# 2016학년도 수능 직전 포카칩 모의평가 해설지

제작 : 솔로깡

Special Thanks to...
Immortality, 겨울

| 문제 | 정답 | 문제 | 정답 |
|---|---|---|---|
| 1 | ④ | 16 | ③ |
| 2 | ⑤ | 17 | ⑤ |
| 3 | ⑤ | 18 | ③ |
| 4 | ③ | 19 | ② |
| 5 | ④ | 20 | ④ |
| 6 | ① | 21 | ③ |
| 7 | ② | 22 | 6 |
| 8 | ③ | 23 | 5 |
| 9 | ⑤ | 24 | 14 |
| 10 | ④ | 25 | 9 |
| 11 | ① | 26 | 16 |
| 12 | ① | 27 | 99 |
| 13 | ② | 28 | 8 |
| 14 | ② | 29 | 65 |
| 15 | ① | 30 | 105 |

1번 : $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5-a & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ 따라서, $a=4$이다.

2번 : 각 변의 길이가 $5,\ 4,\ 3$인 직각삼각형을 작도하여 $\tan\theta$를 $\cos\theta$혹은 $\sin\theta$로 바꾸면 됩니다. 우리가 구해야 할 것이 $\cos\theta$가 아니라 $\cos 2\theta$라는 것에 주의합시다.

3번 : 등차중항을 이용하셔서 $a_4$를 구하셔도, $a_3$과 $a_5$를 직접 초항과 공차의 합으로 나타내어서 푸셔도 결과는 같습니다.

4번 : 점 $A$와 $B$를 $2:1$로 내분하는 점의 좌표는 $(2,\ 1,\ 2)$입니다. 원점과의 거리는 $3$입니다.

5번 : $f''(x) = 2 + 2e^x + xe^x$ 이므로, $f''(0) = 4$ 입니다.

6번 : 조건부 확률로 풀어나가시면 됩니다. “나온 눈의 수의 합이 $8$”인 사건이 $15$가지, “첫 번째 나온 눈의 수가 홀수”인 사건이 $6$가지입니다.

7번 : 조건에 그대로 대입하면, 점 $(1,\ 2)$는 $(2-2a,\ 3+2a)$로 옮겨집니다. 이것이 점 $(0,\ b)$와 같으므로, $a=1,\ b=5$라는 것을 이끌어낼 수 있습니다.

8번 : 삼각함수의 덧셈공식으로 $\sin(x+\alpha)$를 풀고 다시 $\sin x$와 $\cos x$를 인수로 묶으면 다음과 같습니다. $\cos\alpha\sin x + \left(\sin\alpha + \sqrt{3}\right)\cos x$ 이므로, $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha + 3 + 2\sqrt{3}\sin\alpha$의 값이 문제에서 주어진 최댓값의 제곱 $6$과 같으므로, $\sin\alpha$를 구할 수 있습니다.

9번 : $P(A) = a,\ P(B) = b$라고 할 때, 두 사건이 독립이므로 문제에서 주어진 두 식 중 첫 번째 식의 조건에 의해 $ab = \dfrac{1}{3}$이고, 두 번째 조건은 $a^2 + b^2 = \dfrac{25}{36}$입니다. 따라서 $(a+b)^2 = (a^2+b^2) + 2ab$의 성질을 이용하여 $a+b$를 구할 수 있습니다. $P(A\cup B) = a+b-ab$이므로 이제 답을 이끌어낼 수 있습니다.

10번 : 이미 다들 알고 계실만한 문제입니다. $y = mx + \sqrt{a^2m^2 + b^2}$ 의 익숙한 공식에 수치 대입후, 중학교 수준의 기하학적인 센스를 발휘하시면 쉽게 풀 수 있는 문제입니다. 해당 접선이 $AB$의 중점을 지나고, $AB$를 잇는 직선의 그래프의 기울기와 직각(두 기울기를 곱하면 $-1$)인 사실을 이용하시면 됩니다.

11번 : 꽤 괜찮은 문제였습니다. 3점문항인데도 4점못지않게 종합적인 개념이 포함되어있습니다.

문제에서 주어진 식을 변형하면 $E(X) = 4V(X)$가 됩니다. 또한, 확률변수 $X$가 이항분포 $(n,\ p)$를 따르므로 $E(X)$와 $V(X)$를 $n$과 $p$에 대하여 나타낼 수 있습니다.

우선 $p$의 값을 구하기 위해 $E(X) = 4V(X)$을 모두 $n$과 $p$에 대한 식으로 나타내면, $np = 4np(1-p)$이므로 $p = \dfrac{3}{4}$가 된다는 것을 쉽게 알 수 있습니다.

$P(X=0)$를 이용하면, $P(X=0) = {}_nC_0\left(\dfrac{3}{4}\right)^0\left(\dfrac{1}{4}\right)^n = \left(\dfrac{1}{4}\right)^n = \dfrac{1}{2^8}$ 이므로, $n$의 값은 $4$가 됩니다.

이제, $V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2$을 이용하셔서 문제에서 묻고자 하는 것을 직접 구하시면 됩니다.

12번 : 두 수열의 합과 차를 새로운 수열로 정의하십시오. $a_n + b_n$은 지문에서 주어진 바와 같이 초항이 5이고 공비가 5인 등비수열이므로 $a_n + b_n$=$5^n$가 됩니다. (가)는 $5^n$입니다. $a_n - b_n$은 지문에서 주어진 바와 같이 초항이 1이고 공차가 2인 등차수열이므로, (나)=$a_n - b_n = 2n - 1$입니다. 이제 대입하시면 됩니다.

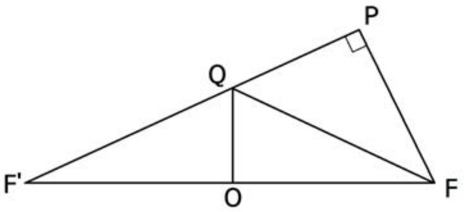
13번 : 처음에 검토할 때, 분모가 $2h$가 되어야 하지 않냐고 주장했다가 쪽팔렸던 기억이 있습니다. 분모 $h^2$인거 맞습니다. 겉보기엔 뭔가 엄청난 식 조작을 해야 할 것 같지만, 그냥 대입만 하면 풀리는 문제였습니다. 의외로 쉬워서 당황했던 기억이 있네요. 여기서 얻어야 할 교훈은, “패턴에 대한 매너리즘을 경계하자”는 것입니다. 자신이 아는듯한 문제도 정작 이면에는 새로운 내용들을 포함하는 경우가 있을 수도 있습니다. 항상 문제를 접근할때에는 이미 본 듯한 문제라는 인상으로 인해서 긴장을 놓아버리지 마십시오.

$f(t) = |\ln t|$ 이므로, 다음의 일련의 과정이 성립합니다.

$$\lim_{h \to +0} \frac{f(1+h) - f(1-h)}{h^2} = \lim_{h \to +0} \frac{|\ln(1+h)| - |\ln(1-h)|}{h^2} = \lim_{h \to +0} \frac{\ln(1+h) + \ln(1-h)}{h^2}$$
$$= \lim_{h \to +0} \frac{\ln(1-h^2)}{h^2} = -\lim_{h \to +0} \frac{\ln(1-h^2)}{-h^2} = -1$$

14번 : $g(t) = \ln t\left(t - \frac{1}{t}\right) - \int_{\frac{1}{t}}^{1} -\ln x\, dx - \int_{1}^{t} \ln x\, dx$입니다. 여기서 바로 미분하셔도 되고, 직접 풀어서 미분하셔도 됩니다. 전 직접 풀어서 겹치는 항들을 소거한 결과, $g(t) = t + \frac{1}{t} - 2$를 이끌어낼 수 있었고, 미분하여 $g(t)$를 구하고 $e$를 대입하여 $g'(e)$를 구했습니다. 어렵지않게 풀 수 있는 문제입니다.

15번 : 이 문제 역시 시키는대로 푸십시오. 이차곡선 문제가 항상 그렇듯이 ‘정의’를 이용하면 쉽게 잘 풀립니다. 점 $y$축과 $PF'$이 만나는 점을 $Q$라고 합시다. 일단 이차곡선 문제니 정의를 활용해야 할겁니다.




왼쪽 그림과 같은 상황에서, 선분 $PF$를 미지수 $x$로 설정하면 점 $P$가 쌍곡선 위의 한 점이므로 $PF'$은 $4+x$입니다. 삼각형 $PFF'$에서 피타고라스 정리를 이용하면 $x=2$가 되므로, $PFF'$의 모든 변의 길이를 알게 되었습니다. 또한, 삼각형 $QOF'$과 삼각형 $PFF'$이 닮음관계이므로 각 변을 닮음비를 통해서 구하면 선분 $QO$와 $OF'$의 길이를 구할 수 있고, 선분 $FF'$은 선분 $OF'$길이의 두 배 이므로 문제에서 구하고자 하는 삼각형$OFF'$의 넓이를 구할 수 있습니다.

16번 : 보기와는 달리 쉬운 문제입니다. 굳이 $x$좌표까지 수열로 만드려고 하신 분도 계실지 모르겠습니다만, 문제에서 묻고자 하는 것을 명확하게 파악하셔야 합니다. $y$좌표만을 문제에서 $a_n$으로 정의하여 묻고 있습니다. 그리고 문제에서 제시하는대로 무게중심 공식을 사용하면 $3a_{n+1} - a_n = 2^n + 2^{n+1}$이 되며, 이를 문제에 주어진 극한식에 대입하면 답이 도출됩니다. 점좌표에 대한 수열은 B형(가형)에서는 잘 다루어지지 않는 주제인데, 간만에 보니 반갑네요

**17번 :** 평가원에서 행렬문항이 나오면 항상 물어보는 것들이 있습니다. 우선, 교환법칙이 성립하는지 물어보고, 역행렬의 존재성도 물어봅니다. 그리고 세 번째로는 주어진 두 행렬로 나타내어진 식을 연립하여 새로운 한 형태의 식을 유도해내는 것입니다. 이 문항도 전형적인 그런 평가원식 구도를 나타내고 있습니다.

첫 번째 식은 $A$와 $B$가 모두 이차정사각행렬이기에 $A(AB-A)=(AB-A)A=E$ 식을 이끌어 낼 수 있습니다. ㄱ에서 묻고자 하는 $A$의 역행렬은 존재하는 셈입니다. 이 식 하나로 ㄴ선지까지 해결됩니다. 본 식을 전개하면 $ABA=AAB$를 이끌어낼 수 있고, 양 변의 앞쪽에 $A^{-1}$을 곱해주면 $AB=BA$가 되어 교환법칙이 성립하게 됩니다.

이제 ㄷ선지를 살펴보아야 합니다. 우리는 여태껏 문제에서 주어진 두 번째 식을 사용하지 않았습니다. 결론적으로 ㄷ선지가 묻고자 하는 것은 '식을 연립하여 전개해나갈 수 있는가?'라는 것을 빠르게 눈치채셔야 합니다.

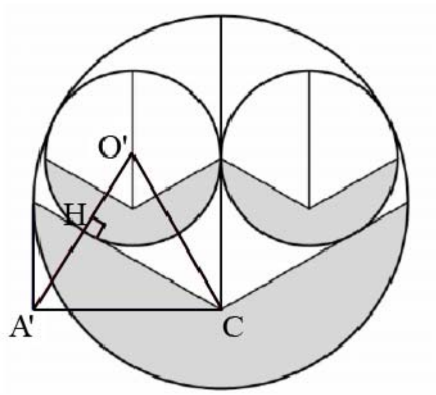
두 번째 식을 전개하면 $A^2+E-2A=2AB$ 이고, 여기에 어떻게 첫 번째 식을 연립할까 잘 생각해보니, $A^2+E$ 가 눈에 띕니다. 바로 대입하죠. $A^2B-2A=2AB$ 를 이끌어 낼 수 있습니다. ㄱ선지에서 살펴본 바와 같이, $A$의 역행렬이 존재하므로 양변의 앞쪽에 각각 $A$의 역행렬을 곱해주면 $AB-2E=2B$ 를 도출해낼 수 있습니다. 이제 다 되었네요. 적당히 이항하고 $B$로 묶어내면, $B(A-2E)=2E$가 됩니다.

따라서, $B^{-1}=\frac{1}{2}A-E$ 입니다. 꽤 괜찮은 문항이었습니다. 이 문제 외에도 2015학년도 6월 모의평가 수학B형 행렬 문항의 ㄷ선지를 꼭 '역행렬을 직접 제작하는 방식'으로 풀어보시기 바랍니다. 재밌을만한 내용을 하나 추가해봅니다.

> **행렬로 나타내어진 이차방정식을 이용한 역행렬 제조**
>
> $A^2-A=E$일 때, $A-2E$의 역행렬을 구하려면 어떻게 해야할까. 일단, $(A-2E)X=A^2-A+kE$ 꼴로 나타낼 필요가 있을 것이다. 그러기 위해서 $X$를 $(mA+nE)$꼴로 생각해보면, $m$과 $n$이 각각 $1$일 때 $A^2-A$가 포함되는 식을 제조할 수 있다는 것을 알게된다. 즉, $(A-2E)(A+E)$로 나타내었을 때, $A^2-A-2E$가 되어 $A^2-A=E$를 이용할 수 있다는 것이다. 다음의 일련의 과정이 성립한다.
>
> $(A-2E)(A+E)=A^2-A-2E=E-2E=-E$ 따라서, $A-2E$의 역행렬은 $-A-E$이다.

**18번** : 최근 경향의 무한등비급수는 주로 공비를 구하기 어려운 구도로 출제됩니다. 거의 본능에 가까운 직관적 센스를 필요로 하기도 합니다. 이는 여태껏 문제를 충분히 풀어오셨다면 충분히 필연성있게 풀 수 있을 정도로 출제되리라 생각해봅니다. 계산은 생략하고, 초항도 구하기 쉬우니 생략하고, 공비를 구하는 수많은 방법들 중, 제가 문제를 풀 때 사용한 방법과, 출제자분께서 의도하신 풀이를 소개해봅니다.

**1) 풀이방법1 (낮은 개연성, 높은 발상력. 실제 수험장에서 이 풀이가 직접 떠오를 가능성은 낮습니다.)**




왼쪽에 보시는 바와 같이, 점 $A$에서 적당히 아래로 접선을 그은 후, 삼각형 $AA'C$를 작도합니다

그리고, 작은 원의 중심인 $O'$에서 선분 $AC$에 수선의 발을 내리고, 점 $A'$에서도 선분 $AC$에 수선의 발을 내리면 삼각형 $O'A'C$가 작도된다는 것을 알 수 있습니다. 초항 구하셨던 분은 이미 아시겠지만, 각 $O'CH$는 $30^\circ$ 입니다. 각 $HCA'$또한 마찬가지. 그리고 삼각형 $O'CH$와 $A'CH$가 합동이네요. 자연스럽게, 삼각형 $O'CA'$은 정삼각형이 될 수 밖에 없습니다. 자, 이제 특수각을 이용해서 공비를 구하시면 됩니다. 바로 쉽게 답이 나올겁니다.

**2) 풀이방법2 (출제자의 의도. 높은 개연성. 실제 수험장에서 이 풀이를 떠올리셔야 합니다.)**

큰 원에 내접하는 작은 원의 반지름의 길이를 $r$이라고 합시다. 큰 원의 중심 $O$를 기준으로, 내접하는 원의 중심인 $O'$에 선을 긋는 것은 상당히 개연성높은 보조선긋기 과정입니다. 이후, 내접하는 원의 성질에 의해 $OO'$은 $1-r$이 됩니다. (잘 이해가 가질 않는다면, 2016학년도 6월 모의평가 29번 문항을 참조하십시오. 완벽히 똑같은 과정입니다.) 또한, $CO'$의 길이는 $2r$이 되고, 점 $O'$에서 점 $C$와 $O$를 지나는 직선에 내린 수선의 발을 $H$라고 할 때, $OH=r$이 됩니다. $CH=\sqrt{3}r$, $OH=\sqrt{3}r-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$이고, 직각삼각형 $OO'H$에 대하여 피타고라스정리를 이용하면 $r$이 쉽게 도출됩니다.

이 부분이 이해가 잘 가지 않는 분들은 **2016학년도 6월 모의평가 수학 B형 29번 문항**을 다시 풀어보십시오. 사실상 그 문항에서 상황을 다소 변형하여 그대로 응용한 문제입니다.

19번 : [개념을 알면 쉽게 풀린다]

말 그대롭니다. 개념을 알면 정말 쉽게 풀립니다. 표본평균이 $a$ 이하일 확률이 $0.8414$인데, 제시된 표에서 $Z$값이 $0$부터 시작하므로, $0.5$를 빼주어야 합니다. (통계문제 여태껏 공부 거의 안해온 사람은 뭔 말인지 알아듣지 못할겁니다. 공부하세요 공부.) 일단 당장 그래프만 봐도 $k$가 $1/2$임은 쉽게 알 수 있습니다. (확률밀도함수의 그래프는 정의역으로 주어진 전 구간 내에서 그 넓이가 1이 되어야 합니다.)

$z=1.0$일 때. 즉, $\dfrac{X-m}{\sigma/\sqrt{50}}=1.0$인 경우를 생각해보아야 합니다. (크기가 $50$인 표본을 추출하였으므로)

우리가 구해야 할 것은 평균$m$과 표준편차 $\sigma$로 확실해졌습니다. 연속확률변수에서의 평균과 표준편차를 우선 구해야겠죠. 다음과 같은 일련의 과정이 성립합니다. (크기가 $n$인 집단의 평균은 모집단의 평균과 동일)

평균 $m=\int_0^4 \frac{1}{8}x^2dx=\frac{8}{3}$

분산 $\sigma^2=\int_0^4 \frac{1}{8}x^3dx-\left(\frac{8}{3}\right)^2=\frac{8}{9}$

이제 이를 $\dfrac{X-m}{\sigma/\sqrt{50}}=1.0$에 적당히 대입해주면, ($\sigma$의 자리에 $\sigma^2$을 곧바로 대입하지 않게 조심하십시오.) 문제에서 구하고자 하는 $X$값을 쉽게 알 수 있습니다.

20번 : [어렵게 보였는데 알고보니 허당]

처음엔 이런 개수세기 형태의 문제에 조금 당황했는데, 천천히 뜯어보면 전혀 어려울 것이 없는 문제입니다.

$2^{f(x)}$는 $2^{\alpha}$로 대응시켰을 때, $\alpha$는 $0$이상의 정수입니다.
$g(x)$는 $\left(\frac{1}{2}\right)^{\beta}$로 대응시켰을 때, $\beta$는 $10$이하의 자연수입니다.

그리고 이를 주어진 식 (가)에 대입하면 $\left(\frac{1}{2}\right)^{\beta-\alpha} \le \left(\frac{1}{2}\right)^{n}$이 됩니다. 그 뒤로는 말 안해도 어떻게 풀지 잘 아실 것이라 믿습니다. $\alpha$, $\beta$, $n$ 조건들 다 주어져 있고, 부등식만 풀면 됩니다. 귀납적으로 원리를 파악해 보면, 구하고자 하는 값은 $\sum_{n=1}^{10}\frac{n(n+1)}{2}$이 되어, 총합 $220$이 된다는 것을 알 수 있습니다.

또 다른 방법은 없을까요? 출제자분께서 의도하신 풀이는 대략적으로 다음과 같다고 합니다.

부등식의 양 변을 $2^{f(x)}$로 나누고, $f(x)$를 $t$로 나타내고, $g(x)$를 $t$에 대한 종속변수로 생각하면, 왼쪽에는 $y=g(x)$가, 오른쪽에는 지수함수의 그래프가 나타납니다. 이 지수함수의 그래프는 $n$이 바뀔 때 마다 왼쪽으로 평행이동하게 됩니다. 그리고 이 때 조건 (나)를 만족하는 $g(x)$에 대하여, $x$의 개수를 찾아나가시면 될 것 같습니다. 전자의 풀이가 직관적인 풀이라면, 후자의 풀이는 독특하긴 하지만 상당히 깔끔한 풀이라고 생각합니다.

이런 형태의 지표와 가수 문항은 개수세기 문항과 연계되는 경우가 많고, 사람마다 접근법이 다양하겠지만 전 주로 귀납적으로 먼저 접근한 뒤 답을 도출하고, 30문항을 다 푼 후 검산과정에서 '왜 이러한 규칙이 나왔는지' 구체적으로 논증하는 방식으로 접근합니다. 수능은 빨리, 정확도높게 푸는 것이 제일 중요하니까요. 비슷한 느낌의 문제로, 2012학년도 6월 모의평가 수리 가형 30번 문제와, 2014학년도 대학수학능력시험 수학 B형 20번 문제를 제시해봅니다.

21번 : [미분의 향연]

문제가 기본적인 교과과정을 벗어나지 않으면서도 핵심을 깊게 파고드는 어려운 문항입니다. 대충 그래프 적당히 그리고 접선 그어가면서 극값의 개수를 헤아리는 '꼼수'같은 방법으로는 절대 풀리지 않습니다. 오히려 점차 난해하기만 할 뿐이구요. 문제에 대한 자문을 구하면서 '가장 힘들게 만든 문제'라는 답변을 받았는데, 정말 문제를 볼수록 심플하면서 핵심을 깊게 파고드는 우수한 문항이라고 생각됩니다.

먼저 풀이에 앞서, 이 문제는 여러분들의 **'도함수 추론'능력을 평가**하고자 만든 문항임을 알아둡시다. 이 문제가 잘 풀리지 않는다면 어떤 주어진 함수의 도함수와 여러 정보들을 통해서 '도함수가 어떻게 결정되어야만 하는지' 알아가는 능력이 부족한 것입니다. 접선 직직 그어보는 단순한 패턴화 과정으로는 쉽게 풀리지 않는 문항이기에, 이 문항을 통해서 해당 능력에 대한 숙련도를 높여보십시오.

$f(x)=(\ln x)^3-a(\ln x)^2\ (x>0)$ 을 미분하여 $g(x)=\dfrac{a^2}{e^a}x-a^2$를 도출합니다. 문제에서는 $g(0)$을 물어보았으니, 결국 우리가 구해야 할 것은 $-a^2$의 값이 되고, 결론적으로 $a$값을 물어보는 문항으로 간략화할 수 있습니다.

문제에서 묻고자 하는 것을 조금 더 살펴보면 다음과 같습니다.

$f(x)-g(x)=(\ln x)^3-a(\ln x)^2-\dfrac{a^2}{e^a}x-a^2$

그리고 이를 미분하면, $f'(x)-g'(x)=\dfrac{3(\ln x)^2}{x}-\dfrac{2a\ln x}{x}-\dfrac{a^2}{e^a}=f'(x)-f'(e^a)$ 가 됩니다.

일단, $x=1$, $x=\dfrac{1}{e^a}$에서 위 함수의 값을 비교한 후, 중간값 정리를 이용하여 근을 찾아봅시다. 일단, $a$가 문제에서 주어진 바와 같이 양수이므로 $\dfrac{1}{e^a}<1$이 성립합니다. 또한 $x=1$, $x=\dfrac{1}{e^a}$로 주어진 두 경우에 대하여 $f'(x)-g'(x)$의 값은 각각 음수, 양수이므로 중간값의 정리에 의해 구간 $\left[\dfrac{1}{e^a},\ 1\right]$사이에서 근이 하나 존재합니다. 즉, $f(x)-g(x)$의 극값이 필수적으로 $x<1$의 범위에서 하나 이상 존재함이 증명되었습니다. 이 해설은 가이드라인이기도 하고, 본 시험이 수능이라는 한계가 있기에 만약 지금이 실전 수능이었고, 시간이 넉넉한 상황이 아니라면 굳이 이 이상으로 이야기 할 필요가 있을 것 같진 않다고 판단해봅니다. 일단 하나 이상 존재한다는 것을 증명했는데, 문제에서 '하나만 존재한다'고 해줬으니 본 중간값의 정리는 이 문제의 상황에서는 '하나만 존재한다'는 것을 의미하는 것이겠지요. (물론, 굉장히 비논리적이고 위험한 이야깁니다. 수리논술에서는 절대 사용해서는 안될 논리전개입니다.) 실제로, $f'(x)-g'(x)$의 그래프를 직접 그려보시면 $x<1$의 범위에서 단 한번만 $x$축과 만난다는 것을 알 수 있습니다. 궁금하시면 직접 그려보시는 것이 좋습니다. 지금은 실제 수능이 아니라 연습에 불과하므로, **반드시 직접 그려보십시오.**

(보충설명 : $x=\dfrac{1}{e^a}$일 때, $f'(x)-g'(x)$의 값은 $a^2\left(5e^a-\dfrac{1}{e^a}\right)$가 되며, 이는 $0$보다 큰 값을 갖는다.)

우리가 궁극적으로 궁금해해야 할 것은 $f(x)-g(x)$의 극값이 오직 하나 뿐인 경우 즉, 위의 한 경우를 제외하고 나머지 모든 극값들은 '존재하지 않아야 하는 것'입니다. 이를 위해서는 일단 극값 후보들을 보아야

할 것이고, 그러기 위해서는 $f'(x)-g'(x)=\frac{3(\ln x)^2}{x}-\frac{2a\ln x}{x}-\frac{a^2}{e^a}=f'(x)-f'(e^a)$ 의 식에서 극값이 가능한 유일한 가능성인 $x=e^a$에 대해서 조사해볼 필요가 있습니다.

위에서 중간값의 정리로 증명한 바와 같이, 이미 $x<1$인 경우에서 극값이 하나 존재하기에, $x=e^a$인 지점에서는 $f'(x)-g'(x)=0$이 되더라도 극값이 되어서는 안 될 것입니다.

여기서 잠깐. 미분했을 때 $0$이 되었는데, 극값이 되지 않게 하는 방법이 있나요? $f(x)=x^3$이라는 삼차함수를 떠올려봅시다. 한 번 미분했을 때, $x=0$에서 $f'(x)$의 값이 $0$이 되기에 $x=0$에서 극값을 가지는 것처럼 보입니다. 하지만 한 번 더 미분해서 보면, $x=0$에서 변곡점을 가지게 된다는 것을 알 수 있죠. 이처럼, '단순히 그냥 극값일 줄 알았는데 한 번 더 미분해보니 변곡점이었더라'는 이야기를, 이 문제에도 적용시키겠다는 것입니다.

그런 방법을 쓰기 위해서, 도함수를 보다 구체적으로 추론해야겠죠. 한 번 더 미분을 해야 할 것입니다. 이계도함수를 구하면 다음과 같습니다.

$$f''(x)-g''(x)=\frac{2(a+3)\ln x-3(\ln x)^2-2a}{x^2}$$

여기서, $x$는 $0$이 아니기에, $f''(x)-g''(x)=\frac{2(a+3)\ln x-3(\ln x)^2-2a}{x^2}=0$ 의 양 변에 $x^2$을 곱해주어도 별 문제 없습니다. 즉, $2(a+3)\ln x-3(\ln x)^2-2a=0$이라는 식을 이끌어 낼 수 있다는 것입니다. 이때, $\ln x$를 $t$로 치환하고 $t$에 대한 함수를 그려보면, 거꾸로 뒤집힌 모양의 이차함수 형태가 그려지게 됩니다. 즉, 해당 점을 좌우로 $f''(x)-g''(x)$의 부호(양/음)또한 바뀌게 된다는 사실을 알아낸 것입니다. 결론적으로, $f(x)-g(x)$라는 함수의 변곡점이 두 곳에 형성됩니다. $\ln x=\frac{(a+3)\pm\sqrt{a^2+9}}{3}$의 두 곳에서 말이지요. (근의 공식을 사용하였습니다.)

원래는 극값을 가졌어야 할 바로 그 자리가, 변곡점이 되는 상황. 즉, $\ln x=a=\frac{(a+3)+\sqrt{a^2+9}}{3}$ 입니다. 이를 풀어내면 $a$의 값은 $0$또는 $4$가 됩니다. 문제에서, $a$는 양의 실수라고 하였으므로 $a=4$가 우리가 구해야 할 값입니다. 결론적으로, 문제에서 묻고자 하는 $g(0)=-a^2=-16$이 됩니다.

방금전 과정으로 돌아와서, $\ln x=a=\frac{(a+3)-\sqrt{a^2+9}}{3}$라고 생각하면 안될까요? 직접 풀어보시면 알게 됩니다. 푸시다보면 $-\sqrt{a^2+9}=2a-3$이 도출되고, 이를 제곱하면 $a=0$혹은 $a=4$의 값이 나오지만, $a=4$일 때에는 무연근이 됩니다. 즉, 가능한 $a$의 값은 $0$뿐인데, 문제에서 $a$는 양의 상수라 했으니 가능한 $a$의 값이 '존재하지 않는' 상태가 되어버리죠. 결국 선택의 여지 없이 $\ln x=a=\frac{(a+3)+\sqrt{a^2+9}}{3}$로 생각해야만 $a$의 값이 존재하게 되는 것입니다. 여태껏 풀어온 과정이 아직까지 모호하게 느껴질지도 모르겠습니다. 혹시 그런 분들을 위해, 조금 더 깊이 생각해봅시다.

$a$가 $\dfrac{(a+3)\pm\sqrt{a^2+9}}{3}$과 같다는 것이 무엇을 의미하는 것인지 조금 구체적으로 파고들어봅시다. 아시다시피, $\ln x=\dfrac{(a+3)+\sqrt{a^2+9}}{3}$일 때, $f(x)-g(x)$의 변곡점입니다. 그리고 이 점이 극값인 $x=e^a$와 동일시된다면, 결국 해당 점은 $y=x^3$처럼 '움찔'하다가 다시 갈 길 가는, '극값인 척 하는 변곡점'이 됩니다.
다시 정리합시다. $\ln x=\dfrac{(a+3)-\sqrt{a^2+9}}{3}$인 지점에 극값이 하나 생겨날 위기에 처했습니다. 문제에선 '오직 하나의 극값'만을 가져야 한다고 했는데, 이미 $x<1$인 점에 극값이 하나 생겨있음을 중간값의 정리로 증명했었습니다. 결국에는, 어쩔 수 없이 이 극값후보를 제거해주어야 하고, 그 과정의 일환으로 "변곡점=극값후보"라는 생각을 통해 이 극값 후보를 싹 지워버리는 것입니다.

결론적으로, $\ln x=\dfrac{(a+3)+\sqrt{a^2+9}}{3}$인 지점에서는 $x=e^a$와 동일시되었기에, 극값 아닌 변곡점이 형성되고, 결국 $f(x)-g(x)$는 극값을 하나밖에 가지지 않는 것입니다.

만약 그렇지 않다면? 즉, $a$가 $\ln x=\dfrac{(a+3)-\sqrt{a^2+9}}{3}$와 맞물리지 않는다면? $f'(x)-g'(x)$가 총 3지점에서 근이 생기게 되고, 극값이 총 3개 생기게 될 것입니다. 그리고 문제 조건에 위배되죠. 극값을 없애기 위해서는 선택의 여지가 없는 방법입니다.

굉장히 수리논술같은 문제였고, 복잡했지만 상당히 많은 내용이 함축되어 있었습니다. 이해가 잘 가질 않는다면 천천히 $f'(x)-g'(x)$의 그래프 개형을 그리는 것부터 시작해보십시오. 천천히 풀어나가다보면 금방 이해하실 수 있을 것입니다.

22번 : 주어진 식을 직접 적분하면 $[-3\cos x+4\sin x]_0^{\pi}$ 이므로, 계산하면 답은 $6$입니다.

23번 : 항상 하시던대로 양변 제곱하고 인수분해 하면 $x=5,\ x=9$를 도출해낼 수 있습니다. 그리고 무연근인 $x=9$를 제거해주시면, 답은 $5$입니다.

24번 : 좌표계를 그리고, 구의 중심을 찍어보시면 쉽게 이해하실 수 있을 것입니다. 일단, 주어진 문제에서 $a$와 $b$는 같은 값을 가질 수 밖에 없으므로 $a=b$입니다. 또한, 구의 중심에서 $x$축까지의 거리를 직접 구해보면 $\sqrt{a^2+1}$이고, 이는 구가 $x$축에 접한다 했으므로 구의 반지름의 값인 $\sqrt{8}$과 동일합니다. 따라서 $a^2$의 값은 $7$이고, $a=b$이므로 $a^2+b^2=14$입니다.

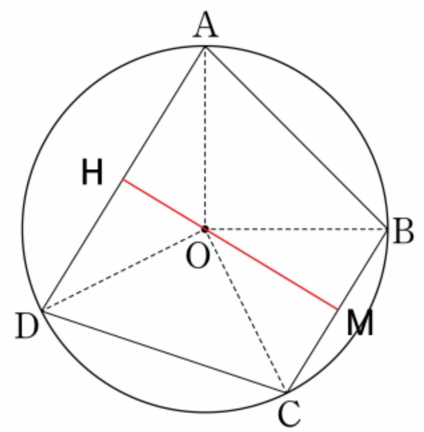
25번 : 이 문제 역시 항상 하시던대로 푸십시오. 문제에서 주어진 공급전압 $330\,V$와 해당 조건들을 수식에 입력하면 $a^{-5}=\dfrac{1}{2}$가 됩니다. 그리고 이를 이용하여 공급전압 $440\,V$의 해당 조건들을 수식에 입력하여 계산하면, 기대수명 $x=9$가 됩니다.

26번 : 총 두 가지 풀이를 소개합니다.

**풀이방법 1 (낮은 개연성, 높은 발상력, 실제 활용가능성 낮음)**

약간 기하학적 센스가 필요한 풀이입니다. 실제로 이 풀이를 여러분들이 수능장에서 떠올릴 기대가능성은 낮을 것 같습니다. 시점분해는 이 문제의 출제의도가 아닌 것 같습니다.

주어진 벡터식을 잘 해석하셨다면 각 $DOC$와 각 $AOB$가 직각이며, 두 번째 식을 모두 성분분해하여 다시 합쳐보면 $BC$의 길이와 $AD$의 길이 합쳐서 $8$이 된다는 사실을 함축하고 있음을 알 수 있습니다. (선분 $AD$와 선분 $BC$가 평행하여 같은 방향이라는 것에 주목하십시오. 조금만 자세히 들여다보시면 아시겠지만, 사각형 $ABCD$는 등변사다리꼴입니다.)




왼쪽 그림처럼, HM을 작도하면 직각삼각형 $4$개가 새로 생겨난 것을 볼 수 있습니다. 이 때 새로 생겨난 이 4개의 직각삼각형은 모두 합동입니다. (각$OAH$ 와 크기가 동일한 모든 각을 $\theta$로 두고 직접 각을 찾아가보십시오. 각 빗변들은 모두 반지름으로 동일합니다.) 이제 감이 잡히십니까? $AD$의 길이를 $8-2a$, $BC$의 길이를 $2a$라 했을 때, $OH$의 길이는 $a$가 되고, $OM$의 길이는 $4-a$가 됩니다. 따라서 $HM$의 길이는 $4$가 되고, 등변사다리꼴의 아랫변, 윗변, 높이를 모두 알게 되었으니 넓이를 구할 수 있습니다.

**풀이방법 2 (높은 개연성, 문제의 출제의도 반영, 가장 자연스럽게 떠올라야 할 풀이)**

사실 위의 풀이는 굉장히 발상적입니다. 그렇다면, 출제자분께서는 무엇을 의도하시고 문제를 낸 것일까요. 출제자님께 경배하며 여쭤본 결과 저에게 현명한 답안을 알려주시니, '굳이 성분분해를 하지 않아도 되느니라'라 답하시더라. ~~아닙니다~~

"단순하게 그냥 시점을 일치시키고 각을 보면 풀린다"는 답변을 받았습니다. 일단, $AC$와 $BD$를 작도했을 때, 두 선분이 직교한다는 사실은 이미 알고 있는 사실입니다. (위 방법에서 보았듯이 그대로 하시면 됩니다.) $|\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}|=8$이고, 각각이 직각을 이루니 $AC$와 $BD$의 길이는 $4\sqrt{2}$가 됩니다. 그리고 임의의 사각형에 대하여 두 대각선이 직각이므로 넓이는 $\frac{1}{2}\times 4\sqrt{2}\times 4\sqrt{2}=16$ 입니다.

첫 번째 풀이가 약간 발상적이었다면, 두 번째 풀이는 거의 완벽하게 교과서에 입각한 풀이였다고 평가해봅니다. 아마 두 번째 방법으로 푼 사람들이 더욱 많을 것이라 예상해봅니다. 첫 번째 풀이로 이 문제를 푸신 분들은, 두 번째 풀이를 꼭 다시 학습해보셨으면 좋겠습니다.

**27번** : 문제를 요리보고 조리보고 막 뜯어보세요. $(z,\ w)$의 순서쌍과 $(x,\ y)$의 순서쌍이 서로 독립적으로 행동한다는 사실을 알 수 있습니다. (가)식과 (나)식을 비교하시면 금방 아실 수 있을 겁니다.

$(z,\ w)$의 가능한 순서쌍을 생각해봅시다. $z$와 $w$가 둘 중 하나가 $-2$인 경우는 $-2$로 고정된 한 숫자를 제외한 나머지 $3$개의 변수가 $8$을 나눠가지는 구도고, $z$와 $w$가 각각 $-1$이라면 $x$와 $y$라는 변수 두 개가, 총 $8$이라는 숫자를 나눠가지는 구도입니다. 따라서, $2\times{}_3H_8+{}_2H_8=99$가 정답입니다.

절댓값이 있다고 해서 긴장하지 마세요. 어느 변수가, 어떤 영향을 받아서 어떻게 변하는지 파악한다면 크게 어려울 것이 없습니다.

**28번** : 문제의 도형을 자세히 보면, 주어진 각이 하나고, 삼각형 두 개가 원 안에 내접해있는 구도입니다. 사인법칙을 사용하면 보다 더 쉽게 풀릴 것 같습니다. 원주각 성질을 통해서 각$OQA$가 $45$도라는 사실을 알 수 있고, 사인법칙을 이용하면 선분 $QA$의 길이를 $\sqrt{2}\sin\theta$로 나타낼 수 있습니다. 삼각형 $OQA$에서 각 $A$를 $\theta$에 대한 관계식으로 나타낼 수 있으므로, 삼각형 $OQA$에서 사인법칙을 다시 적용하면, 선분 $OQ$의 길이를 구할 수 있고, $OP$의 길이가 반지름인 $1$이므로, $PQ$의 길이는 정리하면 $\cos\theta+\sin\theta-1$이 됩니다. 그리고, 이를 문제에 주어진 식에 대입하여 정리하면 정답이 도출됩니다.

과거 수능에도 비슷한 느낌의 문제가 출제된 적이 있었습니다. 2009학년도 대학수학능력시험 수리가형 30번 문항을 참고하시기 바랍니다. 사인법칙과 코사인법칙 둘 다 적용하여 푸는 것이 가능합니다만, 풀이과정 차이가 다소 나는 편입니다. 풀이과정이 만연해지고 복잡해질수록 실수할 확률은 훨씬 높아지고 시간도 부족해지므로, 과거 기출문제에서 비롯되어 패턴화된 문항의 풀이과정은 최대한 단축시키는 것이 좋을 것입니다.

추가적으로 설명드리겠습니다. 임의의 삼각형 $ABC$를 생각해봅시다. (한 각에 마주보는 변의 길이는, 마주보는 각을 나타내는 기호의 소문자를 사용하여 나타내는 것이 이미 고착화된 관례입니다. 꿀팁.)

**1) 사인법칙** : 마주보는 변과 각을 알 때(빈출도 매우 높음), $a:b=\sin A:\sin B$의 비례식을 유도할 수 있을 때, 외접원의 반지름에 대한 문제가 출제되었을 때. 총 3가지 경우에 대하여 자주 활용된다.

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R\ \left(R\ :\ \text{외접원의 반지름}\right)$$

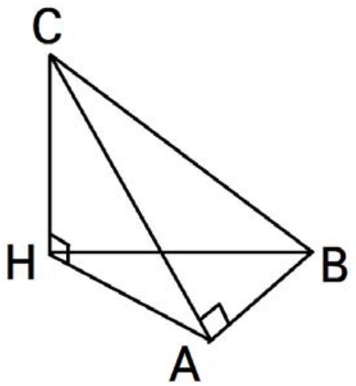
**2) 코사인법칙** : 코사인 제 1법칙보다 코사인 제 2법칙을 많이 사용한다. 특히 공간도형 문제에서 정사영 각도를 구해야 할 때 사용된다. 두 변과 끼인각을 알 때, 세 변의 길이를 알 때. 총 2가지 경우에 대하여 자주 활용된다. 세 변의 길이를 알 때에는 헤론의 공식을 적용하는 경우도 있지만, 헤론의 공식은 전혀 암기할 필요도, 알아둘 필요도 없으므로 여기에는 서술하지 않겠다.

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$$

29. [아아, 그는 좋은 이면각이었습니다]

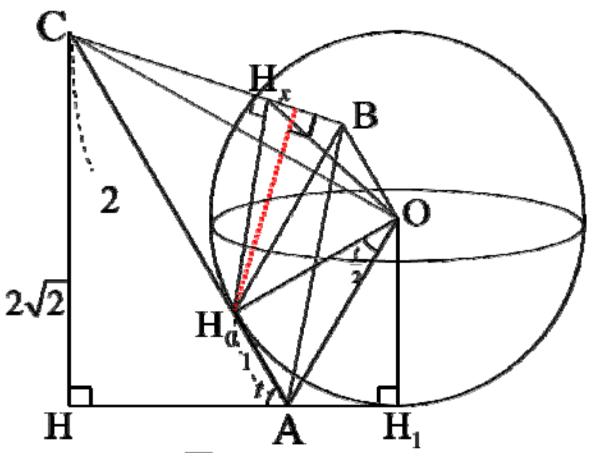
그림 각도가 약간 불편하게 되어있습니다. 조심해서 풀어야 합니다.

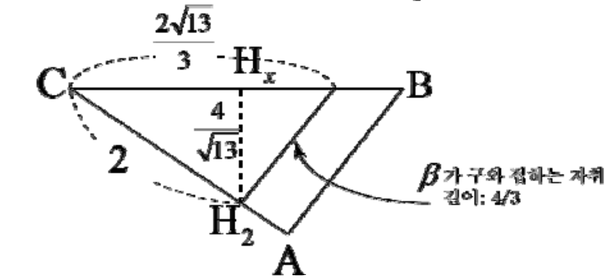
일단 이 상황에서 '이동가능한 요소'를 찾아보죠. 삼각형 ABC, 평면 $\alpha$등은 모두 고정되어 있습니다. 하지만, 문제에 주어진 구는 두 평면에 접한 상태로 이동하게 됩니다. 그 구가 이동하면서 삼각형 OBC를 삼각형 ABC에 정사영한 넓이가 달라지게 되는 것 또한 알 수 있습니다.




삼각형 ABC를 포함하는 평면을 $\beta$라고 해보죠. 구가 $\alpha$와 $\beta$에 동시에 접한 채로 이동합니다. 구와 평면 $\beta$의 접점의 자취는, 선분 AB와 평행하게 그어집니다. 이제 대략적인 전개는 잡혔습니다. 구도를 어떻게 잡고, 어떻게 도형을 그려내느냐, 그 문제만이 남았습니다.

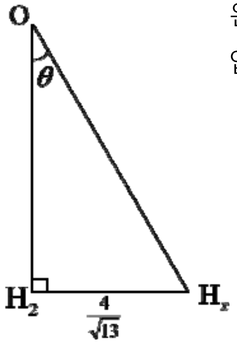
대략적인 풀이의 형태는 아래와 같습니다. (그림만 보시면 상당히 모호할수도 있는데, 직접 하나하나 따라 그려가시면서 푸시면 훨씬 도움되실겁니다.)




삼각형 $CHA$를 정면에 두고 그림을 다시 그리면 왼쪽 그림과 같은 구도가 됩니다. 그림에 표기된 것처럼 각 $CAH$를 $t$라고 했을 때, 각 $H_2AH_1$은 $\pi-t$가 되고, $AOH_1 = AOH_2 = \frac{t}{2}$가 된다는 사실을 알 수 있습니다. 이미 우리는 $CA$와 $CH$의 길이를 알고 있으므로, 이를 이용하여 각 $CAH$에 대한 삼각함수들을 이끌어낼 수 있습니다. 자연스럽게, 반각공식을 활용하면 각 $\frac{t}{2}$에 대한 삼각함수들도 이끌어 낼 수 있고, 이를 이용하여 $H_2A$의 길이가 1이라는 사실 또한 알아낼 수 있습니다. 그 뒤에는 이제 공간지각력의 문제입니다.

이제는, 삼각형 $OBC$와 삼각형 $ABC$의 이면각을 구해야합니다. 선분 $BC$에 수직이면서, 하나는 $O$를 지나고 하나는 $H_2$를 지나는 선분을 각각 작도합니다. 이 때 $BC$에 수직인 점을 $H_x$라고 정의합시다. 삼각형 ABC를 기준으로 떼어보면 아래와 같습니다. $H_xH_2$의 길이를 구하는 과정은 다들 알 것이라 생각합니다. (직각삼각형의 넓이는 빗변을 제외한 나머지 두 변의 곱이기도 하며, 빗변을 마주보는 한 점에서 빗변에 수직인 선분과 빗변의 곱이기도 하다는 사실을 이용합니다.) $H_xH_2$는 $\frac{4}{\sqrt{13}}$입니다. 이제, 이면각을 구해야 할 차례입니다. 삼각형 $OH_2H_x$를 기준으로 새로운 그림을 그려봅시다.




왼쪽에 그려진 그림과 같이, 각 $H_2$는 직각이며, 각 변의 길이가 사실상 모두 나온 상태입니다. 이제 여기서 $\tan\theta$를 구하셔서, 문제에서 묻는 식에 대입하면 답이 도출됩니다.

30. [탈패턴화의 정석]

일단 문제에서 구하고자 하는 것이 무엇인지 살펴봅시다. 자세히 보았더니 굉장히 치환하고싶게 생겼군요.
$\int_{\frac{1}{2}}^{1} g\left(\frac{1}{x}\right)dx = \int_{1}^{2} \frac{g(x)}{x^2}dx$로 치환해줍시다.

그리고, 0부터 $x$까지 $f(t)$의 적분값을 $F(x)$라고 두면, 다음의 일련의 과정이 성립합니다.

$$\int_{1}^{2} \frac{g(x)}{x^2}dx = \int_{1}^{2}\left\{\frac{f(x)}{x} - \frac{F(x)}{x^2}\right\}dx = \left[\frac{F(x)}{x}\right]_1^2 = \frac{F(2)}{2} - F(1)$$

즉, 우리는 $F(1)$과 $F(2)$의 값을 문제에서 주어진 조건들을 통하여 도출해내어야 합니다.
일단 함수 $\frac{\{f(x)\}^2}{g(x)}$의 극값에 대하여 논의해두었으니 $x=1$, $x=2$에서 각각 $\frac{\{f(x)\}^2}{g(x)}$의 값이 0이 되어야 하므로, 미분 후 그 값을 0으로 두면 다음과 같은 일련의 과정들이 성립합니다.

$$\frac{d}{dx}\frac{\{f(x)\}^2}{g(x)} = \frac{2f(x)f'(x)g(x) - g'(x)\{f(x)\}^2}{\{g(x)\}^2} = 0$$
$$\therefore 2f(x)f'(x)g(x) - g'(x)\{f(x)\}^2 = 0$$

우리는 지금, $F(1)$과 $F(2)$를 구하려고 합니다. 즉, $x=1$, $x=2$인 두 점에서만 관심이 있다는 말입니다. 해당 두 점에서 $\frac{\{f(x)\}^2}{g(x)}$의 값이 각각 1, 4입니다. 즉, $\frac{\{f(x)\}^2}{g(x)}$의 값이 0이 되지 않으므로 $f(x)$또한 0의 값을 가지지 않는다는 것이지요. $2f(x)f'(x)g(x) - g'(x)\{f(x)\}^2 = 0$의 식에서 $f(x)$를 제거할 수 있게 된 것입니다. 또한, $f'(x)$가 0보다 크다는 사실 즉, 0이 될 수 없다는 사실 또한 문제에서 주어져 있습니다. $f'(x)$와 $f(x)$를 제거하고, $g(x)$와 $g'(x)$를 대입해보죠.

$g(x) = xf(x) - F(x)$이고, $g'(x) = xf'(x)$이므로, 대입하여 정리하면 다음 일련의 과정이 성립합니다.

$$2f(x)f'(x)g(x) - g'(x)\{f(x)\}^2 = 0$$
$$\Leftrightarrow 2f'(x)\{xf(x) - F(x)\} - xf'(x)f(x) = 0$$
$$\Leftrightarrow xf(x) - 2F(x) = 0$$
$$\Leftrightarrow xf(x) = 2F(x)$$

즉, 위와 같은 관계식이 $x=1$, $x=2$인 상황에서 성립하게 됩니다. 위의 관계식을 $\dfrac{\{f(x)\}^2}{g(x)}$에 대입하여 정리하면 다음과 같은 일련의 과정이 성립합니다.

$$\frac{\{f(x)\}^2}{g(x)}=\frac{\{f(x)\}^2}{xf(x)-F(x)}=\frac{\left\{\dfrac{2F(x)}{x}\right\}^2}{F(x)}=\frac{4F(x)}{x^2}$$

그리고, 위의 식은 $x=1$일 때 그 값이 $1$이고, $x=2$일 때 그 값이 $4$이므로 각각 $x=1$, $x=2$를 대입해주면 $F(1)=\dfrac{1}{4}$, $F(2)=4$를 도출해낼 수 있으며, 위의 과정에서 보였던 것과 같이 우리가 구하고자 하는 준 식은 $\displaystyle\int_1^2 \frac{g(x)}{x^2}dx=\left[\frac{F(x)}{x}\right]_1^2=\frac{F(2)}{2}-F(1)$ 의 형태로 나타내어지므로 $k=\dfrac{7}{4}$가 됩니다. 따라서, 구하고자 하는 값인 $60k$는 $105$가 됩니다.

어떤 특정한 교과개념에 매달리는 문제가 아니라, 기존에 수능에 출제되던 패턴 자체를 탈피하여 제작된 문항이라 생각됩니다. 2015학년도 9월 수학B형 30번 문항이 생각나는 문제네요.

이렇게 해설이 끝났습니다.

긴 시간동안 모의고사 푸시고 오답체크도 하시고, 해설도 참고하시고 공부하시느라 고생하셨습니다.
올해 수능, 좋은 결과 있길 진심으로 바랍니다. 감사합니다.

**문항 개발 및 구성**
문호진 이덕영

**해설 작성**
솔로깡

**검토에 도움을 주신 분들**
구성진 곽호연 김병주 김상천 김희진 남정한 봉강민 손현석 이영재 임지수 최지욱

**시험 시행**
2015년 10월 25일

**오프라인 시험 주관**
붐스코어(bombscore.com)

**장소 협조**
가온길학원(서울시 서대문구)
시대인재학원(서울시 강남구)