# 수학 영역



5지선다형

*1.* $\log_6 4 + \dfrac{2}{\log_3 6}$ 의 값은? [2점]

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

$\log_6 4 + \log_6 9 = \log_6 36$

$= 2$

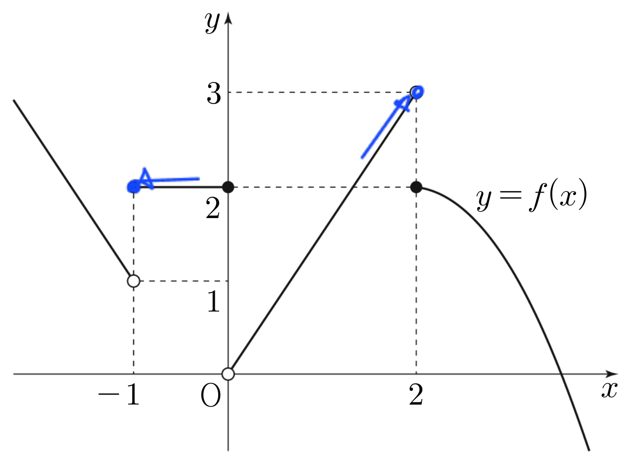
*2.* 모든 항이 양수인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_1 = 3$, $\dfrac{a_5}{a_3} = 4$일 때, $a_4$의 값은? [2점]

① 15　② 18　③ 21　④ 24　⑤ 27

$\dfrac{a_5}{a_3} = r^2 = 4 \Rightarrow r = 2 \ (\because r > 0)$

$\therefore a_4 = ar^3 = 3 \cdot 8 = 24$

*3.* 함수 $y = f(x)$의 그래프가 그림과 같다.




$\displaystyle\lim_{x \to -1+} f(x) + \lim_{x \to 2-} f(x)$의 값은? [3점]

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

$2 + 3 = 5$

*4.* 함수 $f(x) = 2x^3 - 6x + a$의 극솟값이 2일 때, 상수 $a$의 값은? [3점]

① 6　② 7　③ 8　④ 9　⑤ 10

$f'(x) = 6x^2 - 6 = 6(x-1)(x+1)$

$x = 1$ 에서 극소

$f(1) = 2 - 6 + a = 2$　$\therefore a = 6$

5. 0이 아닌 모든 실수 $h$에 대하여 다항함수 $f(x)$에서 $x$의 값이 1에서 $1+h$까지 변할 때의 평균변화율이 $h^2+2h+3$일 때, $f'(1)$의 값은? [3점]

① 1 ② $\frac{3}{2}$ ③ 2 ④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 3

$$\frac{f(1+h)-f(1)}{(1+h)-1} = h^2+2h+3$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = f'(1) = \lim_{h\to 0}(h^2+2h+3) = 3$$

6. 함수 $y=\log_{\frac{1}{2}}(x-a)+b$가 닫힌구간 $[2, 5]$에서 최댓값 3, 최솟값 1을 갖는다. $a+b$의 값은? (단, $a$, $b$는 상수이다.) [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

☆ 감소함수

$x=2$ 최대 $3=-\log_2(2-a)+b$

$x=5$ 최소 $-\underline{\big|\ 1=-\log_2(5-a)+b}$

$2=\log_2\frac{5-a}{2-a} \Rightarrow 4=\frac{5-a}{2-a}$

$\therefore a=1, b=3$

7. 다항함수 $f(x)$에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(0, f(0))$에서의 접선의 방정식이 $y=3x-1$이다. 함수 $g(x)=(x+2)f(x)$에 대하여 $g'(0)$의 값은? [3점]

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

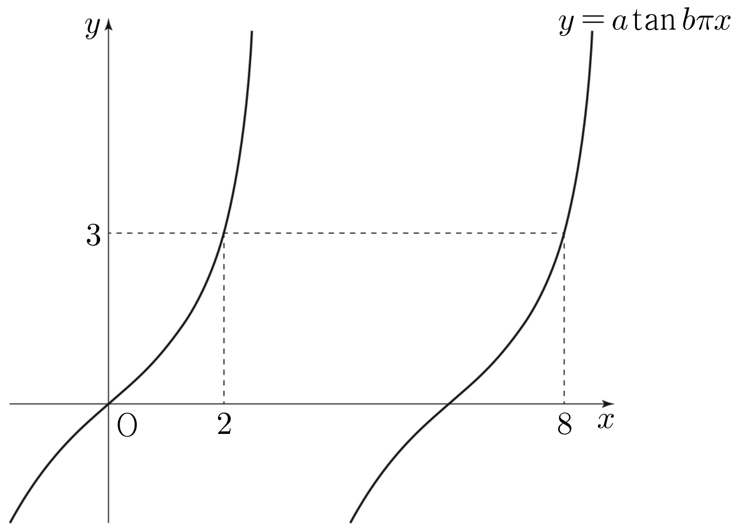
$y=3x-1 \Rightarrow f(0)=-1,\ f'(0)=3$

$g'(x)=f(x)+(x+2)f'(x)$

$g'(0)=f(0)+(2)f'(0)=-1+2\cdot 3$

$=5$

8. 그림과 같이 함수 $y=a\tan b\pi x$의 그래프가 두 점 $(2,3)$, $(8,3)$을 지날 때, $a^2\times b$의 값은? (단, $a$, $b$는 양수이다.) [3점]




① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

주기 : $\frac{\pi}{b\pi}=\frac{1}{b}=6$ $\therefore b=\frac{1}{6}$

점 $(2,3)$ 대입 $\sqrt{3}a=3$ $\therefore a=\sqrt{3}$

$\Rightarrow a^2\times b=\frac{1}{2}$

9. 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x)=3x^2-4x+1$이고 $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt=1$일 때, $f(2)$의 값은? [4점]

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

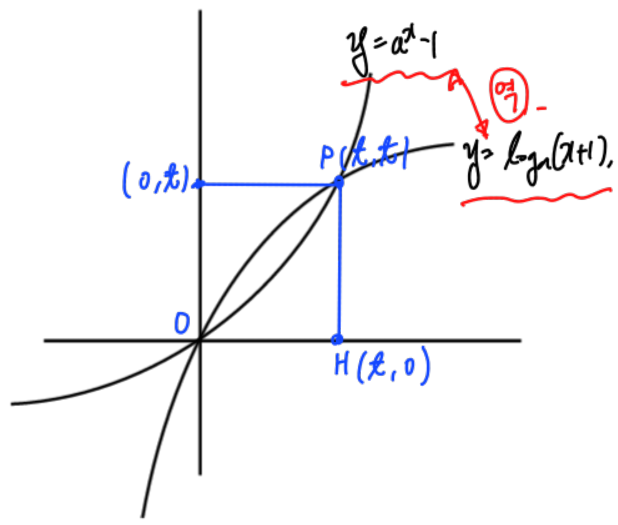
$\lim_{x\to 0}\frac{F(x)-F(0)}{x}=f(0)=1$

$f(x)=x^3-2x^2+x+1$

$f(2)=8-8+2+1=3$

10. 상수 $a(a>1)$에 대하여 곡선 $y=a^x-1$과 곡선 $y=\log_a(x+1)$이 원점 O를 포함한 서로 다른 두 점에서 만난다. 이 두 점 중 O가 아닌 점을 P라 하고, 점 P에서 $x$축에 내린 수선의 발을 H라 하자. 삼각형 OHP의 넓이가 2일 때, $a$의 값은? [4점]

① $\sqrt{2}$ ② $\sqrt{3}$ ③ 2 ④ $\sqrt{5}$ ⑤ $\sqrt{6}$



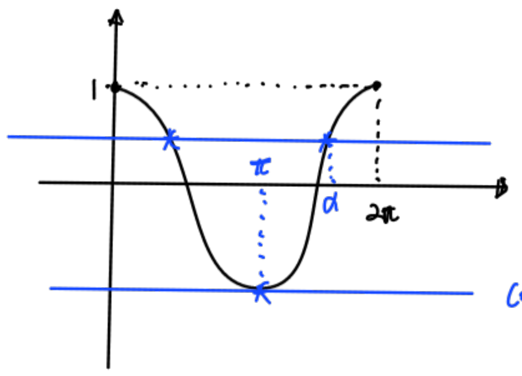

$\triangle$OHP의 넓이 $=\frac{1}{2}t^2=2$ $\therefore t=2$

점 $(2,2)$ 대입 $a^2-1=2$ $\therefore a=\sqrt{3}$

*11.* $0 \le x \le 2\pi$일 때, 방정식 $2\sin^2 x - 3\cos x = k$의 서로 다른 실근의 개수가 3이다. 이 세 실근 중 가장 큰 실근을 $\alpha$라 할 때, $k \times \alpha$의 값은? (단, $k$는 상수이다.) [4점]

① $\frac{7}{2}\pi$ ② $4\pi$ ③ $\frac{9}{2}\pi$ ④ $5\pi$ ⑤ $\frac{11}{2}\pi$

$2(1-\cos^2 x) - 3\cos x = k \iff 2\cos^2 x + 3\cos x + k - 2 = 0$




세 실근... 예시

$\cos x = -1$ 이어야 근 3개...

$x = \pi$ 대입 $\Rightarrow 2 - 3 + k - 2 = 0$

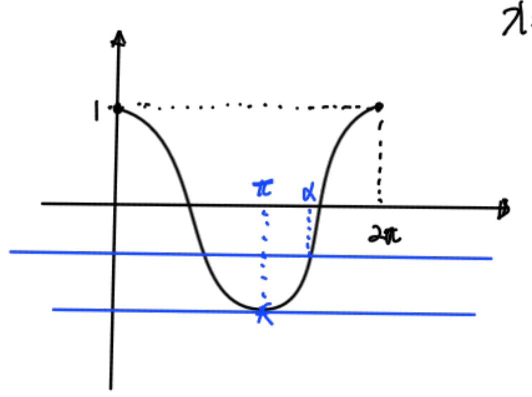
$\therefore k = 3$

$2\cos^2 x + 3\cos x + 1 = 0$

$(2\cos x + 1)(\cos x + 1) = 0 \Rightarrow \cos x = -\frac{1}{2}$ or $-1$

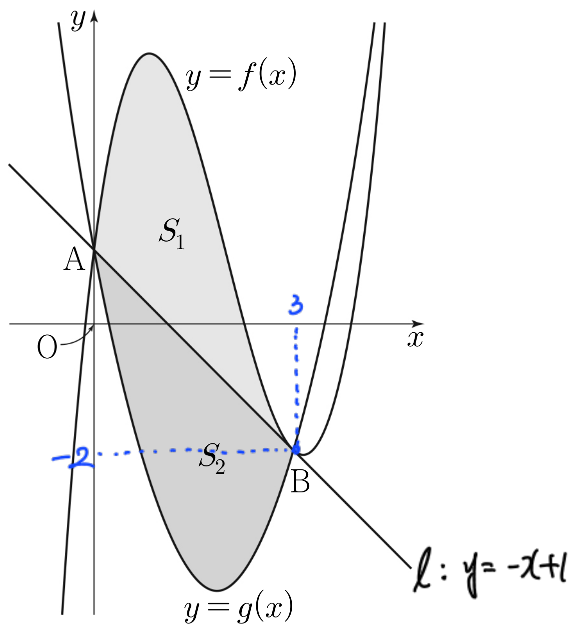
$x = \frac{2}{3}\pi, \pi, \frac{4}{3}\pi$

$= \alpha$




$\therefore k \times \alpha = 4\pi$

*12.* 그림과 같이 삼차함수 $f(x) = x^3 - 6x^2 + 8x + 1$의 그래프와 최고차항의 계수가 양수인 이차함수 $y = g(x)$의 그래프가 점 $\mathrm{A}(0, 1)$, 점 $\mathrm{B}(k, f(k))$에서 만나고, 곡선 $y = f(x)$ 위의 점 B에서의 접선이 점 A를 지난다.
곡선 $y = f(x)$와 직선 AB로 둘러싸인 부분의 넓이를 $S_1$,
곡선 $y = g(x)$와 직선 AB로 둘러싸인 부분의 넓이를 $S_2$라 하자.
$S_1 = S_2$일 때, $\int_0^k g(x)dx$의 값은? (단, $k$는 양수이다.) [4점]




① $-\frac{17}{2}$ ② $-\frac{33}{4}$ ③ $-8$ ④ $-\frac{31}{4}$ ⑤ $-\frac{15}{2}$

$l : y = (3k^2 - 12k + 8)(x - k) + k^3 - 6k^2 + 8k + 1$

점 $(0, 1)$ 대입 $1 = -3k^3 + 12k^2 - 8k + k^3 - 6k^2 + 8k + 1$

$\iff 2k^3 - 6k^2 = 0$

$\iff 2k^2(k-3) = 0$ $\therefore k = 3$

삼차함수 넓이공식 이차함수 넓이공식

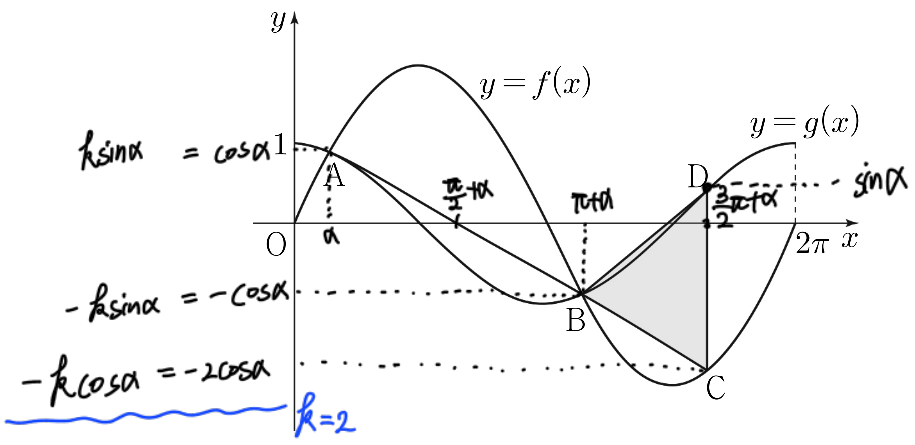
$S_1 = \frac{1}{12}(3)^4 = \frac{27}{4} = S_2 = \frac{|a|}{6}(3)^3 = \frac{9}{2}a$ $\therefore a = \frac{3}{2}$

$g(x) - (-x+1) = \frac{3}{2}(x)(x-3) \iff g(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{11}{2}x + 1$

$\int_0^3 \left(\frac{3}{2}x^2 - \frac{11}{2}x + 1\right) dx = \left[\frac{1}{2}x^3 - \frac{11}{4}x^2 + x\right]_0^3$

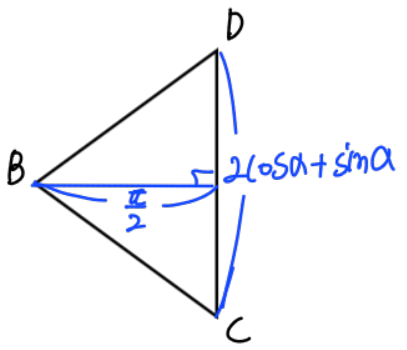
$= \frac{27}{2} - \frac{99}{4} + 3 = -\frac{33}{4}$

*13.* 그림과 같이 닫힌구간 $[0, 2\pi]$에서 정의된 두 함수 $f(x)=k\sin x$, $g(x)=\cos x$에 대하여 곡선 $y=f(x)$와 곡선 $y=g(x)$가 만나는 서로 다른 두 점을 A, B라 하자. 선분 AB를 $3:1$로 외분하는 점을 C라 할 때, 점 C는 곡선 $y=f(x)$ 위에 있다. 점 C를 지나고 $y$축에 평행한 직선이 곡선 $y=g(x)$와 만나는 점을 D라 할 때, 삼각형 BCD의 넓이는? (단, $k$는 양수이고, 점 B의 $x$좌표는 점 A의 $x$좌표보다 크다.) [4점]




① $\frac{\sqrt{15}}{8}\pi$ ② $\frac{9\sqrt{5}}{40}\pi$ ③ $\frac{\sqrt{5}}{4}\pi$
④ $\frac{3\sqrt{10}}{16}\pi$ ⑤ $\frac{3\sqrt{5}}{10}\pi$

$k=2$ 대입 $\tan\alpha = \frac{1}{2}$, $\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$




△BCD의 넓이

$= \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{4}\pi$

*14.* 양의 실수 $t$에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=x^3-3t^2x$$

라 할 때, 닫힌구간 $[-2, 1]$에서 두 함수 $f(x)$, $|f(x)|$의 최댓값을 각각 $M_1(t)$, $M_2(t)$라 하자. 함수

$$g(t)=M_1(t)+M_2(t)$$

에 대하여 <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

〈보 기〉

ㄱ. $g(2)=32$

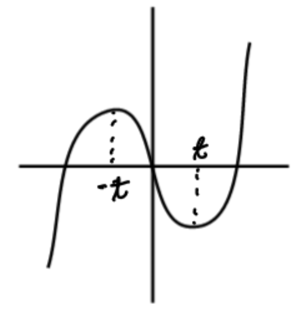
ㄴ. $g(t)=2f(-t)$를 만족시키는 $t$의 최댓값과 최솟값의 합은 3이다.

ㄷ. $\lim_{h\to 0+}\frac{g\left(\frac{1}{2}+h\right)-g\left(\frac{1}{2}\right)}{h}-\lim_{h\to 0-}\frac{g\left(\frac{1}{2}+h\right)-g\left(\frac{1}{2}\right)}{h}=5$

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

$f'(x) = 3x^2-3t^2 = 3(x-t)(x+t)$

i) $0<t<\frac{1}{2}$ $M_1(t)=f(1)$, $M_2(t) = -f(-2)$

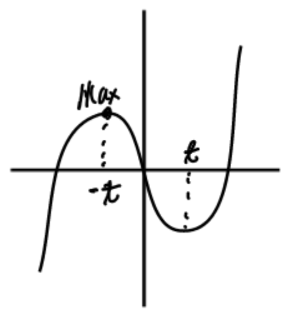



$\Rightarrow g(t) = 9-9t^2$

ii) $\frac{1}{2}\le t<1$ $M_1(t)=f(-t)$, $M_2(t)=-f(-2)$

$\Rightarrow g(t) = 2t^3-6t^2+8$

iii) $1\le t\le 2$




$M_1(t)=f(-t)$, $M_2(t)=f(-t)$ $\Rightarrow g(t)=2f(-t)$

ㄱ $g(2)=2f(-2) = 2\cdot16 = 32$

ㄴ Case iii) 최소 1, 최대 2 ⇒ 합:3

~~ㄷ~~ $\left(6t^2-12t\Big|_{\frac{1}{2}}\right)-\left(-18t\Big|_{\frac{1}{2}}\right) = \frac{9}{2}$

15. 다음 조건을 만족시키는 모든 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_1$의 최댓값을 $M$, 최솟값을 $m$이라 할 때, $\log_2 \frac{M}{m}$의 값은? [4점]

(가) 모든 자연수 $n$에 대하여

$$a_{n+1} = \begin{cases} 2^{n-2} & (a_n < 1) \\ \log_2 a_n & (a_n \geq 1) \end{cases}$$

이다.

(나) $a_5 + a_6 = 1$

① 12 ② 13 ③ 14 ④ 15 ⑤ 16

$a_5$ $a_6$

$a$ — $\log_2 a$ ⋯ $a=1.$

$a$ — $8$ ⋯ $a=-7$

i) $a_5=1$

$a_5$ $a_4$ $a_3$ $a_2$ $a_1$

$1 - 2$ — $0 - 1 - 2 \rightarrow m$

$1 - 2$ — $4 - 16 - 2^{16} \rightarrow M$

$\therefore \log_2 \frac{M}{m} = \log_2 2^{15}$

$= 15$

ii) $a_5=-7$

$a_5$ $a_4$

X. $-7$ — $2^{-7} < 1$

$-7$ 불가.

## 단답형

16. $\displaystyle\lim_{x\to2}\frac{x^2+x-6}{x-2}$의 값을 구하시오. [3점] 5

$\displaystyle\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(x+3)}{x-2} = 5$

17. 함수 $y=4^x$의 그래프를 $x$축의 방향으로 1만큼, $y$축의 방향으로 $a$만큼 평행이동한 그래프가 점 $\left(\frac{3}{2}, 5\right)$를 지날 때, 상수 $a$의 값을 구하시오. [3점] 3

$y=4^x \xrightarrow{x \to 1,\ y \to a} y=4^{x-1}+a$

점 $\left(\frac{3}{2}, 5\right)$ 대입 $5=2+a$

$\therefore a=3$

**18.** 다항함수 $f(x)$가

$$\lim_{x\to\infty}\frac{xf(x)-2x^3+1}{x^2}=5,\ f(0)=1$$

을 만족시킬 때, $f(1)$의 값을 구하시오. [3점]

8

분자 2차 $f(x) = 2x^2+5x+C$

$f(0) = C = 1$

$f(1) = 2+5+1 = 8$

**19.** 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t\,(t>0)$에서의 위치 $x(t)$가

$$x(t)=\frac{3}{2}t^4-8t^3+15t^2-12t$$

이다. 점 P의 운동 방향이 바뀌는 순간 점 P의 가속도를 구하시오. [3점]

6

$v(t) = 6t^3-24t^2+30t-12$

$= 6(t^3-4t^2+5t-2)$

$= 6(t-1)^2(t-2)$

$t=2$ 에서 운동방향 바뀜.

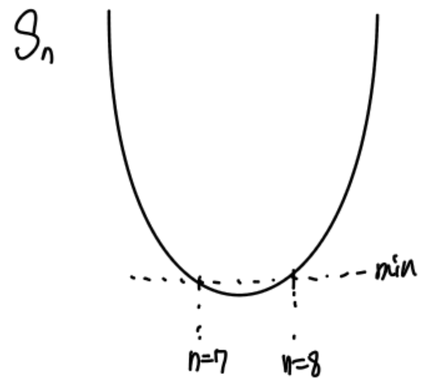
$a(t) = 18t^2-48t+30$

$a(2) = 72-96+30 = 6$

**20.** 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제$n$항까지의 합을 $S_n$이라 하자. $S_n$이 다음 조건을 만족시킬 때, $a_{13}$의 값을 구하시오. [4점]

30

(가) $S_n$은 $n=7$, $n=8$에서 최솟값을 갖는다.
(나) $|S_m|=|S_{2m}|=162$인 자연수 $m\,(m>8)$이 존재한다.




$S_8 - S_7 = 0$

$\Rightarrow a_8 = 0$

$a+7d=0$ $\therefore a=-7d$

$S_m = -162,\ S_{2m} = 162$

$$\left.\begin{aligned}\frac{m(-14d+(m-1)d)}{2} &= -162\\ \frac{2m(-14d+(2m-1)d)}{2} &= 162\end{aligned}\right\} \Rightarrow 14-(m-1) = -28+4m-2$$

$45 = 5m \Leftrightarrow m=9$ 대입

$\frac{9(-6d)}{2} = -162$ $\therefore d=6$

$a_{13} = -7d+12d = 5d = 30$

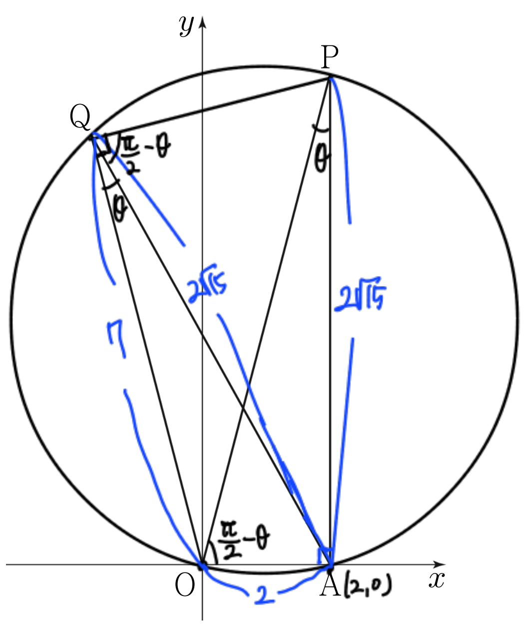
*21.* 좌표평면 위의 두 점 O(0, 0), A(2, 0)과 $y$좌표가 양수인 서로 다른 두 점 P, Q가 다음 조건을 만족시킨다.

22

(가) $\overline{\mathrm{AP}}=\overline{\mathrm{AQ}}=2\sqrt{15}$ 이고 $\overline{\mathrm{OP}}>\overline{\mathrm{OQ}}$이다.

(나) $\cos(\angle\mathrm{OPA})=\cos(\angle\mathrm{OQA})=\dfrac{\sqrt{15}}{4}$

사각형 OAPQ의 넓이가 $\dfrac{q}{p}\sqrt{15}$ 일 때, $p\times q$의 값을 구하시오. (단, $p$와 $q$는 서로소인 자연수이다.) [4점]




$\overline{OP}$ 지름.

$\overline{OP}=\sqrt{4+60}=8$

$\overline{OQ}=k$라 하면,

Cosine Law

$\dfrac{\sqrt{15}}{4}=\dfrac{k^2+60-4}{2\cdot k\cdot 2\sqrt{15}} \Rightarrow k=7$

$\overline{PQ}=\sqrt{64-49}=\sqrt{15}$

$\left.\begin{array}{l}\triangle\ OAP\ 넓이=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2\sqrt{15}=2\sqrt{15}\\ \triangle\ OPQ\ 넓이=\frac{1}{2}\cdot 7\cdot\sqrt{15}=\frac{7}{2}\sqrt{15}\end{array}\right\}\Rightarrow \frac{11}{2}\sqrt{15}$

$\therefore p\times q=22$

*22.* 두 상수 $a$, $b(b\neq 1)$과 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

32

(가) 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하고, 도함수 $g'(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

(나) $|x|<2$일 때, $g(x)=\displaystyle\int_0^x(-t+a)dt$이고 $\Rightarrow g(0)=0$

$|x|\geq 2$일 때, $|g'(x)|=f(x)$이다.

(다) 함수 $g(x)$는 $x=1$, $x=b$에서 극값을 갖는다.

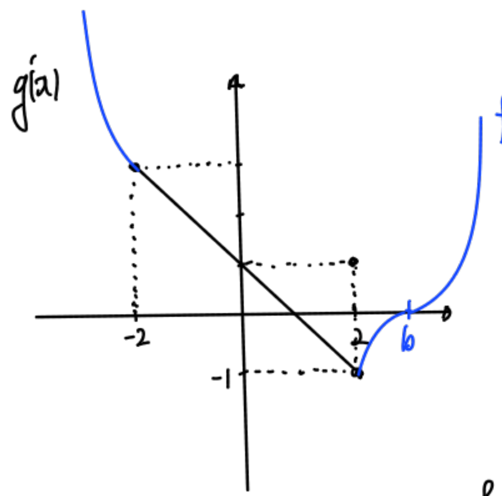
$g(k)=0$을 만족시키는 모든 실수 $k$의 값의 합이 $p+q\sqrt{3}$ 일 때, $p\times q$의 값을 구하시오. (단, $p$와 $q$는 유리수이다.) [4점]

$g'(x)=-x+a \quad (|x|<2)$ $\qquad g(x)=-\frac{1}{2}x^2+x \quad (|x|<2)$

$g'(1)=-1+a=0 \quad \therefore a=1$ $\qquad g(2)=0$

$g'(2)=-1,\ g'(-2)=3$

$f(2)=1,\ f(-2)=3$




$f(x) \Rightarrow f(x)=p(x-b)^2$

$f(2)=p(2-b)^2=1$

$f(-2)=p(-2-b)^2=3$

$b=4+2\sqrt{3},\ p=\dfrac{1}{(2+2\sqrt{3})^2}$

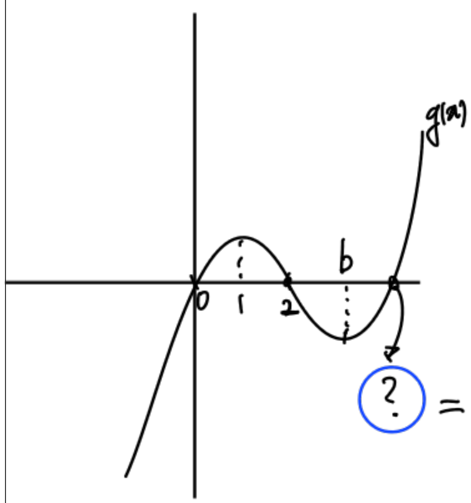
$\int f(x)dx=F(x)$라 하면, $-F(2)=0$

대입

$F(x)=\dfrac{(x-4-2\sqrt{3})^3}{3(2+2\sqrt{3})^2}+C$

$\therefore C=\dfrac{2+2\sqrt{3}}{3}$

$\boxed{F(x)=0 인\ x=2,\ 6+4\sqrt{3}}$




$? = 6+4\sqrt{3}$

$\therefore 0+2+6+4\sqrt{3}=8+4\sqrt{3}$

$\therefore p\times q=32$

※ 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

○ 이어서, 「선택과목(확률과 통계)」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

# 수학 영역(확률과 통계)



5지선다형

*23.* ${}_{3}\Pi_{2}+{}_{2}\mathrm{H}_{3}$의 값은? [2점]

① 13 ② 14 ③ 15 ④ 16 ⑤ 17

$3^2 + {}_4C_3 = 9+4$

$= 13$

*24.* 전체집합 $U=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$의 두 부분집합 $A$, $B$에 대하여

$$n(A\cup B)=5,\ A\cap B=\varnothing$$

을 만족시키는 집합 $A$, $B$의 모든 순서쌍 $(A, B)$의 개수는? [3점]

① 168 ② 174 ③ 180 ④ 186 ⑤ 192

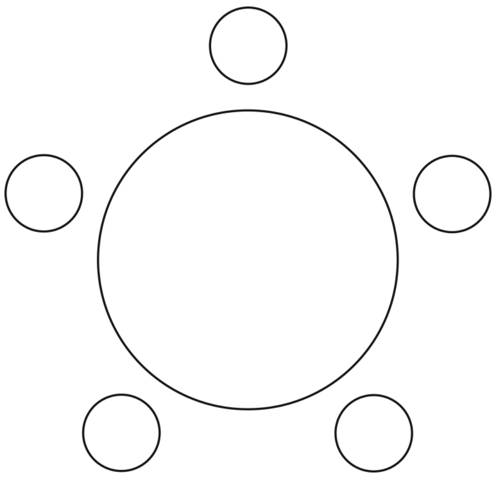
U에서 원소 5개 고르기 ${}_6C_5$

원소마다 A,B에 갈수 있음 ${}_2\Pi_5$

$6\cdot 32 = 192$

**25.** 세 학생 A, B, C를 포함한 7명의 학생이 있다. 이 7명의 학생 중에서 A, B, C를 포함하여 5명을 선택하고, 이 5명의 학생 모두를 일정한 간격으로 원 모양의 탁자에 둘러앉게 하는 경우의 수는? (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.) [3점]

① 120 ② 132 ③ 144 ④ 156 ⑤ 168



A, B, C, 4명중 2명 더 뽑기

$_4C_2 = 6$

5명 앉히기

$(5-1)! = 24$

$\therefore 6 \cdot 24 = 144$

**26.** 방정식 $3x+y+z+w=11$을 만족시키는 자연수 $x$, $y$, $z$, $w$의 모든 순서쌍 $(x, y, z, w)$의 개수는? [3점]

① 24 ② 27 ③ 30 ④ 33 ⑤ 36

$$\left.\begin{array}{l} x = x'+1 \\ y = y'+1 \\ z = z'+1 \\ w = w'+1 \end{array}\right\} \Rightarrow 3x'+y'+z'+w' = 5$$

i) $x'=0$ 일 때

$_3H_5 = {}_7C_5 = 21$

ii) $x'=1$ 일 때

$_3H_2 = {}_4C_2 = 6$

$\therefore 21+6=27$

*27.* 양수 $a$에 대하여 $\left(ax-\frac{2}{ax}\right)^7$의 전개식에서 각 항의 계수의 총합이 1일 때, $\frac{1}{x}$의 계수는? [3점]

① 70 ② 140 ③ 210 ④ 280 ⑤ 350

$x=1$ 대입 $\left(a-\frac{2}{a}\right)^7=1 \Rightarrow a-\frac{2}{a}=1$

$\therefore a=2$

$\left(2x-\frac{1}{x}\right)^7 \Rightarrow \frac{1}{x}$의 계수

${}_7C_3(2)^3(-1)^4=280$

*28.* 숫자 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 4가 하나씩 적혀 있는 8장의 카드가 있다. 이 8장의 카드 중에서 7장을 택하여 이 7장의 카드 모두를 일렬로 나열할 때, 서로 이웃한 2장의 카드에 적혀 있는 수의 곱 모두가 짝수가 되도록 나열하는 경우의 수는? (단, 같은 숫자가 적힌 카드끼리는 서로 구별하지 않는다.) [4점]

① 264 ② 268 ③ 272 ④ 276 ⑤ 280

1 1 2 2 2 3 3 4

i) 짝수 4개 선택 (2,2,2,4)

(2,2,2,4) 나열 $\frac{4!}{3!}=4$

나머지 (1,1,3) ${}_5C_3\cdot\frac{3!}{2!}=30$

(1,3,3) 〃 $=30$

$\Rightarrow 4\cdot 60=240$

ii) 짝수 3개 선택 (2,2,2) (2,2,4)

짝수 나열 $1+\frac{3!}{2!}=4$

나머지 (1,1,3,3) $\frac{4!}{2!2!}=6$

$\Rightarrow 4\cdot 6=24$

$\therefore 240+24=264$

**단답형**

*29.* 두 집합

$$X=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\},\ \ Y=\{1, 2, 3, 4, 5\}$$

에 대하여 다음 조건을 만족시키는 $X$에서 $Y$로의 함수 $f$의 개수를 구하시오. [4점]

523

(가) $f(4)=f(1)+f(2)+f(3)$
(나) $2f(4)=f(5)+f(6)+f(7)+f(8)$

| | $f(4)$ | $f(1), f(2), f(3)$ | $f(5), f(6), f(7), f(8)$ |
|---|---|---|---|
| | 1 | X | X |
| | 2 | X | X |
| i) | 3 | (1,1,1) | (1,1,1,3) (1,1,2,2) |
| | | 1 | $\left(\frac{4!}{3!}+\frac{4!}{2!2!}\right)$ |
| ii) | 4 | (1,1,2) | (1,1,1,5) (1,1,2,4) (1,1,3,3) (1,2,2,3) (2,2,2,2) |
| | | $\frac{3!}{2!}$ | $\left(\frac{4!}{3!}+\frac{4!}{2!}+\frac{4!}{2!2!}+\frac{4!}{2!}+\frac{4!}{4!}\right)$ |
| iii) | 5 | (1,1,3) (1,2,2) | (1,1,3,5) (1,1,4,4) (1,2,2,5) (1,2,3,4) (1,3,3,3) (2,2,2,4) (2,2,3,3) |
| | | $2\times\frac{3!}{2!}$ | $\left(\frac{4!}{2!}+\frac{4!}{2!2!}+\frac{4!}{2!}+4!+\frac{4!}{3!}+\frac{4!}{3!}+\frac{4!}{2!2!}\right)$ |

i) + ii) + iii) $= (1\cdot 10)+(3\cdot 35)+(6\cdot 68)$

$= 523$

*30.* 세 문자 $a$, $b$, $c$ 중에서 중복을 허락하여 각각 5개 이하씩 모두 7개를 택해 다음 조건을 만족시키는 7자리의 문자열을 만들려고 한다.

188

(가) 한 문자가 연달아 3개 이어지고 그 문자는 $a$뿐이다.
(나) 어느 한 문자도 연달아 4개 이상 이어지지 않는다.

예를 들어, *baaacca*, *ccbbaaa*는 조건을 만족시키는 문자열이고 *aabbcca*, *aaabccc*, *ccbaaaa*는 조건을 만족시키지 않는 문자열이다. 만들 수 있는 모든 문자열의 개수를 구하시오. [4점]

i) a 3개

| b | c | | | |
|---|---|---|---|---|
| 3 | 1 | bbbc, bbcb | $(2+5)\times 2$ | 14 |
| 2 | 2 | bbcc, bcbc, bccb | $5\times 6$ | 30 |
| 1 | 3 | | | 14 |
| 4 | 0 | bbbb | | 1 |
| 0 | 4 | | | 1 |

동일 동일 ⇒ 60

ii) a 4개 ⇒ (aaa/a)

| b | c | | | |
|---|---|---|---|---|
| 3 | 0 | _b_b_b_ | $(2+2\times2\times2)$ | 10 |
| 2 | 1 | _b_b_c_ | ${}_4P_2\times 3$ | 36 |
| 1 | 2 | | | 36 |
| 0 | 3 | | | 10 |

⇒ 92

iii) a 5개 ⇒ (aaa/a,a)

| b | c | | | |
|---|---|---|---|---|
| 2 | 0 | _b_b_ | $(3+6)$ | 9 |
| 1 | 1 | _b_c_ | $(2\times(3+6))$ | 18 |
| 0 | 2 | | | 9 |

⇒ 36

$\therefore 60+92+36=188$

※ 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

○ 이어서, 「선택과목(미적분)」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

# 수학 영역(미적분)



5지선다형

23. $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{4n^2+3n}-\sqrt{4n^2+1}\right)$의 값은? [2점]

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{3}{4}$ ③ 1 ④ $\frac{5}{4}$ ⑤ $\frac{3}{2}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{4n^2+3n-4n^2-1}{\sqrt{4n^2+3n}+\sqrt{4n^2+1}} = \frac{3}{4}$$

24. 함수 $f(x)=e^x(2\sin x+\cos x)$에 대하여 $f'(0)$의 값은? [3점]

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

$$f'(x) = e^x(2\sin x+\cos x)+e^x(2\cos x-\sin x)$$

$$f'(0) = 1\cdot(1)+1\cdot(2)$$

$$= 3$$

*25.* 수열 $\{a_n\}$에 대하여 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n - \frac{2^{n+1}}{2^n+1}\right)$이 수렴할 때,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^n \times a_n + 5\times 2^{n+1}}{2^n+3}$$ 의 값은? [3점]

① 6 ② 8 ③ 10 ④ 12 ⑤ 14

$\lim_{n\to\infty}\left(a_n - \frac{2^{n+1}}{2^n+1}\right) = 0$

$\lim_{n\to\infty} a_n = 2$

$\lim_{n\to\infty}\frac{2^n\cdot a_n + 10\cdot 2^n}{2^n+3} = \frac{2+10}{1} = 12$

*26.* 두 함수 $f(x)=a^x$, $g(x)=2\log_b x$에 대하여

$$\lim_{x\to e}\frac{f(x)-g(x)}{x-e}=0$$

일 때, $a\times b$의 값은? (단, $a$와 $b$는 1보다 큰 상수이다.) [3점]

① $e^{\frac{1}{e}}$ ② $e^{\frac{2}{e}}$ ③ $e^{\frac{3}{e}}$ ④ $e^{\frac{4}{e}}$ ⑤ $e^{\frac{5}{e}}$

$f(e) - g(e) = 0 \Leftrightarrow a^e = 2\log_b e$

$\lim_{x\to e}\frac{f(x)-f(e)}{x-e} - \frac{g(x)-g(e)}{x-e} = f'(e) - g'(e) = 0$

$\Leftrightarrow a^e \ln a = \frac{2}{e\ln b}$

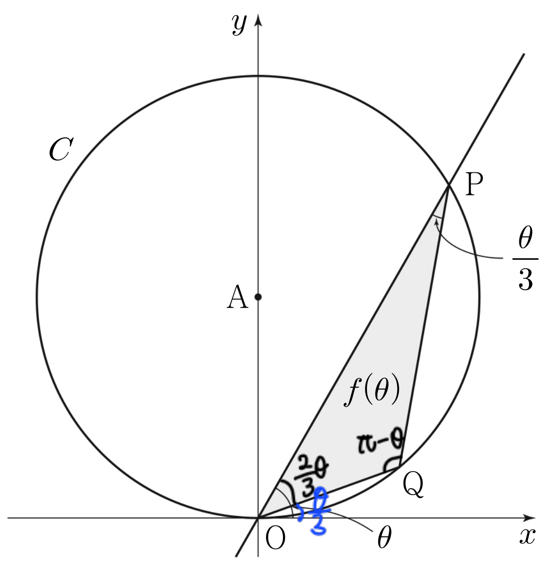
대입

$\frac{2}{\ln b}\cdot \ln a = \frac{2}{e\ln b}$ $\therefore a = e^{\frac{1}{e}}$

$\Rightarrow e = 2\log_b e$ $\therefore b = e^{\frac{2}{e}}$

$\Rightarrow a\times b = e^{\frac{3}{e}}$

**27.** 그림과 같이 좌표평면 위에 점 A$(0, 1)$을 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 원 $C$가 있다. 원점 O를 지나고 $x$축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 $\theta$인 직선이 원 $C$와 만나는 점 중 O가 아닌 점을 P라 하고, 호 OP 위에 점 Q를 $\angle \mathrm{OPQ} = \frac{\theta}{3}$가 되도록 잡는다. 삼각형 POQ의 넓이를 $f(\theta)$라 할 때, $\lim_{\theta \to 0+} \frac{f(\theta)}{\theta^3}$의 값은? (단, 점 Q는 제1사분면 위의 점이고, $0 < \theta < \pi$이다.) [3점]




① $\frac{2}{9}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{4}{9}$ ④ $\frac{5}{9}$ ⑤ $\frac{2}{3}$

$\overline{PQ} = 2\sin\frac{2}{3}\theta$ $\overline{OQ} = 2\sin\frac{\theta}{3}$

$f(\theta) = \frac{1}{2}\cdot 2\sin\frac{2}{3}\theta \cdot 2\sin\frac{\theta}{3} \cdot \sin(\pi-\theta)$

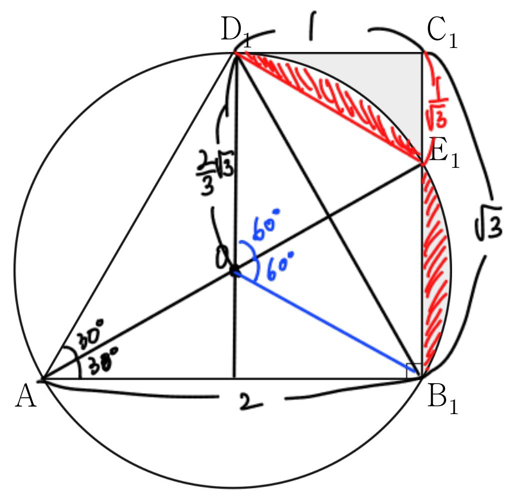
$\lim_{\theta\to 0+} 2\cdot\frac{\sin\frac{2}{3}\theta}{\theta}\cdot\frac{\sin\frac{\theta}{3}}{\theta}\cdot\frac{\sin\theta}{\theta} = \frac{4}{9}$

**28.** 그림과 같이 $\overline{\mathrm{AB_1}} = 2$, $\overline{\mathrm{B_1C_1}} = \sqrt{3}$, $\overline{\mathrm{C_1D_1}} = 1$이고 $\angle \mathrm{C_1B_1A} = \frac{\pi}{2}$인 사다리꼴 $\mathrm{AB_1C_1D_1}$이 있다. 세 점 A, $\mathrm{B_1}$, $\mathrm{D_1}$을 지나는 원이 선분 $\mathrm{B_1C_1}$과 만나는 점 중 $\mathrm{B_1}$이 아닌 점을 $\mathrm{E_1}$이라 할 때, 두 선분 $\mathrm{C_1D_1}$, $\mathrm{C_1E_1}$과 호 $\mathrm{E_1D_1}$로 둘러싸인 부분과 선분 $\mathrm{B_1E_1}$과 호 $\mathrm{B_1E_1}$로 둘러싸인 부분인 ◥ 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 $R_1$이라 하자.

그림 $R_1$에서 선분 $\mathrm{AB_1}$ 위의 점 $\mathrm{B_2}$, 호 $\mathrm{E_1D_1}$ 위의 점 $\mathrm{C_2}$, 선분 $\mathrm{AD_1}$ 위의 점 $\mathrm{D_2}$와 점 A를 꼭짓점으로 하고 $\overline{\mathrm{B_2C_2}} : \overline{\mathrm{C_2D_2}} = \sqrt{3} : 1$이고 $\angle \mathrm{C_2B_2A} = \frac{\pi}{2}$인 사다리꼴 $\mathrm{AB_2C_2D_2}$를 그린다. 그림 $R_1$을 얻은 것과 같은 방법으로 점 $\mathrm{E_2}$를 잡고, 사다리꼴 $\mathrm{AB_2C_2D_2}$에 ◥ 모양의 도형을 그리고 색칠하여 얻은 그림을 $R_2$라 하자.

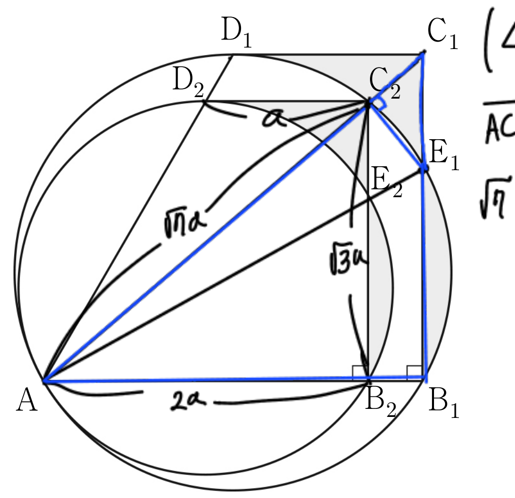
이와 같은 과정을 계속하여 $n$번째 얻은 그림 $R_n$에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 $S_n$이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [4점]

$R_1$




$S_1 = \frac{1}{2\sqrt{3}}$

$R_2$




$(\triangle AB_1C_1 \backsim \triangle E_1C_2C_1)$

$\overline{AC_1} : \overline{C_1B_1} = \overline{C_1E_1} : \overline{C_1C_2}$

$\sqrt{7} : \sqrt{3} = \frac{1}{\sqrt{3}} : \sqrt{7}(1-a)$

$1 = 7(1-a)$

$\therefore a = \frac{6}{7}$

⋮ ⋮

① $\frac{49}{144}\sqrt{3}$ ② $\frac{49}{122}\sqrt{3}$ ③ $\frac{49}{100}\sqrt{3}$

④ $\frac{49}{78}\sqrt{3}$ ⑤ $\frac{7}{8}\sqrt{3}$

닮음비 $1 : \frac{6}{7}$

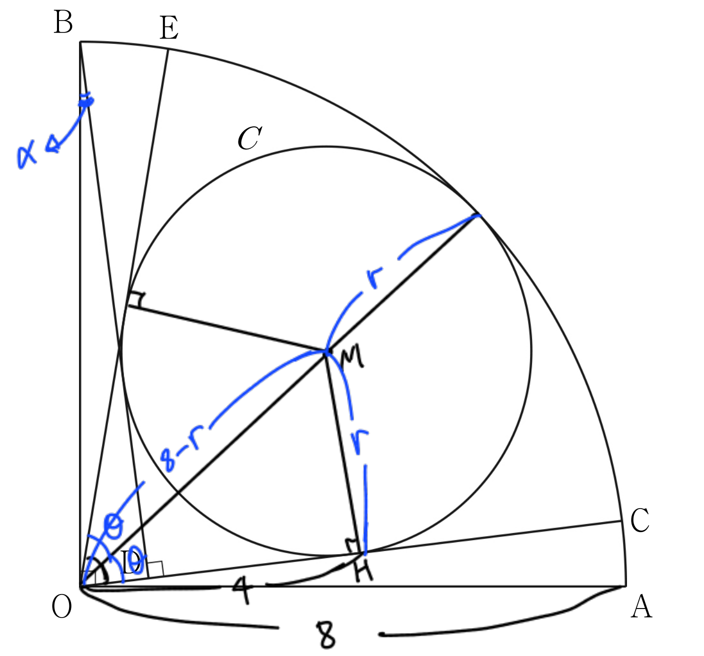
넓이비 $1 : \frac{36}{49}$ ⇒ $\frac{\frac{1}{2\sqrt{3}}}{1-\frac{36}{49}} = \frac{49}{78}\sqrt{3}$

**단답형**

*29.* 그림과 같이 중심이 O, 반지름의 길이가 8이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$인 부채꼴 OAB가 있다. 호 AB 위의 점 C에 대하여 점 B에서 선분 OC에 내린 수선의 발을 D라 하고, 두 선분 BD, CD와 호 BC에 동시에 접하는 원을 $\mathcal{C}$라 하자. 점 O에서 원 $\mathcal{C}$에 그은 접선 중 점 C를 지나지 않는 직선이 호 AB와 만나는 점을 E라 할 때, $\cos(\angle \mathrm{COE}) = \frac{7}{25}$이다.

79

$\sin(\angle \mathrm{AOE}) = p + q\sqrt{7}$일 때, $200 \times (p+q)$의 값을 구하시오. (단, $p$와 $q$는 유리수이고, 점 C는 점 B가 아니다.) [4점]




$\cos 2\theta = \cos(\theta+\theta) = \cos^2\theta - \sin^2\theta$

$= 2\cos^2\theta - 1 = \frac{7}{25} \Rightarrow \cos\theta = \frac{4}{5}$

$\sin\theta = \frac{3}{5}$

원 C의 반지름 : $r$, $\overline{OM} = 8-r$

$\sin\theta = \frac{r}{8-r} = \frac{3}{5} \Rightarrow r=3 \Rightarrow \cos\theta = \frac{4}{5} = \frac{\overline{OH}}{5}$ $\therefore \overline{OH} = 4$

$\overline{HD} = 3$ 이므로 $\overline{OD} = \overline{OC} - \overline{HD} = 1$

$\angle OBD = \angle AOC = \alpha$라 하면, $\sin\alpha = \frac{1}{8}$, $\cos\alpha = \frac{3}{8}\sqrt{7}$

$\sin(\angle AOE) = \sin(\alpha + 2\theta) = \sin\alpha\cos 2\theta + \cos\alpha\sin 2\theta$

$= \frac{1}{8}\cdot\frac{7}{25} + \frac{3\sqrt{7}}{8}\cdot 2\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{4}{5}$

$= \underbrace{\frac{7}{200}}_{p} + \underbrace{\frac{72}{200}}_{q}\sqrt{7}$

$\therefore 200 \times (p+q) = \frac{79}{200} \times 200 = 79$

*30.* $x \geq 0$에서 정의된 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $f(x) = \begin{cases} 2^x - 1 & (0 \leq x \leq 1) \\ 4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^x - 1 & (1 < x \leq 2) \end{cases}$
>
> (나) 모든 양의 실수 $x$에 대하여 $f(x+2) = -\frac{1}{2}f(x)$이다.

107

$x > 0$에서 정의된 함수 $g(x)$를

$$g(x) = \lim_{h \to 0+} \frac{f(x+h) - f(x-h)}{h}$$

라 할 때,

$$\lim_{t \to 0+} \{g(n+t) - g(n-t)\} + 2g(n) = \frac{\ln 2}{2^{24}}$$

를 만족시키는 모든 자연수 $n$의 값의 합을 구하시오. [4점]

$(0 \leq x \leq 1)$ $2^x - 1$ | $(1 < x \leq 2)$ $2^{-x+2} - 1$

$(2 < x \leq 3)$ $\left(-\frac{1}{2}\right)^1 (2^{x-2} - 1)$ | $(3 < x \leq 4)$ $\left(-\frac{1}{2}\right)^1 (2^{-x+4} - 1)$

⋮ | ⋮

$(2m < x \leq 2m+1)$ $\left(-\frac{1}{2}\right)^m (2^{x-2m} - 1)$ | $(2m+1 < x \leq 2m+2)$ $\left(-\frac{1}{2}\right)^m (2^{-x+2m+2} - 1)$

$x \neq 2k, 2k+1$ 일 때, $g(x) = 2f'(x)$

$x = 2k$ 일 때

$g(x) = \lim_{h \to 0+} \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^k (2^{2k+h-2k} - 1)}{h} - \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^{k-1} (2^{-2k+h+2k} - 1)}{h}$

$= 3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^k \cdot \lim_{h \to 0+} \frac{2^h - 1}{h}$

$= 3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^k \cdot \ln 2$

$x = 2k+1$ 일 때

$g(x) = \lim_{h \to 0+} \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^k (2^{-2k-1-h+2k+2} - 1)}{h} - \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^k (2^{2k+1-h-2k} - 1)}{h}$

$= 0$

☆ 다음장에 계속...

※ 확인 사항

- 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.
- 이어서, 「선택과목(기하)」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

+ of no.30

$$f'(x) = \begin{cases} \left(-\frac{1}{2}\right)^m \left(2^{x-2m}\right) \ln 2 & (2m < x \le 2m+1) \\ -\left(-\frac{1}{2}\right)^m \left(2^{-x+2m+2}\right) \ln 2 & (2m+1 < x \le 2m+2) \end{cases}$$

i) $n$이 짝수 $(n=2l)$

$$\lim_{t\to0+} g(2l+t) = \lim_{t\to0+} 2f'(2l+t)$$
$$= 2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^l \left(2^{2l-2l}\right) \ln 2$$
$$= 2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^l \ln 2$$

$$\lim_{t\to0+} g(2l-t) = \lim_{t\to0+} 2f'(2l-t)$$
$$= -2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{l-1}\cdot\left(2^{-2l+2l-2+2}\right) \ln 2$$
$$= 4\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^l \ln 2$$

$$\therefore\ 2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^l \ln 2 - 4\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^l \ln 2 + 6\left(-\frac{1}{2}\right)^l \ln 2 = 4\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^l \ln 2$$

$\Rightarrow l=26,\ n=52$

ii) $n$이 홀수 $(n=2l+1)$

$$\lim_{t\to0+} g(2l+1+t) = \lim_{t\to0+} 2f'(2l+1+t)$$
$$= -2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^l\cdot\left(2^{-2l-1+2l+2}\right)\cdot \ln 2$$
$$= -4\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^l\cdot \ln 2$$

$$\lim_{t\to0+} g(2l+1-t) = \lim_{t\to0+} 2f'(2l+1-t)$$
$$= 2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^l\cdot\left(2^{2l+1-2l}\right) \ln 2$$
$$= 4\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^l\cdot \ln 2$$

$$\therefore\ -4\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^l\cdot \ln 2 - 4\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^l\cdot \ln 2 + 0 = -8\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^l \ln 2$$

$\Rightarrow l=27,\ n=55$

$52+55=107$