제 2 교시

수학 영역

5 지 선 다 형

1. $\sqrt[3]{54} \times 2^{\frac{5}{3}}$ 의 값은? [2점]

① 4 ② 6 ③ 8 ④ 10 ⑤ 12

$2^{\frac{1}{3}} \times 3^{\frac{3}{3}} \times 2^{\frac{5}{3}} = 12$

2. 함수 $f(x) = x^3 - 3x^2 + x$ 에 대하여 $\lim_{h \to 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{2h}$ 의 값은? [2점]

$= \frac{1}{2} f'(3)$

① 1 ② 3 ③ 5 ④ 7 ⑤ 9

$3x^2 - 6x + 1$

$\xRightarrow{x=3} 27 - 18 + 1 = 10$

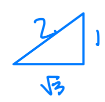
$10 \times \frac{1}{2} = 5$

3. $\cos\theta > 0$ 이고 $\sin\theta + \cos\theta\tan\theta = -1$ 일 때, $\tan\theta$ 의 값은? [3점]

① $-\sqrt{3}$ ② $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ ③ $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ④ 1 ⑤ $\sqrt{3}$

$2\sin\theta = -1$

$\cos\theta > 0$ ∴ 제4사분면



$\tan\theta = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

4. 함수

$$f(x) = \begin{cases} 2x + a & (x < 3) \\ \sqrt{x+1} - a & (x \geq 3) \end{cases}$$

이 $x = 3$ 에서 연속일 때, 상수 a 의 값은? [3점]

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

$f(3) = 2 - a$ $a + 6 = 2 - a$

$\lim_{x \to 3-} f(x) = a + 6$ ∴ $a = -2$

5. 다항함수 $f(x)$가

$$f'(x)=x(3x+2),\quad f(1)=6$$

을 만족시킬 때, $f(0)$의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$f'(x) = 3x^2+2x$

$f(x) = x^3+x^2+C$

$f(1)=6$

$\therefore C=4$

6. 공비가 1보다 큰 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자.

$$\frac{S_4}{S_2}=5,\quad a_5=48$$

일 때, a_1+a_4의 값은? [3점]

① 39 ② 36 ③ 33 ④ 30 ⑤ 27

$r^2+1=5$

$r=2$ $(\because r>0)$

$\therefore ar^4=48$

$a=3.$

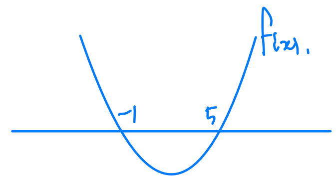
$a_1+a_4 = a(1+r^3)$

$= 27$

7. 함수 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-2x^2-5x+1$이 닫힌구간 $[a, b]$에서 감소할 때, $b-a$의 최댓값은? (단, a, b는 $a<b$인 실수이다.) [3점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

$f'(x) = x^2-4x-5 = (x-5)(x+1)$



$f'(x).$

$[-1, 5]$

8. 두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여

$$(x+1)f(x)+(1-x)g(x)=x^3+9x+1,\quad f(0)=4$$

일 때, $f'(0)+g'(0)$의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$x=0$ 대입

$f(0)+g(0)=1 \quad \therefore g(0)=-3$

x 미분

$f(x)+(x+1)f'(x)-g(x)+(1-x)g'(x)=3x^2+9$

$\overset{x=0}{\Longrightarrow}\ 4+f'(0)+3+g'(0)=9$

$\therefore f'(0)+g'(0)=2$

9. 좌표평면 위의 두 점 $(0,\ 0)$, $(\log_2 9,\ k)$를 지나는 직선이 직선 $(\log_4 3)x+(\log_9 8)y-2=0$에 수직일 때, 3^k의 값은? (단, k는 상수이다.) [4점]

① 16 ② 32 ③ 64 ④ 128 ⑤ 256

$\frac{k}{\log_2 9}=\frac{k}{2\log_2 3}$

기울기 $-\frac{\log_4 3}{\log_9 8}=\frac{-\log_2 3}{3\log_3 2}$

기울기 곱: -1

$\therefore \frac{k}{2\cancel{\log_2 3}}\times\frac{-\cancel{\log_2 3}}{3\log_3 2}=-1$

$k=6\log_3 2 \qquad 3^k=2^6=64$

10. 시각 $t=0$일 때 동시에 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시각 $t\,(t\geq 0)$에서의 속도가 각각

$$v_1(t)=3t^2-6t-2,\quad v_2(t)=-2t+6$$

이다. 출발한 시각부터 두 점 P, Q가 다시 만날 때까지 점 Q가 움직인 거리는? [4점]

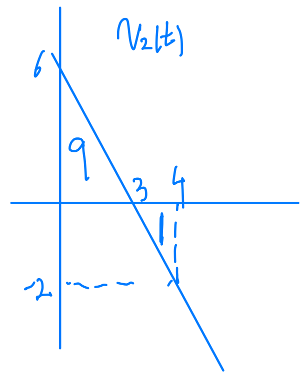
① 7 ② 8 ③ 9 ④ 10 ⑤ 11

$\int v_1(t)-v_2(t)\,dt=\int 3t^2-4t-8\,dt$

$=t^3-2t^2-8t$

$t(t-4)(t+2)$

$t=4$ 다시 만남



11. 공차가 음의 정수인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$a_6 = -2, \quad \sum_{k=1}^{8} |a_k| = \sum_{k=1}^{8} a_k + 42$$

일 때, $\sum_{k=1}^{8} a_k$의 값은? [4점]

① 40 ② 44 ③ 48 ④ 52 ⑤ 56

let 공차 $-d$ (d 자연수)

$\sum_{k=1}^{8} |a_k| = \sum_{k=1}^{8} a_k + 42$

$\Rightarrow -21 = \sum_{k=1}^{8} \frac{a_k - |a_k|}{2}$ (음수만 살리기)

n	1	2	3	4	5	6	7	8
a_n					$-2+d$	-2	$-2-d$	$-2-2d$

if $d>2$.

$-6-3d=-21$

$d=5$ .ok.

$\sum_{k=1}^{8} a_k = 8\times a_{4.5} = 8\times\left(-2+\frac{3}{2}\times 5\right)$

$= 44$

12. 실수 a에 대하여 함수 $f(x)$는

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2+3x+a & (x<0) \\ 3x+a & (x \ge 0) \end{cases}$$

-6

$3(x^2+x-2)$

$3($

$g'(x)=f(x)$

이다. 함수

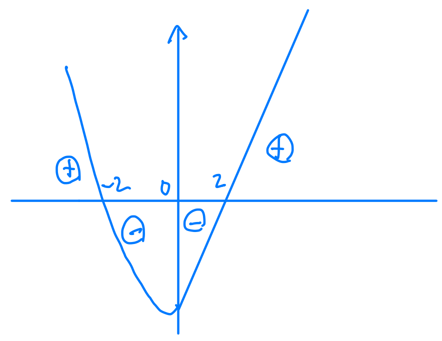
$$g(x) = \int_{-4}^{x} f(t)\,dt$$

가 $x=2$에서 극솟값을 가질 때, 함수 $g(x)$의 극댓값은? [4점]

① 18 ② 20 ③ 22 ④ 24 ⑤ 26

$g'(x) = f(x)$ $x=2$. 극소

$\Rightarrow$ $f(x)$ $x=2$ 기준 ⊖ → ⊕



$\therefore$ $f(2)=0$ $\Rightarrow$ $a=-6$

극대: ⊕ → ⊖

$3x^2+3x-6$

$=3(x+2)(x-1)$

$x=-2$

$\int_{-4}^{-2} f(x)\,dx = \left[x^3+\frac{3}{2}x^2-6x\right]_{-4}^{-2}$

$= 26$

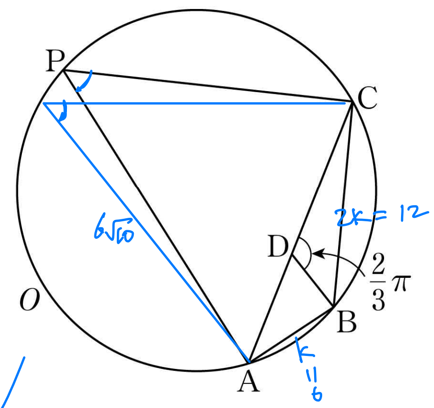
13. 그림과 같이

$$2\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{BC}},\quad \cos(\angle \mathrm{ABC})=-\frac{5}{8}$$

k, 2k

인 삼각형 ABC의 외접원을 O라 하자. 원 O 위의 점 P에 대하여 삼각형 PAC의 넓이가 최대가 되도록 하는 점 P를 Q라 할 때, $\overline{\mathrm{QA}}=6\sqrt{10}$이다. 선분 AC 위의 점 D에 대하여 $\angle \mathrm{CDB}=\frac{2}{3}\pi$일 때, 삼각형 CDB의 외접원의 반지름의 길이는? [4점]

=R,



① $3\sqrt{3}$ ② $4\sqrt{3}$ ③ $3\sqrt{6}$ ④ $5\sqrt{3}$ ⑤ $4\sqrt{6}$

△ABC에서 $-\frac{5}{8}=\frac{5k^2-\overline{AC}^2}{4k^2}$ $\overline{AC}=\frac{\sqrt{30}}{2}k$.

△QAC $\frac{5}{8}=\frac{720-\overline{AC}^2}{2\times6\sqrt{10}\times6\sqrt{10}}$ $\overline{AC}=3\sqrt{30}$ ∴ k=6

$\frac{12}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=2R$ $R=\frac{12}{\sqrt{3}}=4\sqrt{3}$.

14. 두 정수 a, b에 대하여 함수 $f(x)$는

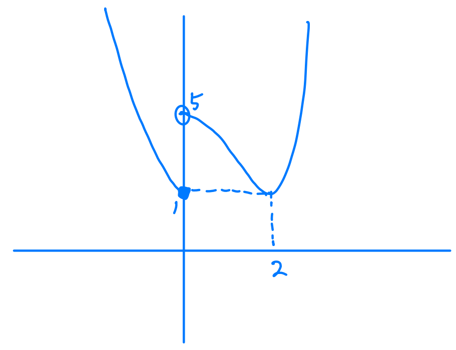
$$f(x)=\begin{cases} x^2-2ax+\frac{a^2}{4}+b^2 & (x\le 0) \\ x^3-3x^2+5 & (x>0) \end{cases}$$

$=(x-a)^2+b^2-\frac{3}{4}a^2$

$3x^2-6x$

이다. 실수 t에 대하여 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=t$가 만나는 점의 개수를 $g(t)$라 하자. 함수 $g(t)$가 $t=k$에서 불연속인 실수 k의 개수가 2가 되도록 하는 두 정수 a, b의 모든 순서쌍 (a, b)의 개수는? [4점]

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7



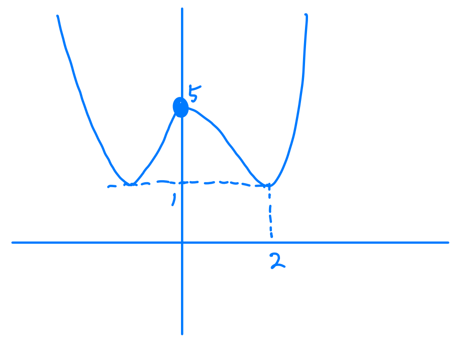
① if $a\ge0$

$f(0)=\frac{1}{4}a^2+b^2=1$

$a^2+4b^2=4$

$a=0 \Rightarrow b=\pm1$

$a=2 \Rightarrow b=0$) 3개



② if $a<0$

$b^2-\frac{3}{4}a^2=1$ & $\frac{1}{4}a^2+b^2=5$

∴ $a^2=4$ $a=-2$ ($\because a<0$)

$\Rightarrow b^2=4$ $b=\pm2$

2개

15. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases} a_n & (a_n>n) \\ 3n-2-a_n & (a_n\le n) \end{cases}$$

을 만족시킬 때, $a_5=5$가 되도록 하는 모든 a_1의 값의 곱은? [4점]

① 20 ② 30 ③ 40 ④ 50 ⑤ 60

$4-a_2=2.$

n	1	2	3	4	5
a_n.	2	2	2	5	5
	-1	-1	5		
	5	5			
	-4				

$4-a_2=5$

$1-a_1=2.$

$\therefore\ (-1)\times(-4)\times 2\times 5=40.$

단답형

16. 방정식 $4^x=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-9}$을 만족시키는 실수 x의 값을 구하시오. [3점]

3

$2x=9-x$

$x=3$

17. $\int_0^2(3x^2-2x+3)\,dx+\int_0^2(2x+1)\,dx$의 값을 구하시오. [3점]

16

$\int_0^2(3x^2+4)\,dx$

$=\left[x^3+4x\right]_0^2=16$

18. 수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$\sum_{k=1}^{10} a_k + \sum_{k=1}^{9} a_k = 137, \quad \sum_{k=1}^{10} a_k - \sum_{k=1}^{9} 2a_k = 101$$

일 때, a_{10}의 값을 구하시오. [3점]

113

$2\sum_{1}^{9} + a_{10} = 137$

$a_{10} - \sum_{1}^{9} = 101$

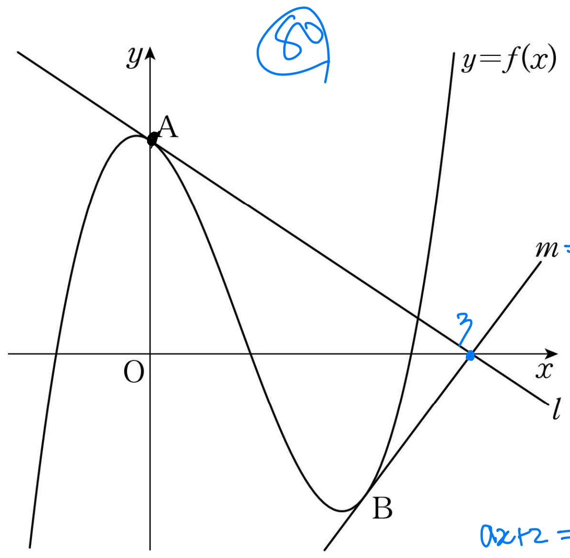
$3a_{10} = 339$

$a_{10} = 113$

$f'(x) = 3x^2 - 5x + a$

19. 실수 a에 대하여 함수 $f(x) = x^3 - \frac{5}{2}x^2 + ax + 2$이다. 곡선 $y = f(x)$ 위의 두 점 $\mathrm{A}(0, 2)$, $\mathrm{B}(2, f(2))$에서의 접선을 각각 l, m이라 하자. 두 직선 l, m이 만나는 점이 x축 위에 있을 때, $60 \times |f(2)|$의 값을 구하시오. [3점]

80



$m = (a+2)(x-2) + 2a$

$= (a+2)x - 4$

$l = ax + 2$

$ax + 2 = (a+2)x - 4$

$2x = 6$

$3a + 2 = 0$

$a = -\frac{2}{3}$

$|f(2)| = |2a| = \frac{4}{3}$

20. 두 함수 $f(x) = 2x^2 + 2x - 1$, $g(x) = \cos\frac{\pi}{3}x$에 대하여

↳ 주기 6

$0 \le x < 12$에서 방정식

$$f(g(x)) = g(x)$$

를 만족시키는 모든 실수 x의 값의 합을 구하시오. [4점]

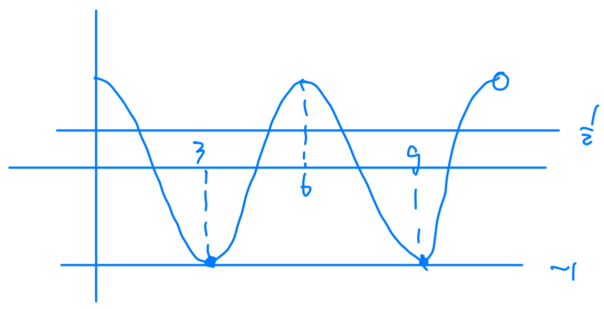
36

let $g(x) = t \quad (-1 \le t \le 1)$

$f(t) = t \qquad 2t^2 + 2t - 1 = t$

$(2t-1)(t+1) \qquad t = \frac{1}{2}$ or -1

$g(x) = \frac{1}{2}$ or -1

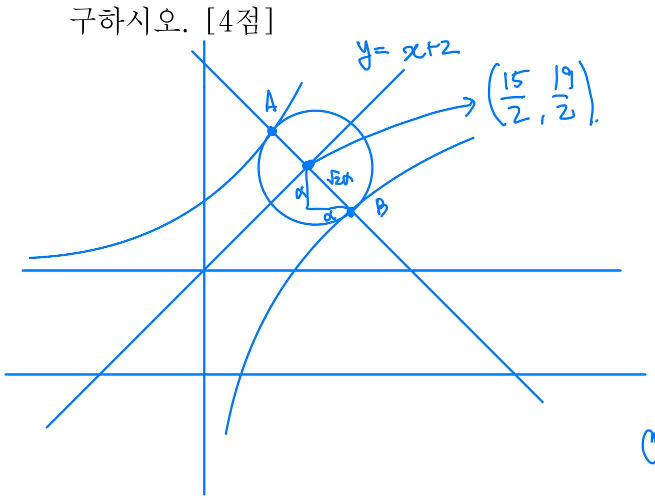


21. $a>2$인 실수 a에 대하여 기울기가 -1인 직선이 두 곡선

$$y=a^x+2,\quad y=\log_a x+2$$

와 만나는 점을 각각 A, B라 하자. 선분 AB를 지름으로 하는 원의 중심의 y좌표가 $\frac{19}{2}$이고 넓이가 $\frac{121}{2}\pi$일 때, a^2의 값을 구하시오. [4점]

13



$(\sqrt{2}\alpha)^2\pi=\frac{121}{2}\pi$

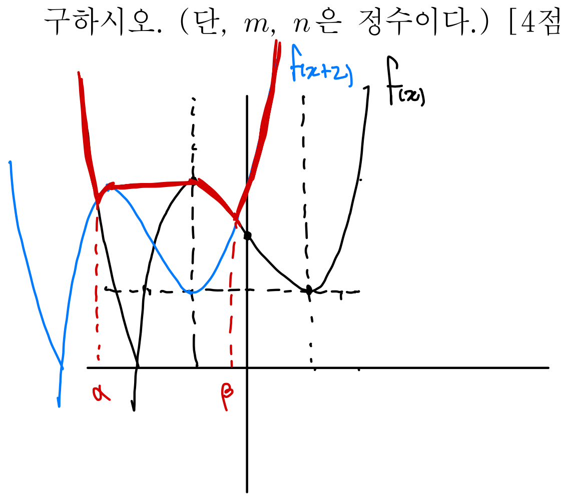
$\alpha=\frac{11}{2}$

$\therefore A(2, 15)$

$a^2+2=15$

$a^2=13$

22. 함수 $f(x)=|x^3-3x+8|$과 실수 t에 대하여 닫힌구간 $[t, t+2]$에서의 $f(x)$의 최댓값을 $g(t)$라 하자. 서로 다른 두 실수 α, β에 대하여 함수 $g(t)$는 $t=\alpha$와 $t=\beta$에서만 미분가능하지 않다. $\alpha\beta=m+n\sqrt{6}$일 때, $m+n$의 값을 구하시오. (단, m, n은 정수이다.) [4점]



2

① $-\alpha^3+3\alpha-8=(\alpha+2)^3-3(\alpha+2)+8$

$-\alpha^3+3\alpha-8=\alpha^3+6\alpha^2+9\alpha+10$

$2\alpha^3+6\alpha^2+6\alpha+18=0$

$2(\alpha^2+3)(\alpha+3)=0$

$\therefore \alpha=-3$

$\beta^3-3\beta+8=\beta^3+6\beta^2+9\beta+10$

$2(3\beta^2+6\beta+1)=0$

$\beta=\frac{-3+\sqrt{6}}{3}$ (큰 값)

$\therefore \alpha\beta=3-\sqrt{6}.$

* 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

○ 이어서, 「선택과목(확률과 통계)」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

수학 영역(미적분)

5 지 선 다 형

23. $\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}+3^{n-1}}{2^n-3^n}$ 의 값은? [2점]

① $-\frac{1}{3}$ ② $-\frac{1}{6}$ ③ 0 ④ $\frac{1}{6}$ ⑤ $\frac{1}{3}$

$-\frac{1}{3}$

24. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이

$$\lim_{n\to\infty} na_n = 1,\quad \lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{n} = 3$$

을 만족시킬 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{n^2a_n+b_n}{1+2b_n}$ 의 값은? [3점]

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{2}{3}$ ④ $\frac{5}{6}$ ⑤ 1

$\lim_{n\to\infty}\frac{na_n+\frac{b_n}{n}}{\frac{1}{n}+\frac{2b_n}{n}} = \frac{1+3}{6} = \frac{2}{3}$

25. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$\frac{2n+3}{n} < \frac{a_n}{n} < \frac{2n+4}{n}$$

를 만족시킬 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{(a_n+1)^2+6n^2}{na_n}$의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=2$

$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{a_n^2}{n^2}+\frac{2a_n}{n^2}+\frac{1}{n^2}+6}{\frac{a_n}{n}}$

$=\frac{4+6}{2}=5$

26. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}-a_n=\underbrace{a_1+2}_{\text{공차}}$$

를 만족시킨다. $\lim_{n\to\infty}\frac{2a_n+n}{a_n-n+1}=3$일 때, a_{10}의 값은? (단, $a_1>0$) [3점]

① 35 ② 36 ③ 37 ④ 38 ⑤ 39

$a_n=(a_1+2)(n-1)+a_1$

$3a_1+3=2a_1+6$

$\frac{2a_1+4+1}{a_1+1}=3$

$a_1=2 \Rightarrow$ 공차 4

$a_{10}=2+4\times 9$

27. $a_1=3$, $a_2=6$ 인 등차수열 $\{a_n\}$과 모든 항이 양수인 수열 $\{b_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n} a_k(b_k)^2 = n^3-n+3$$ $- \left[(n-1)^3-(n-1)+3\right]$

$= 3n^2-3n$

을 만족시킬 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_nb_{2n}}$ 의 값은? [3점]

① $\frac{3}{2}$ ② $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ ③ 3 ④ $3\sqrt{2}$ ⑤ 6

$\therefore\ a_n(b_n)^2 = 3n^2-3n \quad (n\geq 2)$

$a_n = 3n.$

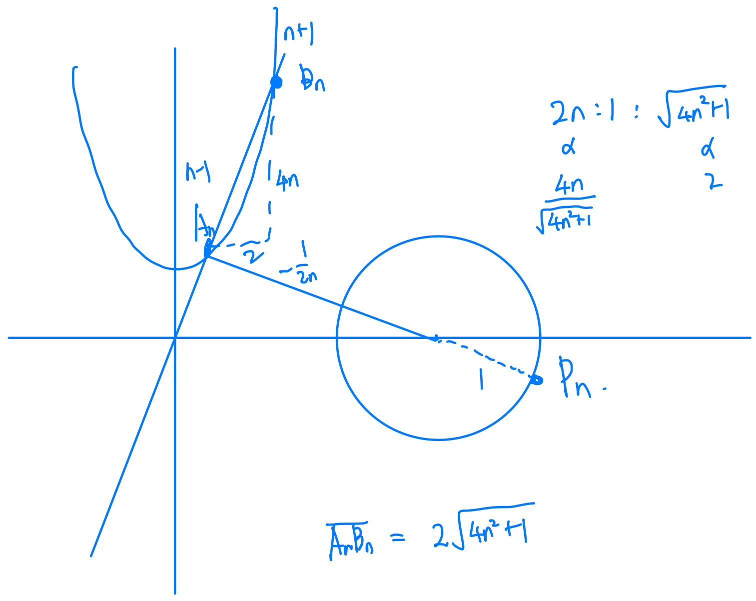
$\therefore\ b_n = \sqrt{n-1} > 0$

$\lim_{n\to\infty}\frac{3n}{\sqrt{n-1}\sqrt{2n-1}} = \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$

28. 자연수 n에 대하여 직선 $y=2nx$가 곡선 $y=x^2+n^2-1$과 만나는 두 점을 각각 A_n, B_n이라 하자. 원 $(x-2)^2+y^2=1$ 위의 점 P에 대하여 삼각형 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n\mathrm{P}$의 넓이가 최대가 되도록 하는 점 P를 P_n이라 할 때, 삼각형 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n\mathrm{P}_n$의 넓이를 S_n이라 하자. $\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n}$ 의 값은? [4점]

$(x-n)^2-1=0$, $x = n+1$ or $n-1$

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10



$\overline{A_nB_n} = 2\sqrt{4n^2+1}$

높이 $h = \frac{4n}{\sqrt{4n^2+1}}+1$

$\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{4n+\sqrt{4n^2+1}}{n}$

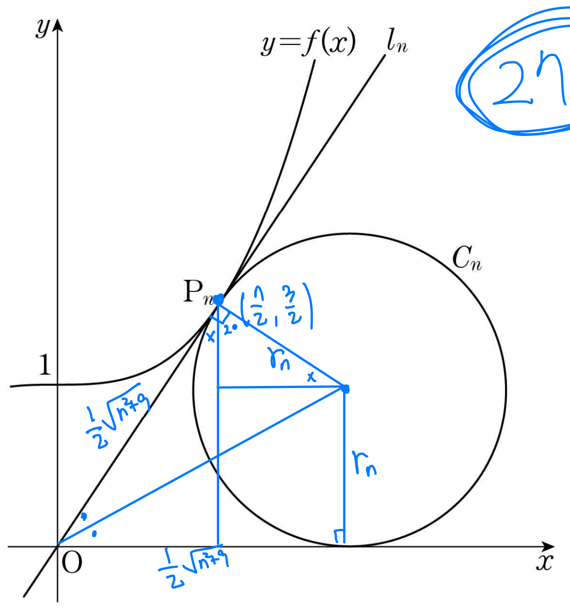
$= 6$

단답형

29. 자연수 n에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=\frac{4}{n^3}x^3+1$$

이라 하자. 원점에서 곡선 $y=f(x)$에 그은 접선을 l_n, 접선 l_n의 접점을 P_n이라 하자. x축과 직선 l_n에 동시에 접하고 점 P_n을 지나는 원 중 중심의 x좌표가 양수인 것을 C_n이라 하자. 원 C_n의 반지름의 길이를 r_n이라 할 때, $40\times\lim_{n\to\infty}n^2(4r_n-3)$의 값을 구하시오. [4점]



270

$r_n : \frac{3}{2}-r_n = \frac{1}{2}\sqrt{n^2+9} : \frac{n}{2}$

$\left(\frac{3}{2}-r_n\right)\sqrt{n^2+9} = n\times r_n$

$\left(n+\sqrt{n^2+9}\right)r_n = \frac{3}{2}\sqrt{n^2+9}$

$4r_n-3 = 3\times\left(\frac{\sqrt{n^2+9}-n}{n+\sqrt{n^2+9}}\right)$

$= \frac{27}{\left(n+\sqrt{n^2+9}\right)^2}$

$\lim_{n\to\infty} n^2(4r_n-3) = \lim_{n\to\infty}\frac{27n^2}{\left(n+\sqrt{n^2+9}\right)^2}$

$=\frac{27}{4}$

$40\times\frac{27}{4} = 270$

30. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$와 자연수 m에 대하여 구간 $(0, \infty)$에서 정의된 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{f(x)\left(\frac{x}{m}\right)^n+x}{\left(\frac{x}{m}\right)^n+1}$$

라 하자. 함수 $g(x)$는 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 함수 $g(x)$는 구간 $(0, \infty)$에서 미분가능하고, $g'(m+1)\le 0$이다.
> (나) $g(k)g(k+1)=0$을 만족시키는 자연수 k의 개수는 3이다.
> (다) $g(l)\ge g(l+1)$을 만족시키는 자연수 l의 개수는 3이다.

$g(12)$의 값을 구하시오. [4점]

84

$g(x)=\begin{cases} x & (0<x<m) \\ \frac{f(x)+m}{2} & x=m \\ f(x) & (x>m)\end{cases}$

$m=f(m)=\frac{f(m)+m}{2}$

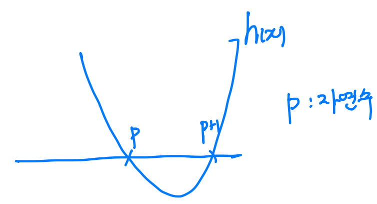
$\therefore f(m)=m$
& $f'(m)=1$

$\therefore$ let $f(x)=(x-m)^3+a(x-m)^2+(x-m)+m$

(가) $f'(m+1)=3+2a+1\le 0$

$\boxed{\therefore a\le -2}$

(나)

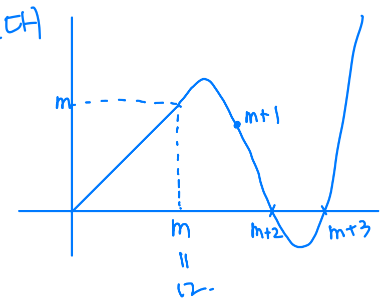


p : 자연수

$h(p)h(p+1)=0$

$p-1,\ p,\ p+1$ (3개) $\therefore$ g(x)는 1차이

(다)



$f(m+2)=0$ → $8+4a+2+m=0$
$f(m+3)=0$ → $27+9a+3+m=0$

$a=-4$ $\therefore f(x)=(x-6)^3-4(x-6)^2+(x-6)+6$

$m=6$

$g(m)=m=6$ (ㄷ)

$g(m+1)=1-4+1+6=4$

$g(12)=f(12)=216-144+6+6$
$=84$

> ⋆ 확인 사항
> ○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기) 했는지 확인하시오.
> ○ 이어서, 「**선택과목(기하)**」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.