著 : 雀
sukita1729@gmail.com

1. 적분가능한 함수 $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$가 $\displaystyle\int_0^1 xf(x)dx = 0$ 을 만족시킬 때, $\displaystyle\int_0^1 [f(x)]^2 dx \geq 4\left[\int_0^1 f(x)dx\right]^2$임을 증명하시오. (단, $\mathbb{R}$은 실수 전체의 집합이다.)
[★★★☆☆]

2. 적분가능한 함수 $f : [0, 1] \to [0, \infty)$에 대하여 다음이 성립함을 증명하시오. [★★★★☆]

$$\left(\int_0^1 f(x)dx\right)\left(\int_0^1 x^3 f(x)dx\right) \geq \left(\int_0^1 xf(x)dx\right)\left(\int_0^1 x^2 f(x)dx\right)$$

3. 정의역에서 연속이고 위로볼록이며 $f(x) \geq 0$이고 $f(0)=1$인 함수 $f : [0,1] \to \mathbb{R}$에 대하여 다음이 성립함을 증명하시오. (단, $\mathbb{R}$은 실수 전체의 집합이다.) [★★★★☆]

(1) $\displaystyle\int_0^x f(t)dt \geq \frac{1}{2}xf(x)+\frac{1}{2}x$

(2) $\displaystyle\int_0^1 xf(x)dx \leq \frac{2}{3}\left[\int_0^1 f(x)dx\right]^2$

4. 증가하는 연속함수 $f : [0,1] \to \mathbb{R}$에 대하여 다음이 성립함을 증명하시오. (단, $\mathbb{R}$은 실수 전체의 집합이다.) [★★★★☆]

$$\frac{1}{2}\int_0^1 f(x)dx \leq \int_0^1 xf(x)dx \leq \int_{\frac{1}{2}}^1 f(x)dx$$

5. 구간 $[0, 1]$을 정의역으로 가지는 적분가능한 함수 f에 대하여 $\int_0^1 f(x)dx = 0$이고 정의역의 모든 x에 대하여 $-1 \le f(x) \le 1$일 때, 다음 식의 값의 최댓값을 구하여라. (단, $\mathbb{R}$은 실수 전체의 집합이다.) [★★★★☆]

$$\int_0^1 [f(x)]^3 dx$$

6. 연속함수 $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$에 대하여 다음 식의 최댓값을 L이라 하자. 식의 값이 최대가 될 때의 함수 f를 f_0라 할 때, $128 f_0(L)$의 값을 구하시오. (단, $\mathbb{R}$은 실수 전체의 집합이다.) [★★★☆☆]

$$\int_0^1 x^2 f(x)dx - \int_0^1 x[f(x)]^2 dx$$

7. (보너스 문제) 다음 적분의 값을 구하여라.

$$\int_{1}^{e} \frac{3\ln x - 1 + 2x}{x\ln x + x^2 + 2x^4}\,dx$$

8. (보너스 문제) 다음 적분의 값을 구하여라.
(단, $\{x\}$는 x의 소수부이다.)

$$\int_{0}^{\ln 2} \left\{\frac{1}{e^x - 1}\right\} dx$$