제 2 교시

수학 영역

5지선다형

1. $3^{1-\sqrt{5}} \times 3^{1+\sqrt{5}}$ 의 값은? [2점] ⑤

① $\frac{1}{9}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ 1 ④ 3 ⑤ 9

$3^2 = 9$

2. 함수 $f(x) = 2x^2 - x$ 에 대하여 $\lim_{x \to 1} \frac{f(x) - 1}{x - 1}$ 의 값은? [2점] ③

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$f'(1) = 4 - 1 = 3$

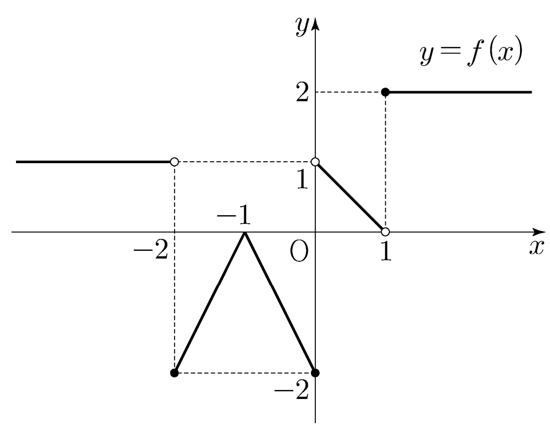
3. $\frac{3}{2}\pi < \theta < 2\pi$ 인 θ 에 대하여 $\cos\theta = \frac{\sqrt{6}}{3}$ 일 때, $\tan\theta$ 의 값은? [3점]

$\sin\theta = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ ②

① $-\sqrt{2}$ ② $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ ③ 0 ④ $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ⑤ $\sqrt{2}$

$\tan\theta = \frac{-\sqrt{3}}{\sqrt{6}} = \frac{-\sqrt{18}}{6} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

4. 함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 그림과 같다.



$\lim_{x \to -2+} f(x) + \lim_{x \to 1-} f(x)$ 의 값은? [3점]

-2 0 ①

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

5. 모든 항이 양수인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$\frac{a_3 a_8}{a_6}=12, \quad a_5+a_7=36$$

12 24

일 때, a_{11}의 값은? [3점]

⑤

① 72 ② 78 ③ 84 ④ 90 ⑤ 96

$$\frac{a_3^2\cdot r^5}{a_3\cdot r^3}=a_3r^2=a_5=12$$

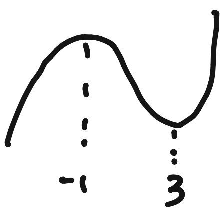
$$r^2=2$$

$$a_{11}=a_7\cdot r^4$$
$$=24\cdot 4$$
$$=96$$

6. 함수 $f(x)=x^3+ax^2+bx+1$은 $x=-1$에서 극대이고, $x=3$에서 극소이다. 함수 $f(x)$의 극댓값은? (단, a, b는 상수이다.) [3점]

$3=-a$
$a=-3$ ③

① 0 ② 3 ③ 6 ④ 9 ⑤ 12



$f'(x)=3x^2-6x+b$
$f'(-1)=3+6+b=0$
$b=-9$

$f(-1)=-1+a-b+1$
$=a-b=6$

7. 두 실수 a, b가

$$3a+2b=\log_3 32, \quad ab=\log_9 2$$

를 만족시킬 때, $\frac{1}{3a}+\frac{1}{2b}$의 값은? [3점]

④

① $\frac{5}{12}$ ② $\frac{5}{6}$ ③ $\frac{5}{4}$ ④ $\frac{5}{3}$ ⑤ $\frac{25}{12}$

$$\frac{3a+2b}{6ab}=\frac{5\log_3 2}{6\log_9 2}=\frac{5\log_3 2}{3\log_3 2}=\frac{5}{3}$$

8. 다항함수 $f(x)$가

$$f'(x)=6x^2-2f(1)x, \quad f(0)=4$$

를 만족시킬 때, $f(2)$의 값은? [3점] 4

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

$f(x)=2x^3-f(1)x^2+4$

$f(1)=6-f(1)$

$f(1)=3$

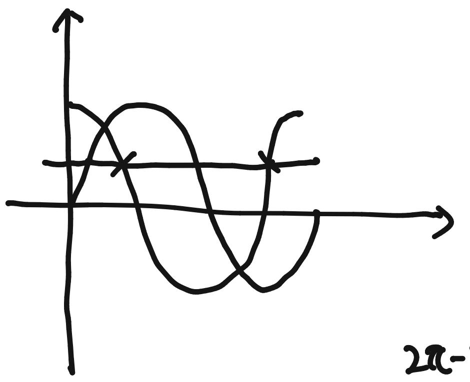
$f(2)=16-3\cdot4+4$
$=8$

9. $0\le x\le 2\pi$일 때, 부등식

$$\cos x\le \sin\frac{\pi}{7}$$

를 만족시키는 모든 x의 값의 범위는 $\alpha\le x\le\beta$이다. $\beta-\alpha$의 값은? [4점] 3

① $\frac{8}{7}\pi$ ② $\frac{17}{14}\pi$ ③ $\frac{9}{7}\pi$ ④ $\frac{19}{14}\pi$ ⑤ $\frac{10}{7}\pi$

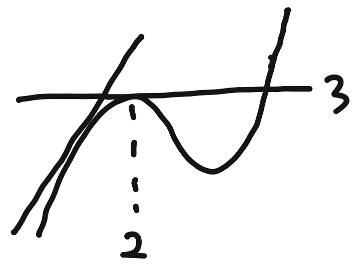


$2\pi-\frac{5}{7}\pi$
$=\frac{9}{7}\pi$

$\frac{\pi}{7}$ $\frac{\pi}{4}$ $\frac{10}{28}\pi$
$=\frac{5}{14}\pi$

10. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(-2, f(-2))$에서의 접선과 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(2, 3)$에서의 접선이 점 $(1, 3)$에서 만날 때, $f(0)$의 값은? [4점] 3

① 31 ② 33 ③ 35 ④ 37 ⑤ 39



$f(x)=(x-2)^2(x-a)+3$

$f'(x)=2(x-2)(x-a)+(x-2)^2$

$\frac{3-f(-2)}{3}=f'(-2)$

$-(-4)^2(-2-a)=3\{2(-4)(-2-a)+16\}$

$(a+2)\cdot16=3\{8(a+2)+16\}$

$16a+32=3\{8a+32\}$
$=24a+96$

$8a=-64$
$a=-8$

$\therefore f(x)=(x-2)^2(x+8)+3$

$f(0)=4\cdot8+3=35$

11. 두 점 P와 Q는 시각 $t=0$일 때 각각 점 A(1)과 점 B(8)에서 출발하여 수직선 위를 움직인다. 두 점 P, Q의 시각 $t\,(t \ge 0)$에서의 속도는 각각

$$v_1(t)=3t^2+4t-7, \quad v_2(t)=2t+4$$

$= (3t+7)(t-1)$

이다. 출발한 시각부터 두 점 P, Q 사이의 거리가 처음으로 4가 될 때까지 점 P가 움직인 거리는? [4점]

⑤

① 10 ② 14 ③ 19 ④ 25 ⑤ 32

$x_1(t)=t^3+2t^2-7t+1$

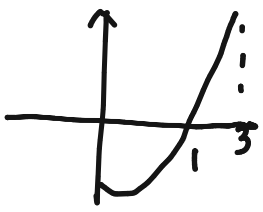
$-\ x_2(t)=t^2+4t+8$

$x(t)=t^3+t^2-11t-7$

$t^3+t^2-11t-7=-4$

$t^3+t^2-11t-3=0$

$t=3$ // $27+9-33-3=0$



$[t^3+2t^2-7t]_0^1$

$=1+2-7=-4$

$[t^3+2t^2-7t]_1^3$

$=\underbrace{27+18-21}_{24}\ \underbrace{-1-2+7}_{4}$

$=28$

$4+28=32$

12. 첫째항이 자연수인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

7+15=22

$$a_{n+1}=\begin{cases} a_n+1 & (a_n\text{이 홀수인 경우}) \\ \frac{1}{2}a_n & (a_n\text{이 짝수인 경우}) \end{cases}$$

를 만족시킬 때, $a_2+a_4=40$이 되도록 하는 모든 a_1의 값의 합은? [4점]

①

① 172 ② 175 ③ 178 ④ 181 ⑤ 184

① a_1 짝수

$a_2=\frac{1}{2}a_1$ → $a_3=\frac{1}{2}a_1+1 \rightarrow a_4=\frac{1}{4}a_1+\frac{1}{2}$

$a_3=\frac{1}{4}a_1$ → $a_4=\frac{1}{4}a_1+1$, $a_4=\frac{1}{8}a_1$

①-1) $a_2+a_4=\frac{3}{4}a_1+\frac{1}{2}=40$

$\Rightarrow X$

①-2) $a_2+a_4=\frac{3}{4}a_1+1=40$

$\frac{3}{4}a_1=39$

$\boxed{a_1=13\cdot 4=52}$

①-3) $a_2+a_4=\frac{5}{8}a_1=40$

$\boxed{a_1=64}$

② a_1 홀수

$a_2=a_1+1 \rightarrow a_3=\frac{1}{2}(a_1+1)$ → $a_4=\frac{1}{2}a_1+\frac{3}{2}$, $a_4=\frac{1}{4}(a_1+1)$

②-1) $a_2+a_4=\frac{3}{2}a_1+\frac{5}{2}=40$

$3a_1+5=80 \rightarrow 3a_1=75$

$\boxed{a_1=25}$

②-2) $a_2+a_4=\frac{5}{4}(a_1+1)=40$

$a_1+1=32$

$\boxed{a_1=31}$

$\underbrace{52+64}_{116}+\underbrace{25+31}_{56}=172$

13. 두 실수 a, b에 대하여 함수

$f'(x)$ $\begin{cases} -x^2-2ax-b \\ x^2+2ax-b \end{cases}$

$$f(x)=\begin{cases} -\dfrac{1}{3}x^3-ax^2-bx & (x<0) \\ \dfrac{1}{3}x^3+ax^2-bx & (x\geq 0) \end{cases}$$

$f'(0)=-b\geq 0$

$b\leq 0$

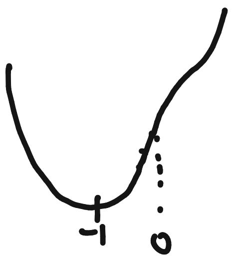
이 구간 $(-\infty,\ -1]$에서 감소하고 구간 $[-1,\ \infty)$에서 증가할 때, $a+b$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 하자. $M-m$의 값은? [4점]

3

① $\dfrac{3}{2}+3\sqrt{2}$ ② $3+3\sqrt{2}$ ③ $\dfrac{9}{2}+3\sqrt{2}$ ④ $6+3\sqrt{2}$ ⑤ $\dfrac{15}{2}+3\sqrt{2}$

$f'(-1)=-1+2a-b=0$

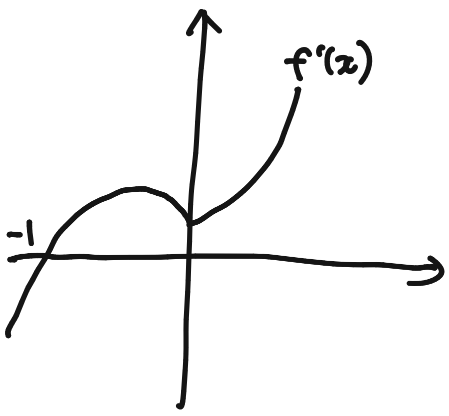
$2a-b=1$



$b=2a-1\leq 0$

$a\leq\frac{1}{2}$

$f'(x)=x^2+2ax-b\ \ (x>0)$



$\frac{D}{4}=a^2+b\leq 0$

$a^2+2a-1\leq 0$

$a=-1\pm\sqrt{2}$

$-1-\sqrt{2}\leq a\leq -1+\sqrt{2}$

$\therefore\ -1-\sqrt{2}\leq a\leq\frac{1}{2}$

$a+b=3a-1\rightarrow$ $M:\frac{1}{2}$

$-\ m:-4-3\sqrt{2}$

$M-m=\frac{9}{2}+3\sqrt{2}$

14. 두 자연수 a, b에 대하여 함수

a^x

$a^{x-5}+3$

$$f(x)=\begin{cases} 2^{x+a}+b & (x\leq -8) \\ -3^{x-3}+8 & (x>-8) \end{cases}$$

이 다음 조건을 만족시킬 때, $a+b$의 값은? [4점]

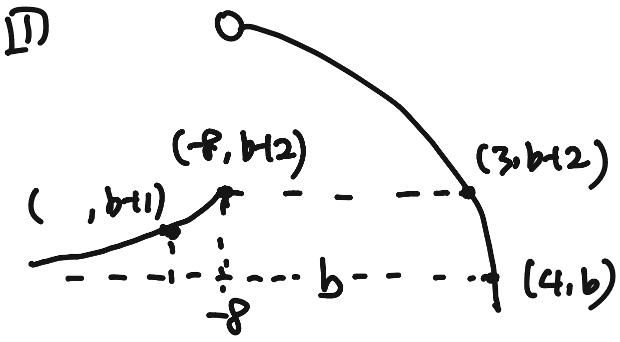
2

$\rightarrow b+1,\ b+2$

집합 $\{f(x)\,\vert\, x\leq k\}$의 원소 중 정수인 것의 개수가 2가 되도록 하는 모든 실수 k의 값의 범위는 $3\leq k<4$이다.

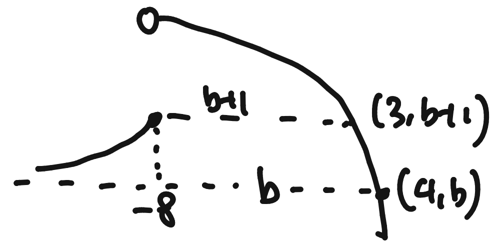
① 11 ② 13 ③ 15 ④ 17 ⑤ 19

1



$\Rightarrow$ k 범위 $-8<k<4$ $\therefore$ X

2



$\Rightarrow -3+8=5=b$

$2^{a-8}+5=6$

$2^{a-8}=1$

$a=8$

13

15. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} \dfrac{f(x+3)\{f(x)+1\}}{f(x)} & (f(x)\neq 0) \\ 3 & (f(x)=0) \end{cases}$$

이라 하자. $\lim_{x\to 3} g(x)=g(3)-1$일 때, $g(5)$의 값은? [4점]

$g(3)\neq g(3)-1$ ④

① 14 ② 16 ③ 18 ④ 20 ⑤ 22

$\downarrow$

$f(3)=0$ $\therefore \lim_{x\to 3} g(x)=2$

$\Rightarrow f(6)=0$

$f(x)=(x-3)(x-6)(x-a)$

$$\lim_{x\to 3}\frac{x(\cancel{x-3})(x-a+3)\cdot 1}{(\cancel{x-3})(x-6)(x-a)}=\frac{3\cdot(6-a)}{-3(3-a)}=2$$

$6-a=2a-6$

$3a=12$

$a=4$

$f(5)=2\cdot(-1)\cdot 1$
$=-2$

$f(8)=5\cdot 2\cdot 4$
$=40$

$$g(5)=\frac{f(8)\cdot\{f(5)+1\}}{f(5)}=\frac{40\cdot(-1)}{-2}$$

$=20$

단답형

16. 방정식 $\log_2(x-1)=\log_4(13+2x)$를 만족시키는 실수 x의 값을 구하시오. [3점]

$x>1$ $\boxed{6}$

$x^2-2x+1=13+2x$

$x^2-4x-12=0$

$(x-6)(x+2)=0$

17. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여

$$\sum_{k=1}^{10}(2a_k-b_k)=34, \quad \sum_{k=1}^{10}a_k=10$$

20 $\hookrightarrow -14$

일 때, $\sum_{k=1}^{10}(a_k-b_k)$의 값을 구하시오. [3점]

$\boxed{24}$

18. 함수 $f(x)=(x^2+1)(x^2+ax+3)$에 대하여 $f'(1)=32$일 때, 상수 a의 값을 구하시오. [3점]

$2(a+4)+2(a+2)$ $\boxed{5}$

$=4a+12=32$

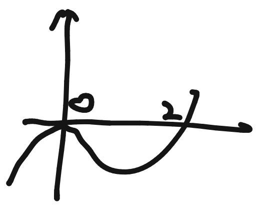
$a=5$

19. 두 곡선 $y=3x^3-7x^2$과 $y=-x^2$으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하시오. [3점]

$\boxed{4}$

$3x^3-6x^2=0$

$3x^2(x-2)=0$

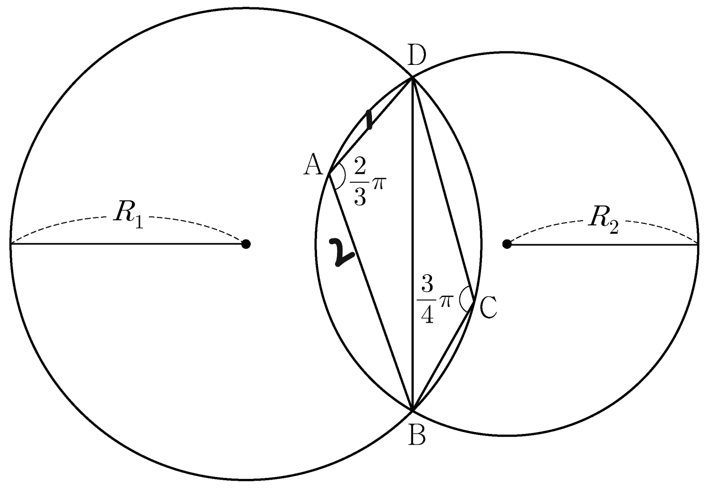


$\dfrac{3\cdot 2^4}{\cancel{12}\,4}=4$

20. 그림과 같이

$$\overline{AB}=2,\ \overline{AD}=1,\ \angle DAB=\frac{2}{3}\pi,\ \angle BCD=\frac{3}{4}\pi$$

인 사각형 ABCD가 있다. 삼각형 BCD의 외접원의 반지름의 길이를 R_1, 삼각형 ABD의 외접원의 반지름의 길이를 R_2라 하자.



다음은 $R_1 \times R_2$의 값을 구하는 과정이다. $\dfrac{\overline{BD}}{\sin\frac{2}{3}\pi}=2R_2$

> 삼각형 BCD에서 사인법칙에 의하여 $\to \frac{\sqrt{3}}{3}\overline{BD}=R_2$
>
> $$R_1=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\overline{BD}$$
>
> 이고, 삼각형 ABD에서 사인법칙에 의하여
>
> $$R_2=\boxed{(가)}\times\overline{BD} \to \frac{\sqrt{3}}{3}$$
>
> 이다. 삼각형 ABD에서 코사인법칙에 의하여 $\overline{BD}^2=4+1+2=7$
>
> $$\overline{BD}^2=2^2+1^2-(\boxed{(나)})$$
>
> 이므로 $2\cdot2\cdot1\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=-2$
>
> $$R_1\times R_2=\boxed{(다)}$$
>
> 이다. $\overline{BD}^2\cdot\frac{\sqrt{6}}{6}=7\cdot\frac{\sqrt{6}}{6}$

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 수를 각각 p, q, r이라 할 때, $9\times(p\times q\times r)^2$의 값을 구하시오. [4점]

$\boxed{98}$

$\overset{3}{\cancel{9}}\cdot\frac{1}{\cancel{3}}\cdot\overset{2}{\cancel{4}}\cdot\frac{1}{\underset{2}{\cancel{6}}}\cdot 49=98$

→ 공차도 자연수

21. 모든 항이 자연수인 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자. a_7이 13의 배수이고 $\sum_{k=1}^{7} S_k = 644$일 때, a_2의 값을 구하시오. [4점]

$\boxed{19}$

$S_1+S_2+\cdots$

$\rightarrow 7a_1+6a_2+\cdots+a_7=644$

$a_1\cdot\frac{7\cdot \cancel{8}^{4}}{2}+d(1\cdot6+2\cdot5+3\cdot4+4\cdot3+5\cdot2+6\cdot1)$

$=28a_1+d(12+20+24)$

$=28a_1+56d=644$

$a_1+2d=a_3=23$

$644 \div 28 = 23$

$a_7=23+4d=13N$

$d=\frac{\boxed{13N-23}}{4}$ ← 4의 배수 $(N\geq2)$

13
26
$39-23=\frac{16}{4}=4$

$\therefore d=4$

$a_2=a_3-d=23-4=19$

22. 두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 하고 $g(x)$의 한 부정적분을 $G(x)$라 할 때, 이 함수들은 모든 실수 x에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

$f(1)-3=0$

(가) $\int_1^x f(t)\,dt = xf(x)-2x^2-1$ $f(1)=3$

(나) $f(x)G(x)+F(x)g(x)=8x^3+3x^2+1$

$\{F(x)G(x)\}'=8x^3+3x^2+1$

$\int_1^3 g(x)\,dx$의 값을 구하시오. [4점]

$\boxed{10}$

$f(x)=f(x)+xf'(x)-4x$

$xf'(x)=4x$

$f'(x)=4$

$f(x)=4x-1$

$F(x)=2x^2-x+C_1$

→ $G(x)$도 2차

→ $g(x)$ 1차

$g(x)=ax+b=2x+b=2x+1$

$G(x)=\frac{a}{2}x^2+bx+C_2$

$=x^2+bx+C_2$

$4\cdot\frac{a}{2}+2\cdot a$

$=4a=8$

$a=2$

$-C_2+bC_1=1$

$-b-C_2+bC_1=0$

$b=1$

$[x^2+x]_1^3$

$=9+3-2$

$=10$

※ 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

○ 이어서, 「**선택과목(확률과 통계)**」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.