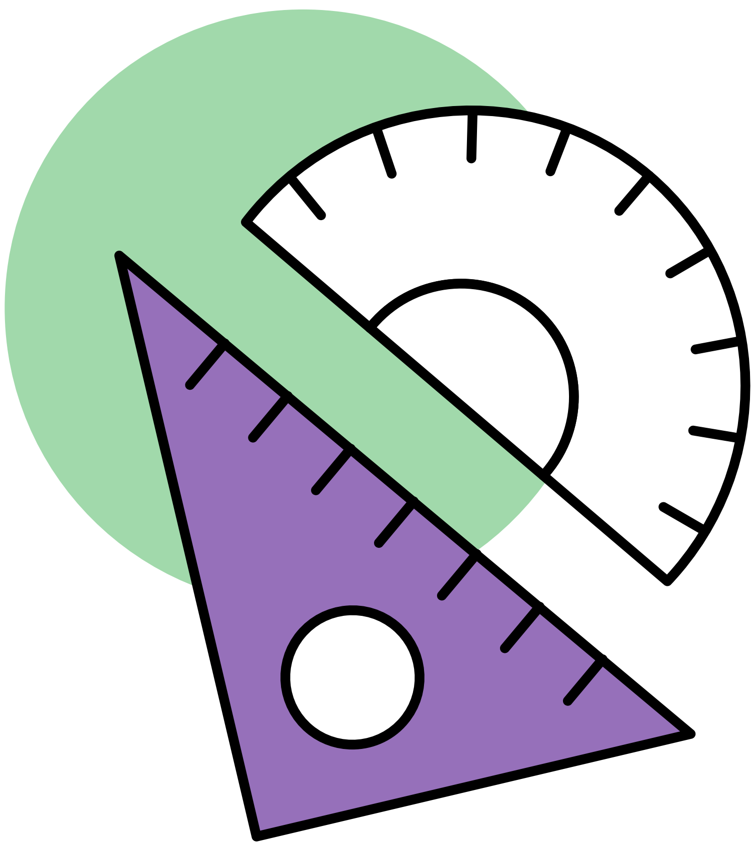
모의 논술 - 3차

제한 시간: 90분

건직쌤



[문제1]

함수 $f(x)=a^x\,(a>1)$일 때, 함수 $f(x)$와 그의 역함수 $g(x)$가 한 점 A에서 만난다. 직선 $l_k=-x+2e^k$에 대해 직선 l_k와 함수 $f(x)$, $g(x)$의 교점을 각각 B_k, C_k라고 하자. 다음 물음에 답하시오.

[1-1] a 값을 구하시오. [13점]

[1-2] 점 B_1과 C_1이 같음을 보이고 점 B_2, B_3, C_2, C_3의 좌표를 구하시오. [17점]

[1-3] 함수 $f(x)$와 $g(x)$, 직선 l_k로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_k라 하자. $\sum_{k=1}^{10}\left(S_k+ke^{k+1}\right)$ 값을 구하시오. [20점]

[문제2]

(가) 함수 $f(x)$가 임의의 세 실수 $a, b, c\,(a < b < c)$를 포함하는 구간에서 연속일 때 다음의 등식이 성립한다.

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$$

(나) 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속인 함수 $f(x)$에 대하여 미분가능한 함수 $x = g(t)$의 도함수 $g'(t)$가 $a = g(\alpha)$, $b = g(\beta)$일 때, α, β를 포함하는 구간에서 연속이면 다음의 등식이 성립한다.

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)dt$$

(다) 함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[a, b]$에서 연속이고 열린 구간 (a, b)에서 미분가능하면 $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$, $c \in (a, b)$인 c가 적어도 하나 존재한다.

[2-1] 함수 $g(x) = \displaystyle\int_{-x}^{x} \frac{t^{2n-1}\sin t}{1 + 2024^{-t}}dt$ (n은 자연수)에 대하여 $g(x) = \displaystyle\int_0^x t^{2n-1}\sin t\,dt$임을 보이시오. [15점]

[2-2] 함수 $f(x) = \displaystyle\int_{-x}^{x} \frac{t\sin t}{1 + 2024^{-t}}dt$가 있다. $f(0)$과 $f(\pi)$를 구하시오. [15점]

[2-3] $\dfrac{1}{f'(C_1)} + \dfrac{1}{f'(C_2)} + \dfrac{1}{f'(C_3)} + \cdots + \dfrac{1}{f'(C_n)} = n$을 만족하는 $C_1, C_2, C_3, \cdots, C_n$이 열린구간 $(0, \pi)$에 존재함을 보이시오. [20점]

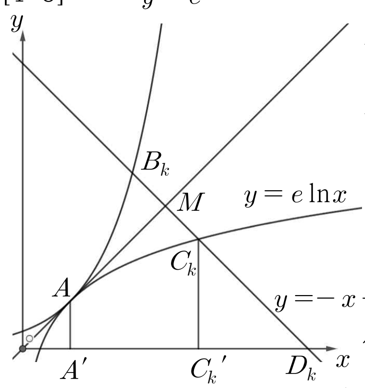
해설 - [문제1]

[1-1] 점 A의 좌표를(b, a^b)라 하자. 함수 $f(x)$와 $y=x$가 한 점에서만 만나므로 $f'(b)=1, b=a^b$를 만족한다. $f'(x)=a^x\ln a$, $f'(b)=a^b\ln a=1$이므로 $a^b=\dfrac{1}{\ln a}=b$를 만족한다. $b=a^b=\dfrac{1}{\ln a}$이므로 $\dfrac{1}{\ln a}=a^{\frac{1}{\ln a}}$이다. $\dfrac{1}{\ln a}=\log_a e$이고 $a^{\frac{1}{\ln a}}=a^{\log_a e}$이므로 $\log_a e=e$가 성립한다. 따라서 $a=e^{\frac{1}{e}}, b=e$이고 $A(e,e)$이다.

[1-2] $l_1: y=-x+2e^1$ 이때 l_1이 점 A를 지나므로 점 A, B_1, C_1이 같다.
$l_k: y=-x+2e^k$, $f(x)$에서 두 함수 모두 점 (ke, e^k)을 지난다. 따라서 $B_k(ke, e^k)$이고 점 C_k는 점 B_k와 직선 $y=x$에 대해 대칭이므로 $C_k(e^k, ke)$이다. 따라서 $B_2(2e, e^2)$, $B_3(3e, e^3)$, $C_2(e^2, 2e)$, $C_3(e^3, 3e)$이다.

∴ 수리논술에서 방정식을 풀지 않고 값을 구하는 경우도 있습니다. $e^{\frac{x}{e}}=-x+2e^k$ 방정식을 풀 수 없으니 어떤 교점을 가질지 예측하는 연습을 해 봅시다. (B_1, C_1으로 추측)

[1-3]



B_k, C_k의 중점을 M이라 하자.

$M\left(\dfrac{ke+e^k}{2}, \dfrac{ke+e^k}{2}\right)$

$\overline{AM}=\left(\dfrac{ke+e^k}{2}-e\right)\times\sqrt{2}$, $\overline{MC_k}=\left(\dfrac{e^k-ke}{2}\right)\times\sqrt{2}$

$\triangle AMC_k=\dfrac{1}{2}\times\overline{AM}\times\overline{MC_k}=\dfrac{1}{4}(ke+e^k-2e)(e^k-ke)$

사다리꼴 $AA'C_k'C_k$의 넓이: $\dfrac{1}{2}(e+ke)\times(e^k-e)$

오각형 $A'AMC_kC_k'$ 넓이: $\dfrac{1}{4}e^2(e^{k-1}+k-2)(e^{k-1}-k)+\dfrac{1}{2}e^2(1+k)(e^{k-1}-1)$

$$\frac{S_k}{2}=\frac{1}{4}e^2(e^{k-1}+k-2)(e^{k-1}-k)+\frac{1}{2}e^2(1+k)(e^{k-1}-1)-\int_e^{e^k} e\ln x dx$$

$$S_k=\frac{1}{2}e^2(e^{k-1}+k-2)(e^{k-1}-k)+e^2(1+k)(e^{k-1}-1)-2ke^{k+1}+2e^{k+1}$$

$$=\frac{1}{2}e^{2k}-(k-2)e^{k+1}-\frac{1}{2}e^2(k^2+2)$$

$$S_k+ke^{k+1}=\frac{1}{2}e^{2k}+2e^{k+1}-\frac{1}{2}e^2k^2-e^2$$

$$\sum_{k=1}^{10}(S_k+ke^{k+1})=\sum_{k=1}^{10}\left(\frac{1}{2}e^{2k}+2e^{k+1}-\frac{1}{2}e^2k^2-e^2\right)$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{e^2(e^{20}-1)}{e^2-1}+2e\times\frac{e(e^{10}-1)}{e-1}-\frac{1}{2}e^2\times\frac{10\times11\times21}{6}-10e^2$$

$$=\frac{e^2}{2(e^2-1)}(e^{20}-1)+\frac{2e^2}{e-1}(e^{10}-1)-\frac{405}{2}e^2$$

해설 - [문제2]

[2-1] $g(x)=\int_{-x}^{x}\frac{t^{2n-1}\sin t}{1+2024^{-t}}dt=\int_{0}^{x}\frac{t^{2n-1}\sin t}{1+2024^{-t}}dt+\int_{-x}^{0}\frac{t^{2n-1}\sin t}{1+2024^{-t}}dt \qquad \left(-t=k,\ -1=\frac{dk}{dt}\right)$

$=\int_{0}^{x}\frac{2024^{t}\times t^{2n-1}\sin t}{2024^{t}+1}dt+\int_{0}^{x}\frac{k^{2n-1}\sin k}{1+2024^{k}}dk$

$=\int_{0}^{x}\frac{(1+2024^{t})t^{2n-1}\sin t}{1+2024^{t}}dt=\int_{0}^{x}t^{2n-1}\sin t\,dt$

[2-2] $g(x)$에서 $n=1$일 때 $g(x)=f(x)$이다.

[2-1]에 의해 $f(x)=\int_{-x}^{x}\frac{t\sin t}{1+2024^{-t}}dt=\int_{0}^{x}t\sin t\,dt$ 이고

$f(0)=0, f(\pi)=\int_{0}^{\pi}t\sin t\,dt=[-t\cos t]_{0}^{\pi}+\int_{0}^{\pi}\cos t\,dt=\pi+[\sin t]_{0}^{\pi}=\pi$이다.

[2-3] $[0,\pi]$에서 함수 $f(x)$가 연속이므로 $f(b_k)=\frac{k}{n}\pi$를 만족하는 b_k가 존재한다.

$(k=0,1,2,\cdots,n)$ $b_0=0, b_n=\pi$

평균값 정리에 의해 $\frac{f(b_{k+1})-f(b_k)}{b_{k+1}-b_k}=f'(C_{k+1})$를 만족하는 C_{k+1}가 열린구간

(b_k, b_{k+1})에 적어도 하나 존재한다.

$\frac{\frac{k+1}{n}\pi-\frac{k}{n}\pi}{b_{k+1}-b_k}=f'(C_{k+1}), \frac{1}{f'(C_{k+1})}=\frac{n(b_{k+1}-b_k)}{\pi}, \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{f'(C_{k+1})}=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{n(b_{k+1}-b_k)}{\pi}$

$=\frac{n}{\pi}(b_n-b_0)=\frac{n}{\pi}(\pi-0)=n$이므로 $\frac{1}{f'(C_1)}+\frac{1}{f'(C_2)}+\frac{1}{f'(C_3)}+\cdots+\frac{1}{f'(C_n)}=n$을 만족하는 $C_1, C_2, C_3, \cdots, C_n$이 열린구간 $(0,\pi)$에 존재한다.