=\sin(\pi\times f(0))=0$에서

$f(0)=n$ (n은 정수)

이다.

한편, 삼차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 9이므로

$f(x)=9x^3+ax^2+bx+n$ (a, b는 상수)로 놓을 수 있다.

이때, $h(x)=\sin(\pi\times f(x))$라 하면 $h(0)=0$이므로

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin(\pi\times f(x))}{x}=\lim_{x\to0}\frac{h(x)-h(0)}{x}$$
$$=h'(0)$$

이다. 즉, $h'(0)=0$이다.

이때, $h'(x)=\pi f'(x)\times\cos(\pi\times f(x))$이므로

$h'(0)=\pi f'(0)\times\cos(n\pi)=0$에서 $f'(0)=0$

$f'(x)=27x^2+2ax+b$에서 $f'(0)=b=0$ …… ㉠

한편, 함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로

$\displaystyle\lim_{x\to1-}g(x)=\lim_{x\to1+}g(x)$이어야 한다.

이때, 함수 $g(x)$는 $0\le x<1$일 때 $g(x)=f(x)$이고 모든 실수 x에 대하여 $g(x+1)=g(x)$이므로

$\displaystyle\lim_{x\to1+}g(x)=\lim_{x\to0+}g(x)$이다.

$$\lim_{x\to1-}g(x)=\lim_{x\to1-}f(x)=9+a+n,$$
$$\lim_{x\to0+}g(x)=\lim_{x\to0+}f(x)=n$$

이므로 $9+a+n=n$

$a=-9$ …… ㉡

$f'(x)=27x^2-18x=9x(3x-2)$이므로 $f'(x)=0$에서

$x=0$ 또는 $x=\dfrac{2}{3}$

함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극대이고 $x=\dfrac{2}{3}$에서 극소이다.

조건 (나)에 의해 $f(0)\times f\left(\dfrac{2}{3}\right)=5$이므로

$n\times\left(n-\dfrac{4}{3}\right)=5$, $(3n+5)(n-3)=0$

n이 정수이므로 $n=3$ …… ㉢

㉠~㉢에 의해 $f(x)=9x^3-9x^2+3$

따라서

$$\int_0^5 xg(x)dx$$
$$=\int_0^1 xg(x)dx+\int_1^2 xg(x)dx+\int_2^3 xg(x)dx$$
$$+\int_3^4 xg(x)dx+\int_4^5 xg(x)dx$$

$$=\int_0^1 xf(x)dx+\int_0^1 (x+1)g(x+1)dx$$
$$+\int_0^1 (x+2)g(x+2)dx$$
$$+\int_0^1 (x+3)g(x+3)dx$$
$$+\int_0^1 (x+4)g(x+4)dx$$
$$=\int_0^1 xf(x)dx+\int_0^1 (x+1)f(x)dx$$
$$+\int_0^1 (x+2)f(x)dx+\int_0^1 (x+3)f(x)dx$$
$$+\int_0^1 (x+4)f(x)dx$$
$$=5\int_0^1 xf(x)dx+10\int_0^1 f(x)dx$$
$$=5\int_0^1 (9x^4-9x^3+3x)dx+10\int_0^1 (9x^3-9x^2+3)dx$$
$$=5\left[\frac{9}{5}x^5-\frac{9}{4}x^4+\frac{3}{2}x^2\right]_0^1+10\left[\frac{9}{4}x^4-3x^3+3x\right]_0^1$$
$$=\frac{21}{4}+\frac{45}{2}=\frac{111}{4}$$

따라서 $p=4$, $q=111$이므로

$p+q=4+111=115$

74) [정답] 586

[해설]

$$g'(x)=\frac{f'(x)}{f(x)}-\frac{1}{10}f'(x)$$
$$=\frac{f'(x)}{10f(x)}\{10-f(x)\}$$

$g'(x)=0$이 되려면 $f'(x)=0$ 또는 $f(x)=10$

$f'(x)=2ax$이므로 $x=0$일 때에만 $f'(x)=0$

(i) 방정식 $f(x)-10=0$이 실근을 갖지 않을 때,

$f'(0)=0$, $f(x)>10$

함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$
$g'(x)$	$+$	0	$-$
$g(x)$	↗	극대	↘

(ii) 방정식 $f(x)-10=0$이 중근을 가질 때,

$f'(0)=0$, $f(0)=10$, $f(x)\geq 10$

함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$
$g'(x)$	$+$	0	$-$
$g(x)$	↗	극대	↘

(i), (ii)의 경우에는 함수 $g(x)$가 $x=0$에서 극댓값을 갖는다.

그러므로 조건 (가)를 만족시키지 않는다.

(iii) 방정식 $f(x)-10=0$이 서로 다른 두 실근을 가질 때,

방정식 $f(x)-10=0$의 서로 다른 두 실근을 α, $\beta(\alpha<\beta)$라 하면 $\alpha=-\beta$

$f(-x)=f(x)$이므로 $g(-x)=g(x)$

함수 $y=g(x)$의 그래프는 y축 대칭이므로 $g(\alpha)=g(\beta)$

함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	α	$\cdots$	0	$\cdots$	β	$\cdots$
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$g(x)$	↗	극대	↘	극소	↗	극대	↘

(iii)의 경우에는 함수 $g(x)$가 $x=0$에서 극솟값을 가지므로 조건 (가)를 만족시킨다.

$f(0)=b<f(\alpha)=10$이므로 $1\leq b<10$

$$g(0)=\ln f(0)-\frac{1}{10}(f(0)-1)$$
$$=\ln b-\frac{1}{10}(b-1)$$

$p(x)=\ln x-\dfrac{1}{10}(x-1)$이라 하면

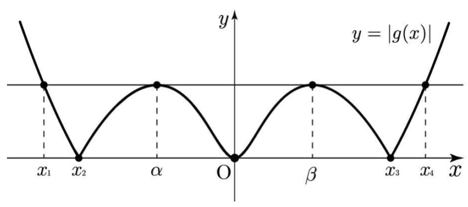
$$p'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{10}=\frac{10-x}{10x}$$

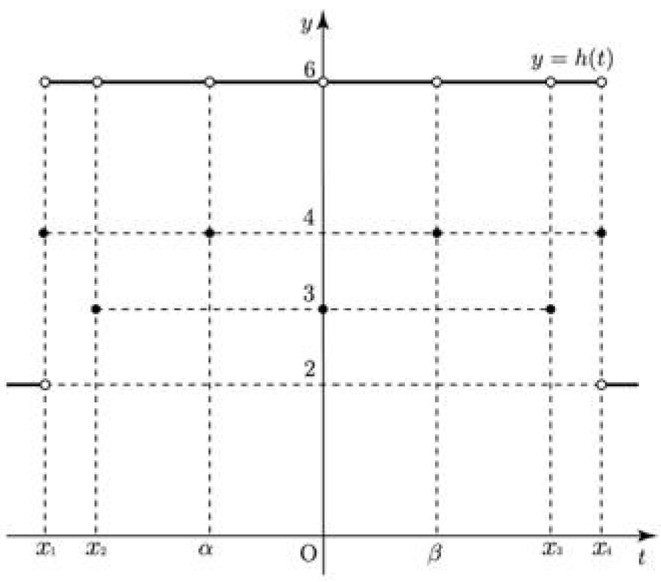
$1\leq x<10$일 때 $p'(x)>0$이므로 $p(x)$는 증가함수이다.

$g(0)\geq p(1)=0$

함수 $|g(x)|$의 그래프의 개형은 다음 2가지 경우와 같다.

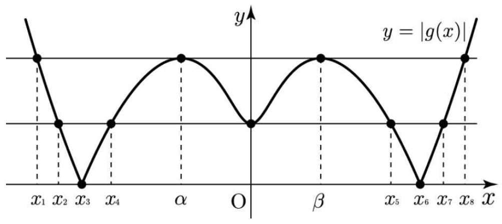
(1) $g(0)=0$일 때

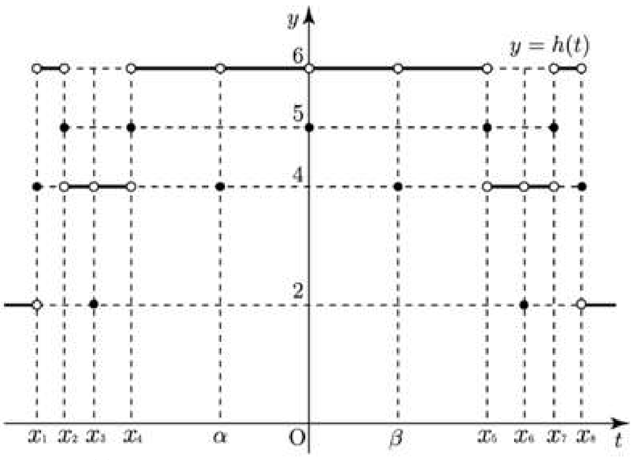




함수 $h(t)$가 $t=k$에서 불연속인 k의 값의 개수는 7이므로 조건 (나)를 만족시킨다.

(2) $g(0)>0$일 때





함수 $h(t)$가 $t=k$에서 불연속인 k의 값의 개수는 11이므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

그러므로 $g(0)=0$

$0=g(0)=p(b)\geq p(1)=0$이므로 $p(b)=p(1)$

함수 $p(x)$는 $1\leq x<10$에서

증가함수이므로 $b=1$, $f(x)=ax^2+1$

$$\int_0^a exf(x)dx$$

$$=\int_0^a (ax^2+1)e^x dx$$

$$=\Big[(ax^2+1)e^x\Big]_0^a-\int_0^a 2axe^x dx$$

$$=(a^3+1)e^a-1-\Big[2axe^x\Big]_0^a+\int_0^a 2ae^x dx$$

$$=(a^3+1)e^a-1-2a^2e^a+\Big[2ae^x\Big]_0^a$$

$$=(a^3-2a^2+2a+1)e^a-2a-1$$

$$me^a-19=(a^3-2a^2+2a+1)e^a-2a-1$$

따라서 $a=9$이므로

$$m=a^3-2a^2+2a+1=586$$

75) [정답] 135

[해설]

$f(x)=a\cos x+x\sin x+b$에서

$f'(x)=(1-a)\sin x+x\cos x$

$\cos x=0$이면 $\sin x\neq 0$이고 $a<1$이므로 $f'(x)\neq 0$

그러므로 $f'(x)=0$이면 $\cos x\neq 0$이고

$f'(x)=0$에서

$x\cos x=(a-1)\sin x$

$\tan x=\dfrac{x}{a-1}$ …… ㉠

함수 $y=\tan x$의 그래프와 직선 $y=\dfrac{x}{a-1}$는 모두 원점에 대하여 대칭이고

$a<1$에서 직선 $y=\dfrac{x}{a-1}$의 기울기가 음수이므로

$-\pi<x<\pi$에서 함수 $y=\tan x$의 그래프와

직선 $y=\dfrac{x}{a-1}$는 원점을 포함한 서로 다른

세 점에서 만난다.

조건 (가)에서 원점을 제외한 두 점의 x좌표는 α, β이고

원점을 제외한 두 점은 원점에 대하여 대칭이므로

$\alpha=-\beta$이다.

조건 (나)에서

$$\frac{1}{\beta}=-\frac{\tan\beta-\tan(-\beta)}{\beta-(-\beta)}=-\frac{\tan\beta}{\beta}$$

$\tan\beta=-1$

$0<\beta<\pi$이므로 $\beta=\dfrac{3}{4}\pi$, $\alpha=-\dfrac{3}{4}\pi$

㉠에 $x=\dfrac{3}{4}\pi$를 대입하면

$\tan\dfrac{3}{4}\pi=\dfrac{3}{4(a-1)}\pi$, $-4(a-1)=3\pi$

$a=1-\dfrac{3}{4}\pi$ …… ㉡

$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}=c$에서 $\displaystyle\lim_{x\to 0}x^2=0$이므로

$$\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}(a\cos x+x\sin x+b)=a+b=0$$

$b=-a$이고

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{a(\cos x-1)+x\sin x}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{a(\cos x-1)}{x^2}+\frac{\sin x}{x}\right\}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{a(\cos x-1)(\cos x+1)}{x^2(\cos x+1)}+\frac{\sin x}{x}\right\}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left\{-\frac{a\sin^2 x}{x^2(\cos x+1)}+\frac{\sin x}{x}\right\}$$

$$=-\frac{a}{2}+1=c$$

㉡에서 $c=-\dfrac{a}{2}+1=-\dfrac{1}{2}\times\left(1-\dfrac{3}{4}\pi\right)+1=\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{8}\pi$

따라서

$$f\left(\frac{\beta-\alpha}{3}\right)+c=f\left(\frac{\pi}{2}\right)+\frac{1}{2}+\frac{3}{8}\pi$$

$$=\frac{\pi}{2}-\left(1-\frac{3}{4}\pi\right)+\frac{1}{2}+\frac{3}{8}\pi$$

$=-\frac{1}{2}+\frac{13}{8}\pi=p+q\pi$

에서 $p=-\frac{1}{2}$, $q=\frac{13}{8}$이므로 $120\times(p+q)=135$

76) [정답] 129

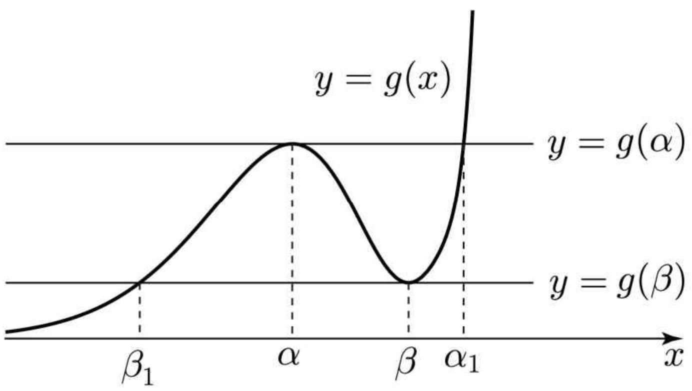
[해설]

$f(x)=ax^2+bx+c$(a, b, c는 상수)라 하면

$g'(x)=e^x\{f(x)+f'(x)\}$

$=e^x\{ax^2+(2a+b)x+b+c\}$

함수 $g(x)$가 극값을 갖지 않으면 조건 (가)를 만족시키지 않으므로 함수 $g(x)$는 극값을 갖는다.



함수 $g(x)$가 $x=\alpha$에서 극댓값, $x=\beta$에서 극솟값을 갖는다고 하면 $g'(x)=e^x\{a(x-\alpha)(x-\beta)\}$

함수 $h(k)$는 $k=t(t\neq g(\alpha),\ t\neq g(\beta))$에서

$\lim_{k\to t-}h(k)=\lim_{k\to t+}h(k)=h(t)$

그러므로 함수 $h(k)$는

$k=t(t\neq g(\alpha),\ t\neq g(\beta))$에서 연속이다.

조건 (가)에 의하여 함수 $h(k)$가 $k=t$에서 불연속인 t의 개수가 1이므로 함수 $h(k)$는 $k=g(\alpha)$에서 연속이고 $k=g(\beta)$에서 불연속 또는 $k=g(\alpha)$에서 불연속이고 $k=g(\beta)$에서 연속이다.

(i) 함수 $h(k)$가 $k=g(\alpha)$에서 연속이고 $k=g(\beta)$에서 불연속인 경우

$\lim_{k\to g(\alpha)-}h(k)=2\alpha+\alpha_1$ $\lim_{k\to g(\alpha)+}h(k)=\alpha_1 h(g(\alpha))=\alpha+\alpha_1$

이므로 $\lim_{k\to g(\alpha)-}h(k)=\lim_{k\to g(\alpha)+}h(k)=h(g(\alpha))$에서

$2\alpha+\alpha_1=\alpha_1=\alpha+\alpha_1$ 그러므로 $\alpha=0$

함수 $h(k)$는 $k=g(\beta)$에서 불연속이므로

$\lim_{k\to g(\beta)+}h(k)-\lim_{k\to g(\beta)-}h(k)=2\beta\neq0$

조건 (나)에 의하여 $\beta=1$, $g(\beta)=3e$

$g'(0)=0$, $g'(1)=0$이므로 $g'(x)=e^x\{ax(x-1)\}$

$g(x)=e^x\{a(x^2-3x+3)\}$

$g(1)=3e$이므로 $a=3$

최고차항의 계수가 3이므로 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) 함수 $h(k)$가 $k=g(\alpha)$에서 불연속이고 $k=g(\beta)$에서 연속인 경우 $\lim_{k\to g(\beta)_-}h(k)=\beta_1$

$\lim_{k\to g(\beta)_+}h(k)=2\beta+\beta_1$

$h(g(\beta))=\beta+\beta_1$이므로

$\lim_{k\to g(\beta)-}h(k)=\lim_{k\to g(\beta)+}h(k)=h(g(\beta))$에서

$\beta_1=2\beta+\beta_1=\beta+\beta_1$

그러므로 $\beta=0$

함수 $h(k)$는 $k=g(\alpha)$에서 불연속이므로

$\lim_{k\to g(\alpha)+}h(k)-\lim_{k\to g(\alpha)-}h(k)=-2\alpha\neq0$

조건 (나)에 의하여 $\alpha=-1$, $g(\alpha)=3e$

$g'(0)=0$, $g'(-1)=0$이므로 $g'(x)=e^x\{ax(x+1)\}$

$g(x)=e^x\{a(x^2-x+1)\}$

$g(-1)=3e$이므로 $a=e^2$

$g(x)=e^{x+2}(x^2-x+1)$

따라서 $g(-6)\times g(2)=43e^{-4}\times3e^4=129$

77) [정답] 31

[해설]

조건 (가)에서

$h(0)=g(f(0))=e^{\sin\pi f(0)}-1=0$

$\sin\pi f(0)=0$

이므로 $f(0)$은 정수이다.

또한, $g'(x)=e^{\sin\pi x}\times\pi\cos\pi x$, $h'(x)=g'(f(x))\times f'(x)$이므로

$h'(0)=g'(f(0))\times f'(0)=0$

에서 $g'(f(0))=0$ 또는 $f'(0)=0$

$g'(f(0))=e^{\sin\pi f(0)}\times\pi\cos\pi f(0)=0$에서 $f(0)$이 정수이므로

$\cos\pi f(0)\neq0$

따라서 $g'(f(0))\neq0$이므로 $f'(0)=0$

$f'(0)=f'(3)=0$에서

$f'(x)=ax(x-3)$ (단, a는 양수) …… ㉠

로 놓을 수 있다.

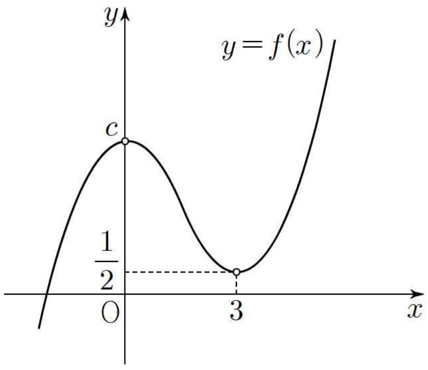
$h'(x)=g'(f(x))\times f'(x)$

$=e^{\sin\pi f(x)}\times\pi\cos\pi f(x)\times f'(x)$

에서 함수 $h(x)$가 $x=0$에서 극댓값을 가지기 위해서는 함수 $f'(x)$가 $x=0$의 좌우에서 부호가 양수에서 음수로 바뀌므로 $\cos\pi f(0)>0$을 만족해야 한다.

따라서 $f(0)$의 값은 짝수이다.

㉠에서 $f(x)=\frac{a}{3}x^3-\frac{3}{2}ax^2+c$ (단, c는 짝수)



조건 (나)에서

$e^{\sin \pi f(x)}-1=1$, $e^{\sin \pi f(x)}=2$

따라서 열린구간 $(0, 3)$에서 방정식 $\sin \pi f(x)=\ln 2$을 만족하는 서로 다른 실근의 개수가 7이어야 한다.

열린구간 $(0, 3)$에서 함수 $f(x)$는 $\frac{1}{2}<f(x)<c$를 만족하면서 감소하므로 방정식 $\sin \pi f(x)=\ln 2$의 실근의 개수가 7이 되는 c의 값은 7 또는 8이 가능하지만, c는 짝수이므로

$c=8$

$f(x)=\frac{a}{3}x^3-\frac{3}{2}ax^2+8$에서 $f(3)=\frac{1}{2}$ 이므로

$f(3)=9a-\frac{27}{2}a+8=\frac{1}{2}$, $\quad a=\frac{5}{3}$

따라서 $f(x)=\frac{5}{9}x^3-\frac{5}{2}x^2+8$이므로

$f(2)=\frac{22}{9}$

$p=9$, $q=22$이므로 $\quad p+q=31$

78) [정답] 16

[해설]

$f(x)=\frac{x^2-ax}{e^x}=(x^2-ax)e^{-x}$

이므로

$f'(x)=(2x-a)e^{-x}+(x^2-ax)e^{-x}\times(-1)$

$=e^{-x}\{-x^2+(a+2)x-a\}$

$=-e^{-x}\{x^2-(a+2)x+a\}$

이때, $f'(x)=0$에서

$x^2-(a+2)x+a=0$ …… ㉠

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=(a+2)^2-4a=a^2+4>0$

또, ㉠의 서로 다른 두 근은

$x=\frac{(a+2)\pm\sqrt{a^2+4}}{2}$ …… ㉡

이때, $a>0$이므로

$a+2=\sqrt{(a+2)^2}>\sqrt{a^2+4}$

그러므로 두 양의 실근을 갖는다.

㉡의 두 근을 α, $\beta(0<\alpha<\beta)$라 하면

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 나타내는 표는 다음과 같다.

x	$\cdots$	α	$\cdots$	β	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘		↗		↘

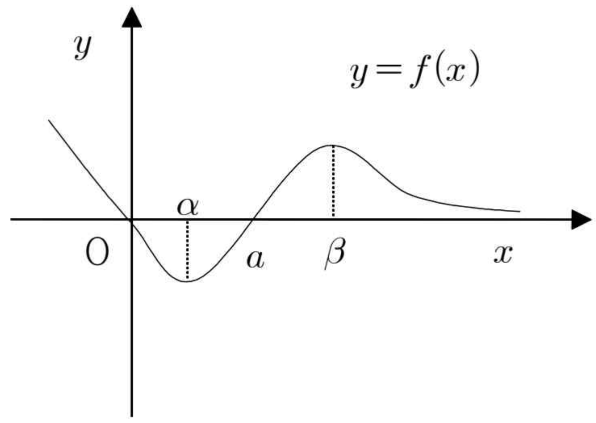
이때,

$f(0)=0$, $f(a)=0$

이고

$\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-ax}{e^x}=0$

이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



또,

$f''(x)=e^{-x}\{x^2-(a+2)x+a\}\ -e^{-x}\{2x-(a+2)\}$

$=e^{-x}\{x^2-(a+4)x+2a+2\}$

이때, $f''(x)=0$에서

$x^2-(a+4)x+2a+2=0$ …… ㉡

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=(a+4)^2-4\times1\times(2a+2)$

$=a^2+8>0$

그러므로 함수 $f(x)$가 변곡점을 갖는 x의 값의 개수는 2이다.

한편, 방정식

$f(x)=f'(t)(x-t)+f(t)$

의 서로 다른 실근의 개수는 두 함수 $y=f(x)$, $y=f'(t)(x-t)+f(t)$

의 그래프의 교점의 개수이다.

이때, 직선 $y=f'(t)(x-t)+f(t)$는 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t, f(t))$에서의 접선이다

한편, 함수 $g(t)$가 $t=a$에서 연속이면 $g(a)=\lim_{t\to a}g(t)$이므로

$g(a)+\lim_{t\to5}g(t)$의 값은 짝수이어야 한다.

그런데

$g(5)+\lim_{t\to5}g(t)=5$ …… ㉢

이므로 함수 $g(t)$는 $t=5$에서 불연속이다.

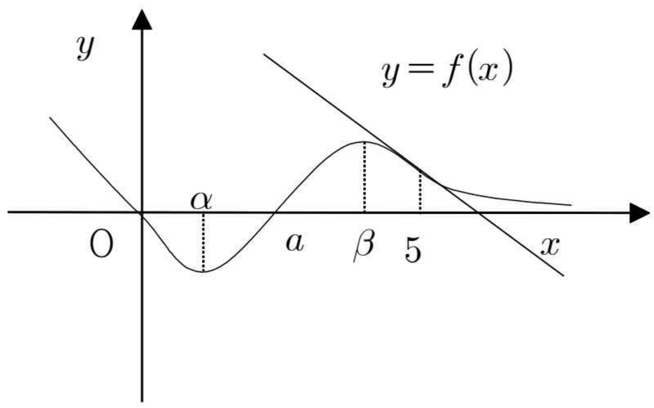
함수 $g(t)$가 불연속이 되는 t의 값은 함수 $f(x)$가 극값을

갖는 x의 값이거나 변곡점을 갖는 x의 값이다.

한편, 함수 $f(x)$가 극값을 갖는 x의 값을 m이라 하면 함수 $g(t)$는 $t=m$에서 극한값을 갖지 않는다.

또, 함수 $f(x)$가 변곡점을 갖는 x의 값을 n이라 하면 함수 $g(t)$는 $t=n$에서 극한값을 갖는다.

그러므로 ㉢을 만족시키는 t의 값은 함수 $f(x)$가 변곡점을 갖는 x의 값 중 큰 값이다.



즉, 함수 $f(x)$는 $x=5$에서 변곡점을 갖고 이때

$\lim_{t\to 5} g(t)=3,\ g(5)=2$

이므로 조건을 만족시킨다.

따라서, $x=5$가 방정식 ㉡의 근이므로

대입하면

$5^2-(a+4)\times 5+2a+2=0$

$-3a+7=0$

$a=\frac{7}{3}\cdots\cdots$㉢

한편,

$\lim_{t\to k-} g(t)\neq \lim_{t\to k+} g(t)$

를 만족시키는 k의 값은 함수 $f(x)$가 극값을 갖는 x의 값이다.

㉠에 ㉢을 대입하면

$x^2-\left(\frac{7}{3}+2\right)x+\frac{7}{3}=0$

$x^2-\frac{13}{3}x+\frac{7}{3}=0$

따라서, 구하는 모든 실수 k의 값의 합은 근과 계수의 관계를 이용하면 $\frac{13}{3}$이므로

$p+q=3+13=16$

79) [정답] 4

[해설]

조건 (가)의 $\lim_{x\to 0-} g(x)=2$에서

$\lim_{x\to 0-}\frac{f(x+1)}{x}=2$ $\cdots\cdots$ ㉠

$\lim_{x\to 0-} f(x+1)=0$에서 $f(1)=0$

$f(x)=-2(x-1)(x-\alpha)$라 하면 ㉠에서

$\lim_{x\to 0-}\frac{-2x(x+1-\alpha)}{x}=-2(1-\alpha)=2,\ \alpha=2$

$\therefore f(x)=-2(x-1)(x-2),\ f'(x)=-4x+6$

$x>0$일 때, $g'(x)=f'(x)e^{x-a}+f(x)e^{x-a}$이므로

$g'(a)=f'(a)+f(a)$

조건 (가)에서 $g'(a)=-2$이므로

$f'(a)+f(a)=-2a^2+2a+2=-2$

$a^2-a-2=0,\ (a+1)(a-2)=0$

$a>0$이므로 $a=2$

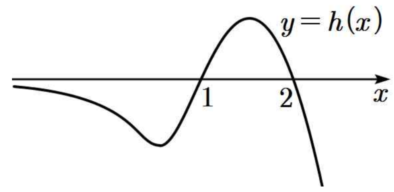
$\therefore g(x)=\begin{cases}-2x+2 & (x<0)\\ -2(x-1)(x-2)e^{x-2}+b & (x\geq 0)\end{cases}$

$h(x)=-2(x-1)(x-2)e^{x-2}$이라 하면

$h'(x)=-2(2x-3)e^{x-2}-2(x-1)(x-2)e^{x-2}$

$=-2(x^2-x-1)e^{x-2}$

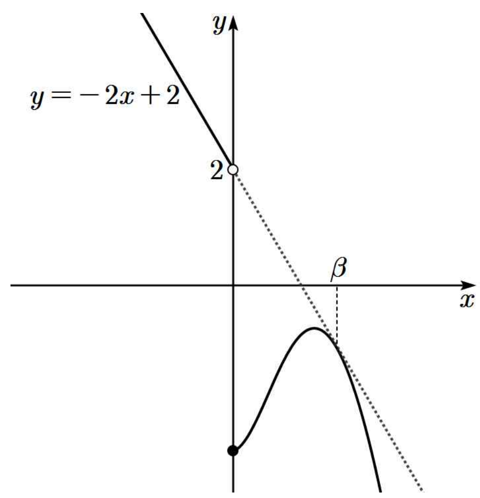
함수 $h(x)$는 2개의 극값을 가지므로 그래프의 개형은 다음과 같다.



따라서 $x\geq 0$에서 함수 $g(x)$의 그래프는 함수 $h(x)$의 그래프를 y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 그래프이다.

조건 (나)에서 $\frac{g(t)-g(s)}{t-s}$는 두 점 $(s,\ g(s))$, $(t,\ g(t))$을 지나는 직선의 기울기를 의미한다.

$x<0$일 때 함수 $g(x)=-2x-2$이므로 조건 (나)의 부등식을 만족하기 위해서는 다음 그림과 같이 $x\geq 0$에서 함수 $g(x)$가 $y=-2x-2$와 접하거나 아래쪽에 존재해야 한다.



따라서 b가 최대일 때는 $x\geq 0$에서 함수 $g(x)$가 $y=-2x-2$와 접할 때이다. 이때, 접점의 x좌표를 $\beta\ (\beta>0)$라 하면

$g(\beta)=-2\beta+2,\ g'(\beta)=-2$

$x>0$에서 $g'(x)=-2(x^2-x-1)e^{x-2}$이므로 $g'(\beta)=-2$에서

$-2(\beta^2-\beta-1)e^{\beta-2}=-2,\ (\beta^2-\beta-1)e^{\beta-2}=1$

$\therefore \beta=2$ ($\because (\beta^2-\beta-1)e^{\beta-2}=1$에서 $\beta^2-\beta-1=e^{2-\beta}$이고, 두 함수 $y=x^2-x-1$과 $y=e^{2-x}$의 그래프는 $x>0$에서 한 점에서만 만나므로 $\beta=2$가 유일한 해임을 알 수 있다.)

$g(\beta)=-2\beta+2$에서 $g(2)=-2$이므로

$g(2)=b=-2$

따라서 $x\ge 0$에서 함수 $g(x)$가 $y=-2x-2$와 접할 때의 b의 값은 -2이다.

이상에서 $a=2$, b의 최댓값은 -2이므로 $a-b$의 최댓값은 4이다.

80) [정답] 283

[해설]

(나) 조건에서 $x=0$을 대입하면 $g(3)\times 0=f'(0)$에서

$f'(0)=0$이다.

그런데 $g(x+3)$는 $x=0$에서 부호가 바뀌지 않으므로

$f'(x)$도 $x=0$에서 부호가 바뀌지 않음을 알 수 있다.

$g(x+3)$이 $x>-3$에서 부호가 한 번도 바뀌지 않기 때문에

$f'(x)=4x^2(x-\alpha)\ (\alpha\le -3)$이다.

그런데 $f'(x)=4x^2(x-\alpha)\ (\alpha<-3)$이면 $f(x)$는 $x=\alpha$에서 극솟값을 갖고, 그렇다면 $x\le -3$인 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\ge f(-3)$이라는 (가) 조건에 모순이다.

따라서 $f'(x)=4x^2(x+3)=4x^3+12x^2$이고

$f(x)=x^4+4x^3+C$ (단, C는 적분상수)이다.

이제 $g(x+3)=\dfrac{f'(x)}{\{f(x)-f(0)\}^2}$라 할 수 있고,

$$\int_4^5 g(x)dx=\int_1^2 g(x+3)dx$$
$$=\int_1^2 \frac{f'(x)}{\{f(x)-f(0)\}^2}dx$$

$f(x)-f(0)=t$라 하면

$f'(x)dx=dt$이고 $f(1)-f(0)=5,\ f(2)-f(0)=48$이므로

$$\int_5^{48}\frac{1}{t^2}dt=\left[-\frac{1}{t}\right]_5^{48}=-\frac{1}{48}+\frac{1}{5}=\frac{43}{240}$$

이므로 $p+q=240+43=283$

81) [정답] 12

[해설]

함수 $g(x)$의 한 부정적분을 $G(x)$라 하자.

조건 (가)에서

$$\int_{2a}^{3a+x} g(t)dt=\int_{3a-x}^{2a+2} g(t)dt$$

$G(3a+x)-G(2a)=G(2a+2)-G(3a-x)$

위 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$g(3a+x)=g(3a-x)$ …… ㉠

모든 실수 x에 대하여 ㉠이 성립하므로

함수 $y=g(x)$의 그래프는 직선 $x=3a$에 대하여 대칭이다.

$$\int_{2a}^{3a+x} g(t)dt=\int_{3a-x}^{2a+2} g(t)dt=\int_{3a-x}^{4a} g(t)dt+\int_{4a}^{2a+2} g(t)dt$$

$\displaystyle\int_{2a}^{3a+x} g(t)dt=\int_{3a-x}^{4a} g(t)dt$에서 $\displaystyle\int_{4a}^{2a+2} g(t)dt=0$

조건 (가)에서 $g(x)>0$이므로 $2a+2=4a,\ a=1$

$f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 이차함수이므로

$h(x)=f(x)+f'(x)+1=x^2+px+q$($p,\ q$는 상수)

라 하자.

함수 $y=g(x)$의 그래프는 직선 $x=3$에 대하여 대칭이므로

$g(4)=g(2)$, 즉 $h(4)=h(2)$

$16+4p+q=4+2p+q$에서 $p=-6$

조건 (나)에서 $h(4)=5$이므로

$16-24+q=5$에서 $q=13$

$h(x)=x^2-6x+13$에서

$h'(x)=f'(x)+f''(x)=f'(x)+2$

$$\int_3^5\{f'(x)+2a\}g(x)dx$$
$$=\int_3^5\{f'(x)+2\}g(x)dx=\int_3^5 h'(x)\ln h(x)dx$$
$$=[h(x)\ln h(x)]_3^5-\int_3^5\left\{h(x)\times\frac{h'(x)}{h(x)}\right\}dx$$
$$=h(5)\ln h(5)-h(3)\ln h(3)-\{h(5)-h(3)\}$$
$$=8\ln 8-4\ln 4-(8-4)=-4+16\ln 2$$

따라서 $m=-4,\ n=16$이므로 $m+n=12$