제 2 교시

수학 영역

5지선다형

1. $\sqrt[3]{54}\times 2^{\frac{5}{3}}$ 의 값은? [2점]

① 4 ② 6 ③ 8 ④ 10 ⑤ 12

$3\times 2^{\frac{1}{3}+\frac{5}{3}} \Rightarrow 3\times 4$

⑤

2. 함수 $f(x)=x^3-3x^2+x$ 에 대하여 $\lim_{h\to 0}\frac{f(3+h)-f(3)}{2h}$ 의 값은? [2점]

① 1 ② 3 ③ 5 ④ 7 ⑤ 9

$\rightarrow \frac{1}{2}f'(3)$

$f'(x)=3x^2-6x+1$

$f'(3)=10$

③

3. $\cos\theta>0$ 이고 $\sin\theta+\cos\theta\tan\theta=-1$ 일 때, $\tan\theta$ 의 값은? [3점]

$\rightarrow$ 1, 4

① $-\sqrt{3}$ ② $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ ③ $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ④ 1 ⑤ $\sqrt{3}$

$\sin\theta=-\frac{1}{2}$ (4)

② $\cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$

4. 함수

$$f(x)=\begin{cases} 2x+a & (x<3) \\ \sqrt{x+1}-a & (x\ge 3)\end{cases}$$

이 $x=3$에서 연속일 때, 상수 a의 값은? [3점]

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

① $6+a=2-a$ $a=-2$

5. 다항함수 $f(x)$가

$$f'(x)=x(3x+2),\quad f(1)=6$$

을 만족시킬 때, $f(0)$의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$f(x)=x^3+x^2+4$ $c=4$

$f(0)=4$

6. 공비가 1보다 큰 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자.

$$\frac{S_4}{S_2}=5,\quad a_5=48$$

일 때, a_1+a_4의 값은? [3점]

① 39 ② 36 ③ 33 ④ 30 ⑤ 27

$$\frac{\frac{a(r^4-1)}{r-1}}{\frac{a(r^2-1)}{r-1}}=\frac{r^2+1}{1}=5$$

5

$r=2$

$a_4=24$

$a_1=3$

7. 함수 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-2x^2-5x+1$이 닫힌구간 $[a, b]$에서 감소할 때, $b-a$의 최댓값은? (단, a, b는 $a<b$인 실수이다.) [3점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

x^2-4x-5 $(x-5)(x+1)$

$+$ $+$

-1 $-$ 5

1

6

$a=-1$ $b=5$

8. 두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여

$$(x+1)f(x)+(1-x)g(x)=x^3+9x+1,\quad f(0)=4$$

일 때, $f'(0)+g'(0)$의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$x=0$ 대입 $4+g(0)=1$ $g(0)=-3$

$(x+1)f'(x)+f(x)-g(x)+(1-x)g'(x)$

$=3x^2+9$ ②

$f(0)+4+3+g'(0)=9$

9. 좌표평면 위의 두 점 $(0, 0)$, $(\log_2 9, k)$를 지나는 직선이 직선 $(\log_4 3)x+(\log_9 8)y-2=0$에 수직일 때, 3^k의 값은? (단, k는 상수이다.) [4점]

① 16 ② 32 ③ 64 ④ 128 ⑤ 256

$$\frac{-\log_4 3}{\log_9 8}\times\frac{k}{\log_2 9}=-1$$

$$\hookrightarrow \frac{+\frac{1}{2}\log_2 3}{\frac{3}{2}\log_3 2}\times\frac{k}{2\log_2 3}=1 \quad ③$$

$\frac{1}{6}\times k\times\log_2 3=1$

$k=\frac{6}{\log_2 3}\rightarrow\frac{\log_2 64}{\log_2 3}\rightarrow\log_3 64$

10. 시각 $t=0$일 때 동시에 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시각 $t\,(t\geq 0)$에서의 속도가 각각

$$v_1(t)=3t^2-6t-2,\quad v_2(t)=-2t+6$$

이다. 출발한 시각부터 두 점 P, Q가 다시 만날 때까지 점 Q가 움직인 거리는? [4점]

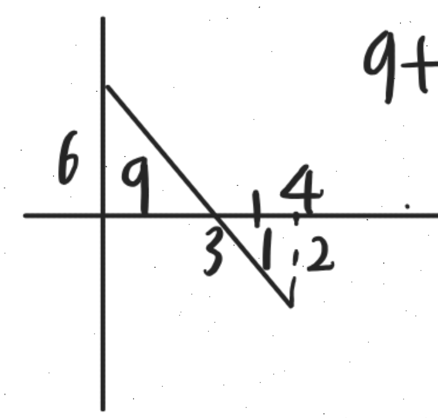
① 7 ② 8 ③ 9 ④ 10 ⑤ 11

t^3-3t^2-2t $-t^2+6t$

t^3-2t^2-8t ④

$t(t-4)(t+2)$

$9+1=10$



11. 공차가 음의 정수인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$a_6=-2,\quad \sum_{k=1}^{8}|a_k|=\sum_{k=1}^{8}a_k+42$$

일 때, $\sum_{k=1}^{8}a_k$의 값은? [4점]

① 40 ② 44 ③ 48 ④ 52 ⑤ 56

$\sum_{k=1}^{8} |a_k|-a_k=42$

$a_k \ge 0$ 0

$a_k<0$ $-2a_k$

a_k K: 1~8중 음수인 합: -21

$a_6=-2$ 공차음의정수이므로 모든합 정수

a_5 a_6 a_7 a_8

-2 -7

678 합이 최소한 -21여야 하므로

a_5: -1이면 -21 안나와서

$a_6+a_7+a_8=-21$

$a_7=-7$ $d=-5$

$a_1=23$

a_1: 23

$\frac{11}{2}\times 8=44$

a_8: -12

$3x^2-9x$

x^2-3x

12. 실수 a에 대하여 함수 $f(x)$는

$$f(x)=\begin{cases}3x^2+3x+a & (x<0)\\ 3x+a & (x\ge 0)\end{cases}$$

이다. 함수

$$g(x)=\int_{-4}^{x}f(t)\,dt$$

가 $x=2$에서 극솟값을 가질 때, 함수 $g(x)$의 극댓값은? [4점]

$g(-2)$

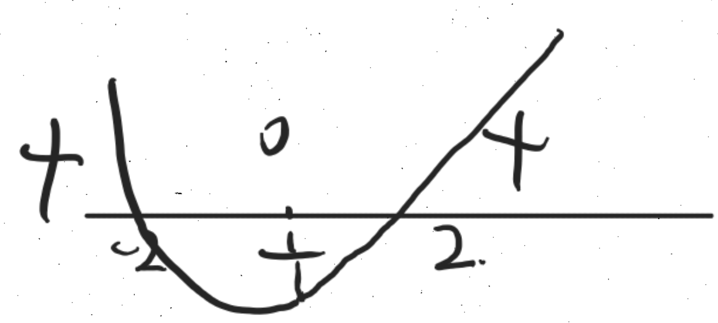
① 18 ② 20 ③ 22 ④ 24 ⑤ 26

$f(2)=0$ $a=-6$ ⑤

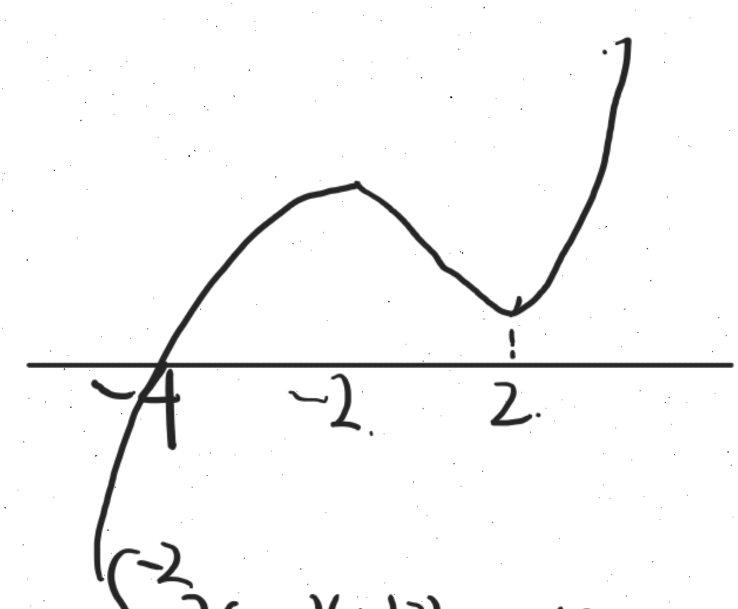
$3(x+1)(x+2)$ $(x<0)$

$3(x-2)$ $(x\ge 0)$

$g(-2)$



$g(x)$



$\int_{-4}^{-2} 3(x+1)(x+2)$ +8 +18

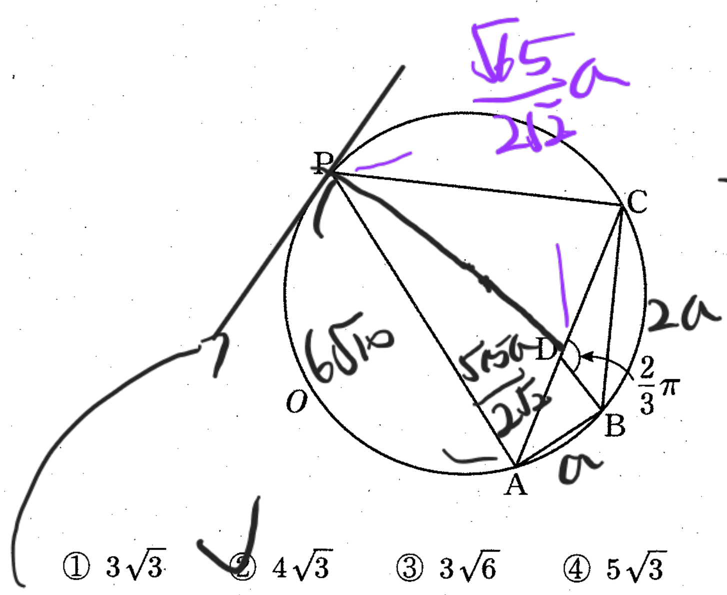
$\int_{-2}^{0} 3x(x-3) \to \left[x^3-\frac{9}{2}x^2\right]_{-2}^{0}$

$4\sqrt{10}$

13. 그림과 같이

$$2\overline{AB}=\overline{BC},\quad \cos(\angle ABC)=-\frac{5}{8}$$

인 삼각형 ABC의 외접원을 O라 하자. 원 O 위의 점 P에 대하여 삼각형 PAC의 넓이가 최대가 되도록 하는 점 P를 Q라 할 때, $\overline{QA}=6\sqrt{10}$이다. 선분 AC 위의 점 D에 대하여 $\angle CDB=\frac{2}{3}\pi$일 때, 삼각형 CDB의 외접원의 반지름의 길이는? [4점]



① $3\sqrt{3}$ ② $4\sqrt{3}$ ③ $3\sqrt{6}$ ④ $5\sqrt{3}$ ⑤ $4\sqrt{6}$

$\frac{12}{\sin 60}=2R$

$\frac{12}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=2R$

$R=4\sqrt{3}$

AC와 평행함

②

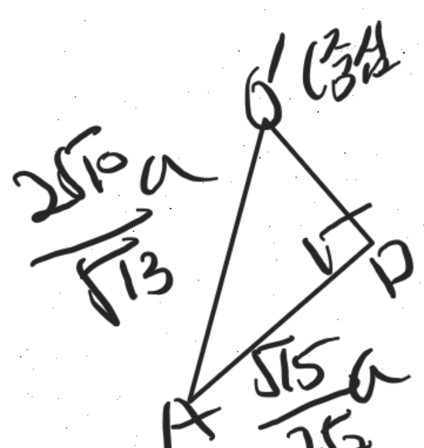
$-\frac{5}{8}=\frac{5a^2-\overline{AC}^2}{4a^2}$ $\quad 10a^2-2\overline{AC}^2=5$

$\overline{AC}=\sqrt{\frac{15}{2}}a$

$\frac{\frac{\sqrt{15}}{\sqrt{2}}a}{\frac{\sqrt{39}}{8}}=2R$

$\frac{8\sqrt{15}}{2\sqrt{2}\times\sqrt{39}}a=R$

$\frac{2\sqrt{10}}{\sqrt{13}}a=R$



$\frac{40}{13}a^2=\frac{15}{8}a^2+\overline{O'P}^2$

$\frac{320-195}{104}a^2=\frac{125}{104}a^2=\overline{O'P}^2$

14. 두 정수 a, b에 대하여 함수 $f(x)$는

$$f(x)=\begin{cases} x^2-2ax+\dfrac{a^2}{4}+b^2 & (x\le 0)\\ x^3-3x^2+5 & (x>0)\end{cases}$$

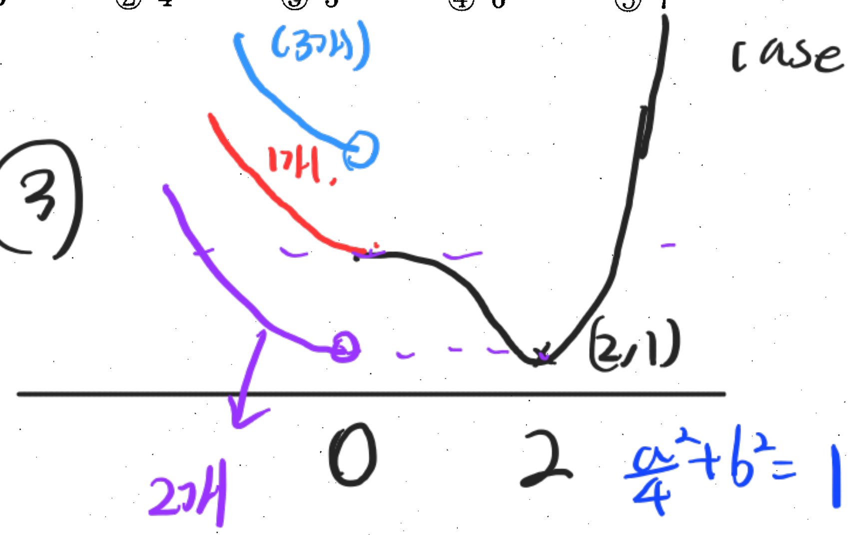
$3x^2-6x$

이다. 실수 t에 대하여 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=t$가 만나는 점의 개수를 $g(t)$라 하자. 함수 $g(t)$가 $t=k$에서 불연속인 실수 k의 개수가 2가 되도록 하는 두 정수 a, b의 모든 순서쌍 (a, b)의 개수는? [4점]

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

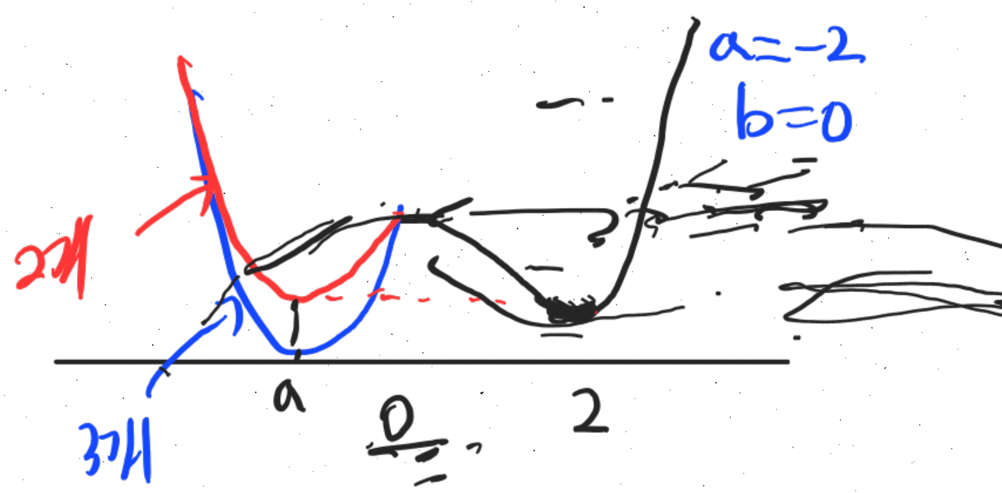
case

③



$\frac{a^2}{4}+b^2=1$

$a=-2$
$b=0$



즉 $a<0$ $\quad \frac{a^2}{4}+b^2=5$

$a=-2 \quad b=\pm 2$

$a=-4 \quad b=\pm 1$

$\left(\frac{\sqrt{65}}{2\sqrt{2}}a\right)^2+\left(\frac{\sqrt{15}}{2\sqrt{2}}a\right)^2=(6\sqrt{10})^2$

$\frac{80}{8}a^2=360$

$a=6$

$\frac{5\sqrt{5}}{2\sqrt{26}}a+\frac{8\sqrt{5}}{2\sqrt{26}}a=\overline{PD}$

15. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases} a_n & (a_n > n) \\ 3n-2-a_n & (a_n \le n) \end{cases}$$

을 만족시킬 때, $a_5=5$가 되도록 하는 모든 a_1의 값의 곱은? [4점]

① 20 ② 30 ③ 40 ④ 50 ⑤ 60

case1) 5 5 5 5 5 ③

case2) □ 5 5 5 5 $1-a_1=5$

$a_1=-4$ (o,k)

case3) □□ 5 5 5 $4-a_2=5$ $a_2=-1$(o)

-1

$1-a_1=-1$ $a_1=2$(X)

case4) □□□ 5 5 $7-a_3=5$ $a_3=2$(o)

2 > 2 2

-1

$a_2=2$.

$4-a_2=2$

$1-a_1=2$.

case5) □□□□ 5 $10-a_4=5$

↳ 1,2,3,4와 유사 (중복)

2X-1X5X-4= 40

단답형

16. 방정식 $4^x=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-9}$을 만족시키는 실수 x의 값을 구하시오. [3점]

$2^{2x}=2^{-x+9}$

$x=3$

17. $\int_0^2 (3x^2-2x+3)\,dx-\int_2^0 (2x+1)\,dx$의 값을 구하시오. [3점]

$\int_0^2 (3x^2-2x+3)+\int_0^2 (2x+1)$

$=\int_0^2 (3x^2+4)$

↳ $[x^3+4x]_0^2$

16

ㄱ 2019 나 30 유사

18. 수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$\sum_{k=1}^{10} a_k + \sum_{k=1}^{9} a_k = 137,\ \sum_{k=1}^{10} a_k - \sum_{k=1}^{9} 2a_k = 101$$

일 때, a_{10}의 값을 구하시오. [3점]

$3\sum_{k=1}^{9} a_k = 36$ $\quad \sum_{k=1}^{9} a_k = 12$

$\sum_{k=1}^{10} a_k = 125$

$125 - 12 = a_{10}$

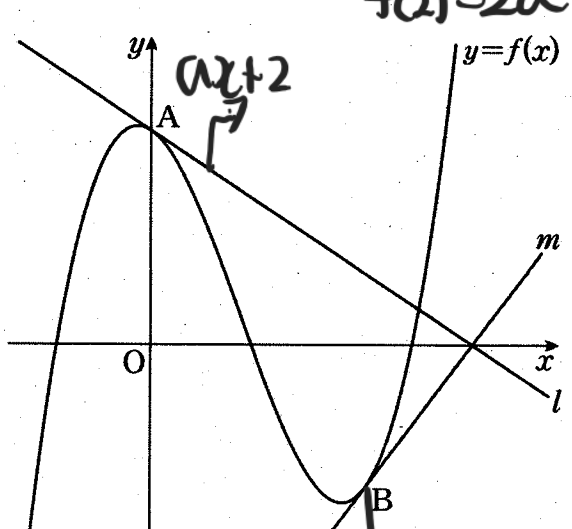
113

f'

$3x^2 - 5x + a$

19. 실수 a에 대하여 함수 $f(x) = x^3 - \frac{5}{2}x^2 + ax + 2$이다. 곡선 $y = f(x)$ 위의 두 점 A$(0, 2)$, B$(2, f(2))$에서의 접선을 각각 l, m이라 하자. 두 직선 l, m이 만나는 점이 x축 위에 있을 때, $60 \times |f(2)|$의 값을 구하시오. [3점]

$f(2) = 2a$



$ax + 2$

$(a+2)(x-2) + f(2)$

$-\frac{2}{a} = 2 + \frac{-f(2)}{a+2}$

$-\frac{2}{a} = 2 + \frac{-2a}{a+2} = \frac{4}{a+2}$

$-2a - 4 = 4a$ $\quad \frac{4}{3} \times 60$

$a = -\frac{2}{3}$

$\boxed{80}$

20. 두 함수 $f(x) = 2x^2 + 2x - 1$, $g(x) = \cos\frac{\pi}{3}x$에 대하여 $0 \le x < 12$에서 방정식

$$f(g(x)) = g(x)$$

를 만족시키는 모든 실수 x의 값의 합을 구하시오. [4점]

$f(g(x)) - g(x) = 0$

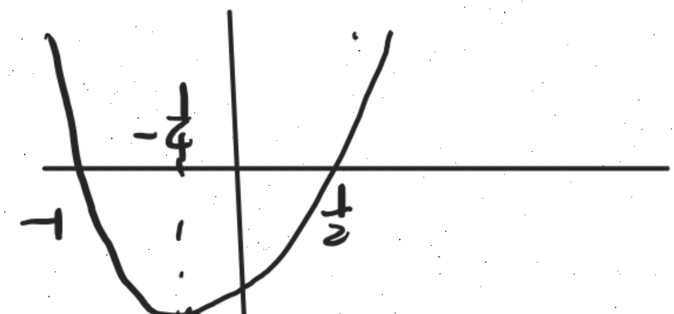
$g(x) = X$

$(f(x) - x) \circ g(x) = 0$

$(2x^2 + x - 1) \circ g(x) = 0$

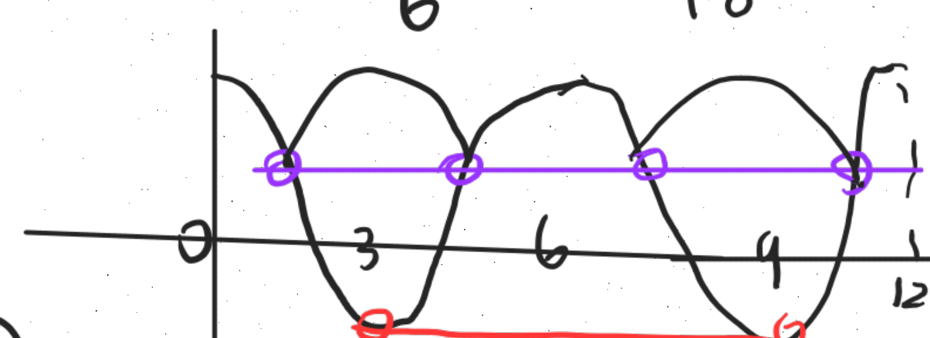
$2 \quad -1$

$1 \quad 1$



$g(x) = -1$ 아 $\frac{1}{2}$이면 된다.

6 $\quad$ 18



36

$3 + 9 + 6 + 18$

$= 36$

$-t^3+3t-8 = t^3+12t^2+6t+8$
$-3t-6+8$
$2t^3+12t^2+24$
t^3+6t^2+12

$y=x+2$ 대칭관계에

$\rightarrow 3x^2-3$

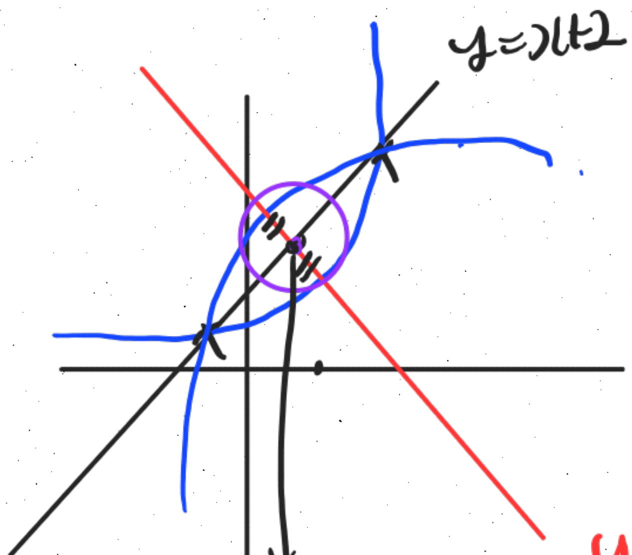
21. $a>2$인 실수 a에 대하여 기울기가 -1인 직선이 두 곡선

$$y=a^x+2,\quad y=\log_a x+2$$

와 만나는 점을 각각 A, B라 하자. 선분 AB를 지름으로 하는 원의 중심의 y좌표가 $\frac{19}{2}$이고 넓이가 $\frac{121}{2}\pi$일 때, a^2의 값을 구하시오. [4점]

$\rightarrow r=\frac{11}{\sqrt{2}}$

$y=x+2$



$y=-x+k$

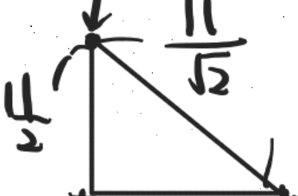
$k=17$

$\left(\frac{15}{2}, \frac{19}{2}\right)$

$\frac{15}{2}, \frac{19}{2}$

$\frac{11}{\sqrt{2}}$

$\frac{11}{2}$



$\frac{11}{2}$

$(13, 4)$

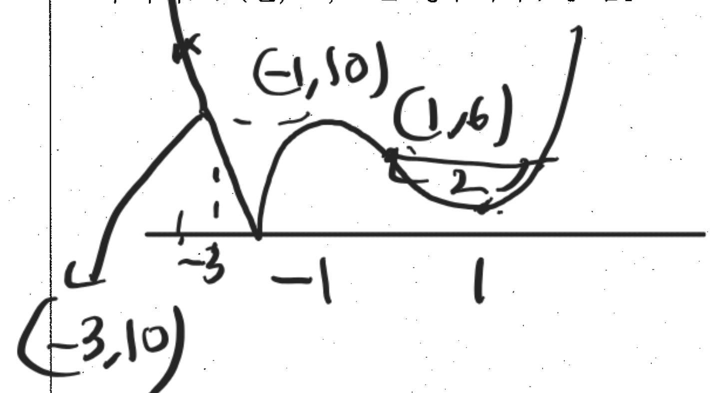
$\log_a 13+2=4$

$a=\sqrt{13}$

$a^2=13$

13

22. 함수 $f(x)=|x^3-3x+8|$과 실수 t에 대하여 닫힌구간 $[t, t+2]$에서의 $f(x)$의 최댓값을 $g(t)$라 하자. 서로 다른 두 실수 α, β에 대하여 함수 $g(t)$는 $t=\alpha$와 $t=\beta$에서만 미분가능하지 않다. $\alpha\beta=m+n\sqrt{6}$일 때, $m+n$의 값을 구하시오. (단, m, n은 정수이다.) [4점]



$\alpha=-3$

$\cancel{t^3}-3t+8 = \cancel{t^3}+6t^2+12t+8$
$-3t-6+8$

$6t^2+12t+2=0$

$3t^2+6t+1=0$

$\frac{-3\pm\sqrt{36-12}}{6}$

$=\frac{-6\pm2\sqrt{6}}{6}$

$\beta=\frac{2\sqrt{6}-6}{6}$

$\frac{2\sqrt{6}-6}{6}\times -3 = 3-\sqrt{6}$

2

* 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

○ 이어서, 「선택과목(확률과 통계)」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

제 2 교시 수학 영역(미적분)

5지선다형

23. $\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}+3^{n-1}}{2^n-3^n}$ 의 값은? [2점]

① $-\frac{1}{3}$ ② $-\frac{1}{6}$ ③ 0 ④ $\frac{1}{6}$ ⑤ $\frac{1}{3}$

$2<3$

$$\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}_{\to 0}+\frac{1}{3}\times(1)^n}{\left(\frac{2}{3}\right)^n_{\to 0}-(1)^n}$$

①

$$=-\frac{1}{3}$$

24. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이

$$\lim_{n\to\infty} na_n=1,\quad \lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{n}=3$$

을 만족시킬 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{n^2a_n+b_n}{1+2b_n}$ 의 값은? [3점]

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{2}{3}$ ④ $\frac{5}{6}$ ⑤ 1

$$\frac{n^2a_n+b_n}{1+2b_n}\to\frac{na_n+\frac{b_n}{n}}{\frac{1}{n}+\frac{2b_n}{n}}$$

③

$$=\frac{1+3}{0+6}=\frac{2}{3}$$

25. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$2n+3 < a_n < 2n+4$$

를 만족시킬 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{(a_n+1)^2+6n^2}{na_n}$의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$2+\frac{3}{n} < \frac{a_n}{n} < 2+\frac{4}{n}$

$\rightarrow \frac{a_n^2+2a_n+1+6n^2}{na_n}$

⑤

$\rightarrow \frac{\frac{a_n^2}{n^2}+\frac{2a_n}{n^2}+\frac{1}{n^2}+6}{\frac{a_n}{n}}$

$\rightarrow \frac{4+0+0+6}{2}$

$=5$

26. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}-a_n = a_1+2$$

$a_2=2a_1+2$

를 만족시킨다. $\lim_{n\to\infty}\frac{2a_n+n}{a_n-n+1}=3$일 때, a_{10}의 값은? (단, $a_1>0$) [3점]

① 35 ② 36 ③ 37 ④ 38 ⑤ 39

$\rightarrow \frac{\frac{2a_n}{n}+1}{\frac{a_n}{n}-1+\frac{1}{n}}=3$

④

$\frac{2k+1}{k-1}=3$

$k=4$

$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=4 \Rightarrow$ 등차가 4인 등차수열

$a_2=2a_1+2$

a_1+2만큼 증가$=4$

$a_1=2$

$2+4\times9=38$

$\to d=3$

27. $a_1=3$, $a_2=6$인 등차수열 $\{a_n\}$과 모든 항이 양수인 수열 $\{b_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n} a_k (b_k)^2 = n^3 - n + 3$$

을 만족시킬 때, $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n b_{2n}}$의 값은? [3점]

① $\frac{3}{2}$ ② $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ ③ 3 ④ $3\sqrt{2}$ ⑤ 6

1

$a_n b_n^2 = 3n^2 - 3n + 1 + 1 = 3n^2 - 3n + 2$

$a_n = \frac{3n^2-3n+2}{b_n^2}$ 인데

$\hookrightarrow \frac{3-\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}}{\frac{b_n^2}{n^2}}$ $\frac{b_n^2}{n^2}=1$ 이여야 함.

$$\frac{\frac{a_n}{n^2}}{\frac{b_n}{n}\times\frac{b_{2n}}{n}} = \frac{3}{1\times 2} = \frac{3}{2}$$

28. 자연수 n에 대하여 직선 $y=2nx$가 곡선 $y=x^2+n^2-1$과 만나는 두 점을 각각 A_n, B_n이라 하자. 원 $(x-2)^2+y^2=1$ 위의 점 P에 대하여 삼각형 A_nB_nP의 넓이가 최대가 되도록 하는 점 P를 P_n이라 할 때, 삼각형 $A_nB_nP_n$의 넓이를 S_n이라 하자. $\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n}$의 값은? [4점]

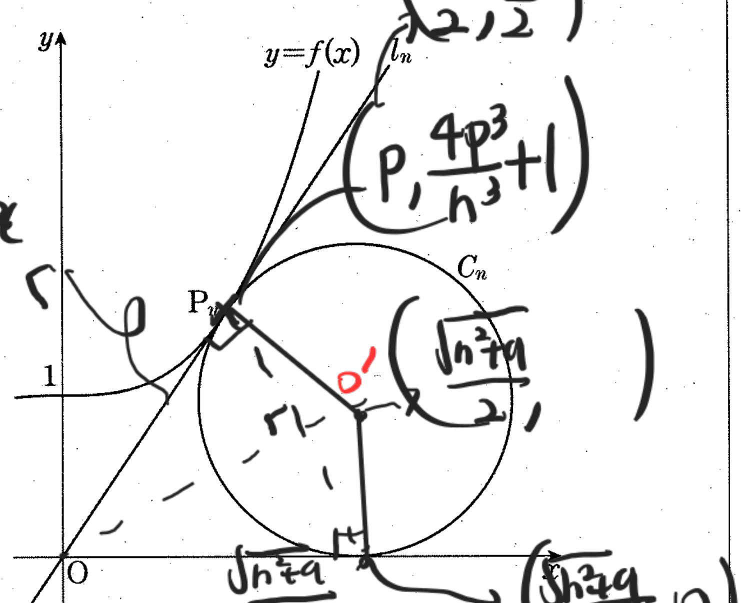
① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

단답형

29. 자연수 n에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=\frac{4}{n^3}x^3+1$$

이라 하자. 원점에서 곡선 $y=f(x)$에 그은 접선을 l_n, 접선 l_n의 접점을 P_n이라 하자. x축과 직선 l_n에 동시에 접하고 점 P_n을 지나는 원 중 중심의 x좌표가 양수인 것을 C_n이라 하자. 원 C_n의 반지름의 길이를 r_n이라 할 때, $40\times\lim_{n\to\infty}n^2(4r_n-3)$의 값을 구하시오. [4점]



$\left(\frac{n}{2},\frac{3}{2}\right)$

$\left(p,\frac{4p^3}{n^3}+1\right)$

$\frac{3}{n}x$

$\frac{12}{n^3}x^2$

r θ θ' r_n

$\left(\frac{\sqrt{n^2+9}}{2},\right)$

$\frac{\sqrt{n^2+9}}{2}$

$\left(\frac{\sqrt{n^2+9}}{2},0\right)$

$\frac{\frac{4p^3}{n^3}+1}{p}=\frac{12p^2}{n^3}$ $n^3=8p^3$

$4p^3+n^3=12p^3$ $n=2p$

OO′ 기울기

$\frac{-\frac{3}{2}}{\frac{\sqrt{n^2+9}-n}{2}}\times\square=-1$

$\square=\frac{\sqrt{n^2+9}-n}{3}$

$\left(\frac{\sqrt{n^2+9}-n}{3}\right)\times\frac{\sqrt{n^2+9}}{2}=r_n$

$\left(\frac{3\times2\sqrt{n^2+9}}{\sqrt{n^2+9}+n}-3\right)40n^2$

270

$\frac{3\sqrt{n^2+9}-3n}{\sqrt{n^2+9}+n}\times40n^2$

$\to\frac{27}{\left(\sqrt{1+\frac{9}{n^2}}+1\right)^2}=\frac{27}{4}\times40$

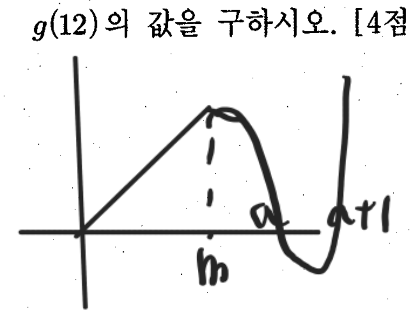
30. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$와 자연수 m에 대하여 구간 $(0,\infty)$에서 정의된 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{f(x)\left(\frac{x}{m}\right)^n+x}{\left(\frac{x}{m}\right)^n+1}$$

라 하자. 함수 $g(x)$는 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 함수 $g(x)$는 구간 $(0,\infty)$에서 미분가능하고, $g'(m+1)\le0$이다.
> (나) $g(k)g(k+1)=0$을 만족시키는 자연수 k의 개수는 3이다.
> (다) $g(l)\ge g(l+1)$을 만족시키는 자연수 l의 개수는 3이다.

$g(12)$의 값을 구하시오. [4점]



$g(x)=\begin{cases}x & 0<x<m\\ \frac{f(m)+m}{2} & x=m\\ f(x) & x>m\end{cases}$

$f'(m)=1$ $f(m)=m$

case1) $g(m)<g(m+1)$

$\alpha=m+3$

$f'(m)=-7(m-13)+12=1$

$m=f(m)=12(m-13)=$ [illegible]

(모순!)

case2) $g(m)\ge g(m+1)$

$\alpha=m+2$

$f'(m)=-5(m-13)+6$

$f(m)=1$ $m-13=1$

$m=6$ $f(x)=(x-5)(x-8)(x-6)$

$g(12)=84$

84

* 확인 사항
- 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기) 했는지 확인하시오.
- 이어서, 「선택과목(기하)」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.