제 2 교시

2025학년도 수능 대비 R-20 모의고사

수학 영역

성명	

수험 번호					—				

공통 과목 및 자신이 선택한 과목의 문제지를 확인하고, 답을 정확히 표시하시오.

공통과목 1~6쪽, 선택과목 확률과 통계 7~8쪽, 미적분 9~10쪽, 기하 11~12쪽

※ 시험이 시작되기 전까지 표지를 넘기지 마시오.

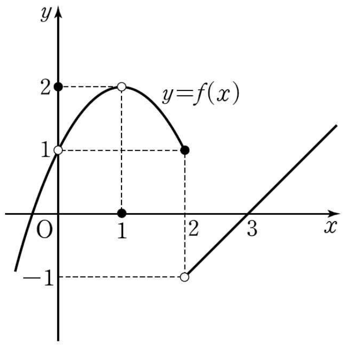
랑데뷰

제 2 교시

수학 영역

5지선다형

1. 함수 $y=f(x)$의 그래프가 다음 그림과 같다.



$\lim_{x\to 1}f(x)+\lim_{x\to 0}f(|x|+2)$ 의 값은? [3점]

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

2. $\pi<\theta<\frac{3}{2}\pi$이고 $\tan\theta=\frac{5}{12}$일 때 $\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}+\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}$의 값은? [3점]

① $-\frac{17}{5}$ ② $-\frac{19}{5}$ ③ $-\frac{21}{5}$ ④ $-\frac{23}{5}$ ⑤ $-\frac{26}{5}$

3. 16의 네제곱근 중 실수인 것을 a, -27의 세제곱근 중 실수인 것을 b라 할 때, $a-b$의 최댓값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

4. 곡선 $y=x^3-3x^2-9x$와 직선 $y=k$가 서로 다른 세 점에서 만나도록 하는 정수 k의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $M-m$의 값은? [3점]

① 27 ② 28 ③ 29 ④ 30 ⑤ 31

5. 첫째항이 $\frac{1}{2}$인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases} a_n+1 & (a_n<0) \\ -2a_n+1 & (a_n\geq 0) \end{cases}$$

일 때, $a_{10}+a_{20}$의 값은? [3점]

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

6. 모든 항이 양수인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 x에 대한 이차방정식 $a_2x^2-(a_3+36)x+16a_4=0$이 서로 다른 두 실근 a_3, a_5를 갖도록 하는 모든 a_1의 곱은? [4점]

① 8 ② 12 ③ 16 ④ 20 ⑤ 24

7. 원점을 지나는 이차함수 $f(x)$가 $0<x<\frac{4}{3}$인 모든 실수 x에 대하여 $f(x)>0$이다. 양수 t $\left(0<t<\frac{4}{3}\right)$에 대하여 점 $\mathrm{A}(t,\ f(t))$에서 x축, y축에 내린 수선의 발을 각각 B, C라 하자. 사각형 OABC의 둘레의 길이를 $g(t)$, 넓이를 $h(t)$라 할 때, 두 함수 $g(t)$, $h(t)$가 모두 $t=1$에서 극값을 갖는다. $f(2)$의 값은? [4점]

① -2 ② -3 ③ -4 ④ -5 ⑤ -6

8. 닫힌구간 $[0,\ 4]$에서 정의된 함수

$$f(x)=2\sin\frac{\pi x}{2}+a\ \ (0<a<2)$$

이 있다. 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=a+2$가 만나는 점을 A, 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=a-2$와 만나는 점을 B, 곡선 $y=f(x)$와 x축이 만나는 점을 C라 하자. 곡선 $y=f(x)$위의 점 D를 사각형 ADBC가 평행사변형이 되도록 잡을 때, 선분 BD를 $1:4$로 내분하는 점은 x축 위에 있다. a의 값은? [4점]

① 1 ② $\frac{7}{6}$ ③ $\frac{4}{3}$ ④ $\frac{3}{2}$ ⑤ $\frac{11}{6}$

9. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$와 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $g(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$|x+2|\,g(x)=f(x)$$

를 만족시킨다. 실수 t에 대하여 방정식 $g(x)=t$의 서로 다른 실근의 개수 $h(t)$라 할 때 함수 $h(t)$는 모든 실수 t에 대하여 연속이다. $f(1)$의 값은? [4점]

① 8 ② 11 ③ 16 ④ 21 ⑤ 27

10. 양수 k에 대하여 두 집합 A, B 가 $A=\{x \mid x=2^{x-k}\}$, $B=\{x \mid x=\log_2(x+k)\}$일 때, $A\cup B=\{x_1, x_2, x_3\}$이다. $x_1+x_2+x_3=3$일 때, k의 값은? (단, $x_1<x_2<x_3$) [4점]

① 1 ② $\frac{3}{2}$ ③ 2 ④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 3

11. 이차함수 $f(x)=a(x-1)(x-b)$ $(a>0,\ b>1)$에 대하여 함수

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (f(x) \ge 0) \\ 0 & (f(x)<0) \end{cases}$$

가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(6)$의 값은? (단, $0<k<1$) [4점]

(가) $\int_0^{f(0)} g(x)dx = 2\int_0^1 g(x)dx$ (나) 부등식 $\int_\alpha^{f(\alpha)} g(x)dx \le 0$을 만족시키는 모든 실수 α의 값의 집합은 $\{\alpha \mid k \le \alpha \le 3\}$이다.

① 6 ② 12 ③ 18 ④ 24 ⑤ 30

단답형

12. 함수 $f(x)=\begin{cases} -x^2+ax+2 & (x \ge 2) \\ 2x+b & (x<2) \end{cases}$가 $x=2$에서 미분가능할 때, 상수 a, b에 대하여 ab의 값을 구하시오. [3점]

13. 함수 $f(x)=x^2-x-4$에 대하여 부등식

$$4^{f(x)}-2^{1+f(x)}<8$$

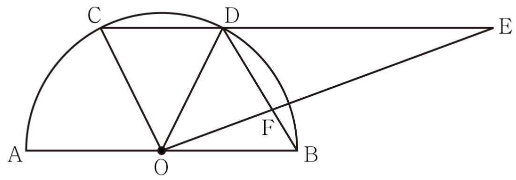
을 만족시키는 정수 x의 합을 구하시오. [3점]

14. 실수 $t\,(t \neq 0)$과 함수 $f(x)=x^3-4x^2+5x$에 대하여 함수

$$g(x)=\int_0^x f(t)dt-\frac{f(t)}{2t}x^2$$

가 오직 하나의 극값을 갖고 그 값이 음수일 때, t의 값을 구하시오. [4점]

15. 그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원 위의 점 C를 지나고 선분 AB와 평행한 직선이 반원과 만나는 점 중 C가 아닌 점을 D라 하고 $\overline{\mathrm{DE}}=2$인 점 E를 직선 CD위에 잡는다. 선분 OE와 선분 BD가 만나는 점을 F라 할 때, $\overline{\mathrm{OF}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$이다. 삼각형 OCD의 넓이는 $\frac{q}{p}\sqrt{15}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



* 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

○ 이어서, 『**선택과목(확률과 통계)**』 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

제 2 교시

수학 영역(확률과 통계)

5지선다형

16. $\left(x+\frac{1}{x^2}\right)^5$의 전개식에서 $\frac{1}{x}$의 계수는? [3점]

① 10 ② 11 ③ 12 ④ 13 ⑤ 14

17. 10 이하의 자연수 집합에서 중복을 허용하여 임의로 두 자연수 x, y를 뽑을 때, $\log_3 x+\log_3 y$가 정수가 아닐 확률은? [3점]

① $\frac{9}{100}$ ② $\frac{27}{50}$ ③ $\frac{21}{25}$ ④ $\frac{81}{100}$ ⑤ $\frac{91}{100}$

18. 방정식 $x+y+z+w=12$을 만족시키는 자연수 x, y, z, w의 순서쌍 $(x,\ y,\ z,\ w)$ 중에서 x가 3의 배수인 순서쌍의 개수는? [3점]

① 36 ② 37 ③ 38 ④ 39 ⑤ 40

19. 숫자 2, 4, 6이 하나씩 적혀 있는 3장의 카드가 들어 있는 상자를 사용하여 다음과 같은 시행을 한다.

> 상자에서 임의로 2장의 카드를 동시에 꺼내어 카드에 적혀 있는 두 수의 평균을 확률변수 X라 하고, 꺼낸 카드를 다시 주머니에 넣는다.

이 시행을 4회 반복하여 얻은 4개의 X의 평균을 $\overline{X}$라 할 때, $\mathrm{V}(\overline{X})$의 값은? [4점]

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{1}{3}$ ④ $\frac{5}{12}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

단답형

20. 두 집합 $X=\{1,2,3\}$, $Y=\{y\,|\,y$는 15이하의 자연수$\}$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 $f : X \to Y$의 개수를 구하시오. [4점]

> (가) 집합 X의 임의의 두 원소 a, b에 대하여 $a<b$이면 $f(a) \le f(b)$이다.
> (나) $\{f(1)-8\}\{f(2)-8\}>0$

> ＊ 확인 사항
>
> ○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.
>
> ○ 이어서, 『**선택과목(미적분)**』 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

수학 영역(미적분)

5지선다형

16. 모든 항이 양수인 수열 $\{a_n\}$이

$$a_1=1,\ a_{n+2}=a_{n+1}+a_n\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

을 만족시킨다. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}a_{n+2}}=1$일 때, a_3의 값은? [3점]

① $\frac{7}{2}$ ② 3 ③ $\frac{5}{2}$ ④ 2 ⑤ $\frac{3}{2}$

17. 매개변수 $t\,(t>0)$으로 나타낸 곡선 $x=e^t,\ y=t-2\ln t$에 대하여 $t=2$에 대응하는 점에서의 접선의 y절편은? [3점]

① 1 ② $2-2\ln2$ ③ $3-2\ln2$
④ $3-\ln2$ ⑤ 2

18. 구간 $[0, 3]$에서 정의된 함수

$$f(x)=\begin{cases}2x & (0\le x\le 1)\\ 2 & (1\le x\le 3)\end{cases}$$

에 대하여 $\displaystyle\int_0^3 e^x f(x)dx$의 값은? [3점]

① $2e^3-2e+1$ ② $2e^3-2e+2$ ③ $2e^3-3e+1$
④ $2e^3-3e+2$ ⑤ $2e^3-4e+4$

19. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $f(x)=\begin{cases} ax+b & (x<2) \\ g(x) & (x \geq 2) \end{cases}$
>
> (나) $x \geq 2$인 모든 실수 x에 대하여 $f(x^2)=\dfrac{f(x)+e^x}{x}$이다.

$\displaystyle\int_2^4 g(x)dx=\int_0^{16} f(x)dx=e^2$, $g(2)=e^4$일 때, $\dfrac{f(-2)}{-e^4}$의 값은? (단, a와 b는 상수이다.) [4점]

① 5　② $\dfrac{11}{2}$　③ 6　④ $\dfrac{13}{2}$　⑤ 7

단답형

20. 양수 a $(a>1)$에 대하여 열린구간 $(0, 2\pi)$에서 정의된 함수 $f(x)=\ln(a\cos x+a^2)$의 그래프가 열린구간 $(\pi-t, \pi+t)$에서 아래로 볼록이 되도록 하는 양수 t의 최댓값을 $g(a)$라 하자. $\{g'(2)\}^2=\dfrac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

> * 확인 사항
>
> ○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.
>
> ○ 이어서, 『**선택과목(기하)**』 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

제 2 교시

수학 영역(기하)

5지선다형

16. 좌표평면 위의 점 $(2, -2)$을 지나고 벡터 $\vec{u}=(2, 4)$에 평행한 직선 l이 있다. 직선 l과 x축, y축으로 둘러싸인 부분의 넓이는? [3점]

① 9 ② 10 ③ 11 ④ 12 ⑤ 13

17. 좌표공간에서 구 $x^2+y^2+z^2-2x-6y-2\sqrt{6}z+12=0$과 한 점에서 만나고 원점을 중심으로 하는 두 구를 C_1, C_2라 하자. 두 구 C_1, C_2의 반지름의 길이의 차는? [3점]

① 8 ② 7 ③ 6 ④ 5 ⑤ 4

18. 포물선

$$C_1 : x^2 = ay-3$$

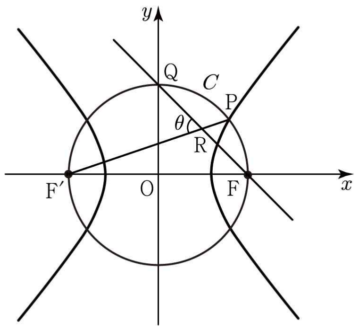
에 초점의 좌표가 $\mathrm{F}(0, c)$와 $\mathrm{F}'(0, -c)$인 쌍곡선

$$C_2 : \frac{x^2}{3}-y^2=-1$$

의 점근선이 접할 때, $a+c$의 값은? (단, a, c는 양수이다.) [3점]

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

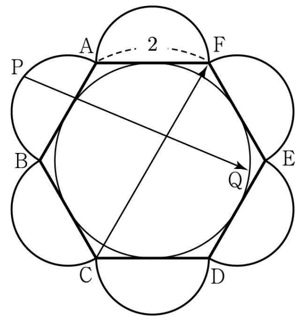
19. 그림과 같이 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$의 두 초점 F, F′에 대하여 선분 FF′을 지름으로 하는 원을 C라 하자. 원 C가 쌍곡선 제1사분면에서 만나는 점을 P라 하고, 원 C가 y축과 만나는 점 중 y좌표가 양수인 점을 Q라 하자. 두 직선 F′P, QF가 이루는 예각의 크기를 θ라 하자. $\cos\theta=\frac{1}{3}$일 때, $\frac{b^2}{a^2}$의 값은? (단, a, b는 $b>a>0$인 상수이고, 점 F의 x좌표는 양수이다.) [4점]



① 2　　② $\frac{5}{2}$　　③ 3　　④ $\frac{7}{2}$　　⑤ 4

단답형

20. 그림과 같이 한 변의 길이가 2인 정육각형 ABCDEF와 각 선분을 지름으로 하는 반원이 있다. 각 선분을 지름으로 하는 반원 위의 점 P와 정육각형 ABCDEF에 내접하는 원 위의 점 Q에 대하여 $\overrightarrow{CF}\cdot\overrightarrow{PQ}$의 최댓값은 $a+b\sqrt{3}$이다. $a+b$의 값을 구하시오. (단, 점 P는 정육각형 ABCDEF의 외부에 있으며, a와 b는 실수이다.) [4점]



※ 확인 사항
○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기) 했는지 확인하시오.

※ 시험이 시작되기 전까지 표지를 넘기지 마시오.

2025학년도 수학영역 랑데뷰 R-20 제0회

공통과목

1	②	2	⑤	3	⑤	4	④	5	②
6	③	7	①	8	①	9	⑤	10	①
11	⑤	12	36	13	2	14	4	15	17

확률과 통계

16	①	17	⑤	18	④	19	①	20	392

미적분

16	④	17	②	18	②	19	⑤	20	13

기하

16	①	17	⑤	18	⑤	19	④	20	14

2025학년도 수학영역 랑데뷰 R-20 제0회 -풀이

공통과목

[출제자 : 황보백 송원학원 010-5673-8601]

1) 정답 ②

$\lim_{x\to 1} f(x) = 2$

$\lim_{x\to 0} f(|x|+2) = \lim_{x\to 2+} f(x) = -1$

$\lim_{x\to 1} f(x) + \lim_{x\to 0} f(|x|+2) = 1$

2) 정답 ⑤

$\pi < \theta < \dfrac{3}{2}\pi$이고 $\tan\theta = \dfrac{5}{12}$이므로

$\sin\theta = -\dfrac{5}{13}$, $\cos\theta = -\dfrac{12}{13}$

$\therefore\ \dfrac{\sin\theta}{1-\cos\theta} + \dfrac{\sin\theta}{1+\cos\theta}$

$= \dfrac{\sin\theta + \sin\theta\cos\theta + \sin\theta - \sin\theta\cos\theta}{1-\cos^2\theta}$

$= \dfrac{2\sin\theta}{\sin^2\theta} = \dfrac{2}{\sin\theta} = -\dfrac{26}{5}$

3) 정답 ⑤

16의 네제곱근을 x라 하면

$x^4 = 16$이므로 $x^4 - 16 = (x-2)(x+2)(x^2+4) = 0$

$x = \pm 2$ 또는 $x = \pm 2i$

$\therefore\ a = 2$ 또는 $a = -2$

-27의 세제곱근을 x라 하면

$x^3 = -27$이므로 $x^3 + 27 = (x+3)(x^2-3x+9) = 0$

$x = -3$ 또는 $x = \dfrac{3 \pm 3\sqrt{3}i}{2}$

$\therefore\ b = -3$

그러므로

$a - b = 2 - (-3) = 5$ 또는 $a - b = -2 - (-3) = 1$

따라서 $a-b$의 최댓값은 5

4) 정답 ④

$f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x$라 하면

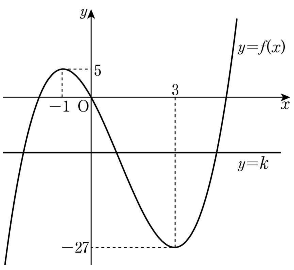
$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x+1)(x-3)$

$f'(x) = 0$에서 $x = -1$ 또는 $x = 3$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	5	$\searrow$	-27	$\nearrow$

이고, 함수 $f(x)$의 그래프를 그리면 다음과 같다.



직선 $y = k$는 x축에 평행하므로 함수 $y = f(x)$의 그래프와 서로 다른 세 점에서 만나기 위한 k의 값의 범위는 $-27 < k < 5$

그러므로 정수 k의 최댓값 $M = 4$, 최솟값 $m = -26$

따라서 $M - m = 4 - (-26) = 30$

5) 정답 ②

$a_1 = \dfrac{1}{2}$이므로

$a_2 = -2 \times \dfrac{1}{2} + 1 = 0$

$a_3 = -2 \times 0 + 1 = 1$

$a_4 = -2 \times 1 + 1 = -1$

$a_5 = -1 + 1 = 0$

$\vdots$

이때 $a_{n+3} = a_n\ (n \ge 2)$이므로

$a_{10} = a_7 = a_4 = -1$

$a_{20} = a_{17} = a_{14} = \cdots = a_2 = 0$

따라서 $a_{10} + a_{20} = -1 + 0 = -1$

6) 정답 ③

이차방정식 $a_2x^2-(a_3+36)x+16a_4=0$의 서로 다른 두 실근 a_3, a_5이므로 근과 계수와의 관계에서

$a_3+a_5=\dfrac{a_3+36}{a_2}$ …… ㉠

$a_3\times a_5=\dfrac{16a_4}{a_2}$ …… ㉡

가 성립한다.

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a_1 $(a_1>0)$, 공비를 $r(r>0)$이라 하면

㉡에서 $a_1r^2\times a_1r^4=\dfrac{16a_1r^3}{a_1r}$

$a_1^2r^4=16$이므로 $a_1r^2=4$이다. …… ㉢

㉠에서 $a_1r^2+a_1r^4=\dfrac{a_1r^2+36}{a_1r}$

$4+4r^2=10r$

$2r^2-5r+2=0$

$(2r-1)(r-2)=0$

$r=\dfrac{1}{2}$ 또는 $r=2$

㉢에서 $a_1=16$ 또는 $a_1=1$이다.

따라서 모든 a_1의 곱은 16이다.

7) 정답 ①

$g(t)=2t+2f(t)$, $h(t)=tf(t)$이다.

$g'(t)=2+2f'(t)$, $h'(t)=f(t)+tf'(t)$이고

$g'(1)=2+2f'(1)=0$에서 $f'(1)=-1$ …… ㉠

$h'(1)=f(1)+f'(1)=0$에서 $f(1)=1$ …… ㉡

$f(0)=0$이므로 $f(x)=ax^2+bx$라 하면 $f'(x)=2ax+b$이고

㉠, ㉡에서

$2a+b=-1$

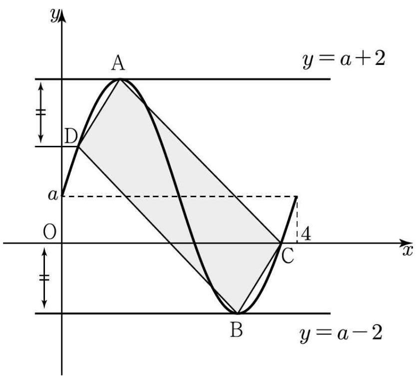
$a+b=1$

이고 연립방정식을 풀면 $a=-2$, $b=3$이다.

$\therefore$ $f(x)=-2x^2+3x$이다.

그러므로 $f(2)=-8+6=-2$이다.

8) 정답 ③



함수 $f(x)$의 주기가 $2\pi\times\dfrac{2}{\pi}=4$이고 최댓값이 $2+a$, 최솟값이 $-2+a$이므로 점 A$(1, a+2)$, 점 B$(3, -2+a)$이다. 사각형 ADBC가 평행사변형이고 점 B에서 x축까지의 거리가 $2-a$이므로 점 A에서 점 D를 지나고 x축에 평행한 직선까지의 거리도 $2-a$이다.

따라서 점 D의 y좌표는 $(a+2)-(2-a)=2a$이다. ……[참고]

선분 BD를 1 : 4로 내분하는 점은 x축 위에 있으므로 두 점 B, D의 y좌표의 1 : 4로 내분하는 점의 y좌표가 0이다.

$\dfrac{4\times(-2+a)+2a}{5}=0$

$6a=8$에서 $a=\dfrac{4}{3}$이다.

[참고]

평행사변형의 성질(두 대각선의중점이 일치)을 이용하면, 대각선 AB와 대각선 CD의 중점이 일치하므로

AB의 중점의 y좌표가 a이고, 점 C는 x축 위의 점이므로 점 D의 y좌표는 $2a$이다.

9) 정답 ⑤

$|x+2|g(x)=f(x)$의 양변에 $x=-2$를 대입하면 $f(-2)=0$이다.

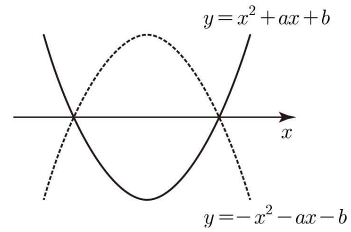
$f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이므로

$f(x)=(x+2)(x^2+ax+b)$라 할 수 있다.

따라서

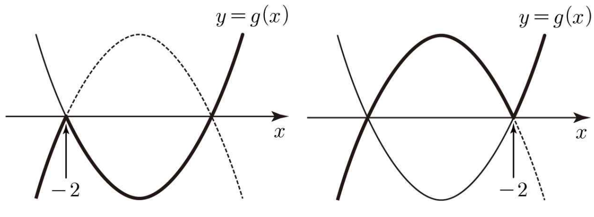
$$g(x)=\begin{cases}x^2+ax+b & (x>-2)\\ -x^2-ax-b & (x<-2)\end{cases}$$

이다.



두 곡선 $y=x^2+ax+b$와 $y=-x^2-ax-b$은 x축 대칭이고 함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 두 곡선 $y=x^2+ax+b$와 $y=-x^2-ax-b$은 x축과 $x=-2$에서 만난다.

(i) $y=x^2+ax+b$이 x축과 만나는 점의 개수가 2일 때,



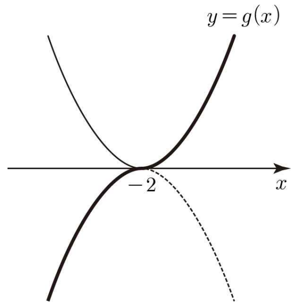
[그림 1] [그림2]

그림에서 함수 $h(t)$가 불연속인 t의 개수가 2이므로 조건에 모순이다.

[그림 1]에서 극솟값이 k이면 $h(t)=\begin{cases}1 & (t>0)\\ 2 & (t=0)\\ 3 & (k<t<0)\\ 2 & (t=k)\\ 1 & (t<k)\end{cases}$

[그림 2]에서 극댓값이 k이면 $h(t)=\begin{cases}1 & (t>k)\\ 2 & (t=k)\\ 3 & (0<t<k)\\ 2 & (t=0)\\ 1 & (t<0)\end{cases}$

(ii) $y=x^2+ax+b$이 x축과 만나는 점의 개수가 1일 때,



그림에서 모든 실수 t에 대하여 $h(t)=1$로 조건을 만족시킨다.

따라서 $g(x)=\begin{cases}(x+2)^2 & (x>-2)\\ -(x+2)^2 & (x<-2)\end{cases}$이다.

$f(x)=(x+2)^3$이므로 $f(1)=27$이다.

10) 정답 ①

[그림 : 도정영T]

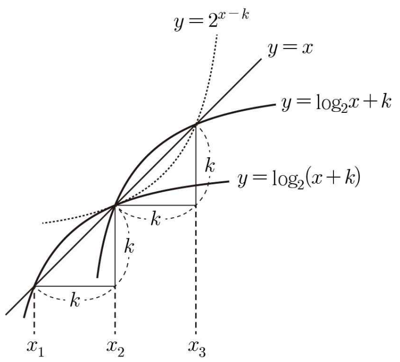
두 곡선 $y=2^{x-k}$와 $y=\log_2(x+k)$는 각각 직선 $y=x$와 많아야 서로 다른 두 점에서 만나고 집합 $A\cup B$의 원소의 개수가 3이므로 두 곡선 $y=2^{x-k}$와 $y=\log_2(x+k)$는 각각 직선 $y=x$와 적어도 한 점에서 만난다.

한편, $y=2^{x-k}$의 역함수는 $y=\log_2 x+k$이고 곡선 $y=2^{x-k}$와 $y=\log_2 x+k$의 교점은 $y=x$위에 있다.

곡선 $y=2^{x-k}$과 직선 $y=x$의 교점의 x좌표의 집합 A는 곡선 $y=\log_2 x+k$와 직선 $y=x$의 교점의 x좌표의 집합과 같다.

곡선 $y=\log_2(x+k)$를 x축의 방향으로 k만큼 y축의 방향으로 k만큼 평행이동한 곡선이 $y=\log_2 x+k$이므로 그림에서

$\dfrac{x_1+x_3}{2}=x_2$이다.



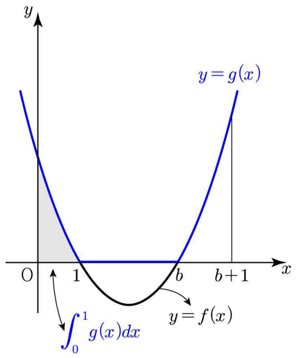
$x_1+x_2+x_3=3$에서 $3x_2=3$이므로 $x_2=1$이다.

따라서 $y=\log_2(x+k)$가 $(1,\ 1)$를 지나므로 $1=\log_2(1+k)$에서 $k=$이다.

11) 정답 ⑤

(가)에서 $f(0)=b+1$이므로 $f(0)=a(-1)(-b)=b+1$이다.

$\therefore\ ab=b+1\quad\cdots\cdots$ ㉠



모든 실수 x에 대하여 $g(x)\ge 0$이므로 $\int_\alpha^{f(\alpha)} g(x)dx\le 0$이기 위해서는 $\alpha\ge f(\alpha)$이어야 한다. $\alpha\ge f(\alpha)$을 만족시키는 모든 실수 α의 값의 집합은 $\{\alpha\mid k\le\alpha\le 3\}$이므로 $f(k)=k,\ f(3)=3$이다.

$f(3)=a\times 2\times(3-b)=3$

$3a-ab=\dfrac{3}{2}$

㉠을 대입하면 $3a-b-1=\dfrac{3}{2}$

$\therefore\ a=\dfrac{b}{3}+\dfrac{5}{6}\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서

$\left(\dfrac{b}{3}+\dfrac{5}{6}\right)b=b+1$

$2b^2+5b=6b+6$

$2b^2-b-6=0$

$(b-2)(2b+3)=0$

$\therefore\ b=2\ (\because b>1)$

㉠에서 $a=\dfrac{3}{2}$이다.

그러므로 $f(x)=\dfrac{3}{2}(x-1)(x-2)$

$f(6)=\dfrac{3}{2}\times 5\times 4=30$

[랑데뷰팁]

$f(k)=k\ (0<k<1)$에서 $k=\dfrac{2}{3}$이다.

12) 정답 36

함수 $f(x)$가 $x=2$에서 미분가능하면 연속이므로

$-4+2a+2=4+b\quad\therefore b=2a-6$

$f'(x)=\begin{cases}-2x+a & (x>2)\\ 2 & (x<2)\end{cases}$ 이고

$f(x)$는 $x=2$에서 미분가능하므로 $-4+a=2$

따라서 $a=6,\ b=6$

$\therefore ab=36$

13) 정답 2

$4^{f(x)}-2^{1+f(x)}<8$에서

$2^{2f(x)}-2\times 2^{f(x)}-8<0$

$(2^{f(x)}+2)(2^{f(x)}-4)<0$

$-2<2^{f(x)}<4$

$2^{f(x)}>0$이므로 $0<2^{f(x)}<2^2$

$\therefore\ f(x)<2$

$x^2-x-4<2$에서

$(x+2)(x-3)<0$

$\therefore\ -2<x<3$

부등식을 만족시키는 모든 정수 x의 합은 $(-1)+0+1+2=2$이다.

14) 정답 4

$g(x)=\int_0^x f(t)dt-\frac{f(t)}{2t}x^2$에서 $x=0$을 대입하면 $g(0)=0$ …… ㉠

이고 양변을 x에 관하여 미분하면 $g'(x)=f(x)-\frac{f(t)}{t}x$이다.

$=x^3-4x^2+\left\{5-\frac{f(t)}{t}\right\}x$

$=x\left(x^2-4x+5-\frac{f(t)}{t}\right)$

$h(x)=x^2-4x+5-\frac{f(t)}{t}$라 하자.

(i) 방정식 $h(x)=0$이 $x=0$을 실근을 가질 때,

$g'(x)=x^2(x-4)$이므로 사차함수 $g(x)$는 $x=4$에서 유일한 극솟값을 갖는다.

$h(0)=5-\frac{f(t)}{t}=0$

$t^2-4t+5=5$

$t^2-4t=0$

$t(t-4)=0$

$\therefore\ t=4$

㉠에서 $g(0)=0$이므로 $g(4)<0$이다.

(ii) 방정식 $h(x)=0$이 중근을 가질 때,

$D/4=4-5+\frac{f(t)}{t}=0$

$\frac{f(t)}{t}=1$이므로 ……㉡

$g'(x)=x(x-2)^2$이므로 함수 $g(x)$는 $x=0$에서 유일한 극솟값을 갖는다.

㉡에서 $t^2-4t+5=1$, $(t-2)^2=0$

$\therefore\ t=2$

㉠에서 $g(0)=0$이므로 극솟값은 0이다.

(i), (ii)에서 음의 극값은 $t=4$일 때다.

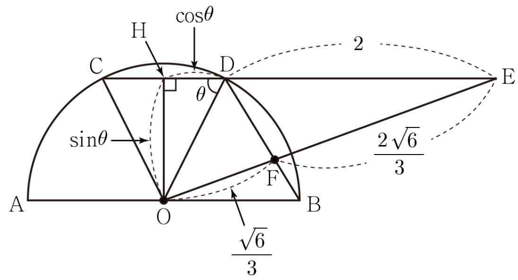
15) 정답 17

두 삼각형 DEF와 BOF에서 $\overline{DE}/\!/\overline{OB}$이므로

$\angle DEF=\angle BOF$, $\angle DFE=\angle BFO$이므로 $\triangle DEF \backsim \triangle BOF$이다.

$\overline{OB}:\overline{DE}=1:2$이므로 $\overline{EF}=\frac{2\sqrt{6}}{3}$이다.

$\therefore\ \overline{OE}=\sqrt{6}$



중심 O에서 선분 CD에 내린 수선의 발을 H라 하고 $\angle ODH=\theta$라 하면, $\overline{OD}=1$이므로

$\overline{OH}=\sin\theta$, $\overline{DH}=\cos\theta$이다.

직각삼각형 OHE에서 피타고라스 정리를 이용하면

$(2+\cos\theta)^2+\sin^2\theta=(\sqrt{6})^2$

$4+4\cos\theta+1=6$

$4\cos\theta=1$

$\cos\theta=\frac{1}{4}$

$\therefore\ \sin\theta=\frac{\sqrt{15}}{4}$

그러므로 삼각형 OCD의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{CD}\times\overline{OH}=\frac{1}{2}\times 2\cos\theta\times\sin\theta$

$=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{15}}{4}=\frac{\sqrt{15}}{16}$

이다.

따라서 $p=16$, $q=1$이므로 $p+q=17$이다.

확률과통계

[출제자 : 황보백 송원학원 010-5673-8601]

16) 정답 ①

$\left(x+\frac{1}{x^2}\right)^5$의 전개식의 일반항은

${}_5C_r x^{5-r}\left(\frac{1}{x^2}\right)^r={}_5C_r x^{5-3r}$

$\frac{1}{x}$은 $5-3r=-1$일 때이므로 $r=2$

따라서 $\frac{1}{x}$의 계수는 ${}_5C_2=10$이다.

17) 정답 ⑤

여사건의 확률을 이용하자.

$\log_3 x+\log_3 y=\log_3 xy$가 정수이면,

$1\le x\le 10$, $1\le y\le 10$이므로 xy가 1, 3, 3^2, 3^3, 3^4이어야 한다.

(x,y)의 개수는 다음과 같다.

$xy=1$인 경우, $(1,1)$로 1개

$xy=3$인 경우, $(1,3)$, $(3,1)$로 2개

$xy=3^2$인 경우, $(1, 9)$, $(3, 3)$, $(9, 1)$로 3개

$xy=3^3$인 경우, $(3, 9)$, $(9, 3)$로 2개

$xy=3^4$인 경우, $(9, 9)$로 1개

따라서 총 경우의 수는 9이다.

10 이하의 자연수 집합에서 중복을 허용하여 임의로 두 자연수를 뽑는 전체 경우의 수는 ${}_{10}\Pi_2=100$이다.

따라서 $1-\frac{9}{100}=\frac{91}{100}$

18) 정답 ④

(i) $x=3$ 이면 $y+z+w=9$이므로

자연수 y, z, w 의 순서쌍 $(y,\ z,\ w)$ 의

개수는 ${}_3H_6={}_8C_6={}_8C_2=28$ (개)

(ii) $x=6$이면 $y+z+w=6$이므로

자연수 y, z, w 의 순서쌍 $(y,\ z,\ w)$ 의

개수는 ${}_3H_3={}_5C_3={}_5C_2=10$ (개)

(iii) $x=9$이면 $y+z+w=3$이므로

자연수 y, z, w 의 순서쌍

$(y,\ z,\ w)$ 의 개수는 ${}_3H_0={}_3C_0=1$ (개)

따라서 구하는 순서쌍 $(x,\ y,\ z,\ w)$ 의 개수는

$28+10+1=39$(개)

19) 정답 ①

주어진 시행을 한 번 할 때, 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	3	4	5	계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	1

따라서

$\mathrm{E}(X)=3\times\frac{1}{3}+4\times\frac{1}{3}+5\times\frac{1}{3}=4$,

$\mathrm{E}(X^2)=9\times\frac{1}{3}+16\times\frac{1}{3}+25\times\frac{1}{3}=\frac{50}{3}$

이므로

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2=\frac{50}{3}-16=\frac{2}{3}$

이때 $\overline{X}$는 확률변수 X의 모집합에서 임의추출한 표본의 크기가 4인 표본평균이므로

$\mathrm{V}(\overline{X})=\frac{\mathrm{V}(X)}{4}=\frac{1}{6}$

20) 정답 392

구하는 경우의 수는 $f(1)\le f(2)\le f(3)\le 15$인 경우에서

$\{f(1)-8\}\{f(2)-8\}\le 0$인 경우를 제외시켜주면 된다.

(i) $f(1)\le f(2)\le f(3)\le 15$인 경우

Y의 15개 원소 중 3개를 중복해서 뽑으면 되므로

${}_{15}H_3={}_{17}C_3=680$

(ii) $\{f(1)-8\}\{f(2)-8\}\le 0$인 경우

$1\le f(1)\le 8\le f(2)\le f(3)\le 15$이면 되므로

$f(1)$을 정하는 방법수 8

$f(2), f(3)$을 정하는 방법 수 ${}_8H_2$

그러므로

$8\times{}_8H_2=8\times{}_9C_2=288$

따라서 구하는 경우의 수는

$680-288=392$

미적분

[출제자 : 황보백 송원학원 010-5673-8601]

16) 정답 ④

$a_{n+2}=a_{n+1}+a_n \quad \Rightarrow\ a_n=a_{n+2}-a_{n+1}$ 에서

$\frac{a_n}{a_{n+1}a_{n+2}}=\frac{a_{n+2}-a_{n+1}}{a_{n+1}a_{n+2}}=\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_{n+2}}$이므로

$$\sum_{n=1}^{n}\frac{a_k}{a_{k+1}a_{k+2}}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{a_{k+1}}-\frac{1}{a_{k+2}}\right)$$

$$=\left(\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_3}\right)+\left(\frac{1}{a_3}-\frac{1}{a_4}\right)+\left(\frac{1}{a_4}-\frac{1}{a_5}\right)+\cdots$$

$$+\left(\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_{n+2}}\right)$$

$$=\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_{n+2}}$$

수열 $\{a_n\}$은 $a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$을 만족하므로 증가하는 수열이고

따라서 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_n}=0$이다.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}a_{n+2}}=\frac{1}{a_2}=1$$

따라서 $a_2=1$이다.

$a_3=a_1+a_2=1+1=2$이다.

17) 정답 ②

$x=e^t, y=t-2\ln t$에서

$\frac{dx}{dt}=e^t, \frac{dy}{dt}=1-\frac{2}{t}$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{1-\frac{2}{t}}{e^t} \quad \cdots ㉠$$

$t=2$에 대응하는 점에서의 접선의 기울기는 ㉠에 $t=2$을 대입한 값과 같으므로 $\frac{1-\frac{2}{2}}{e^2}=0$

또 곡선 $x=e^t, y=t-2\ln t$의 $t=2$에 대응하는 점의 좌표는 $(e^2, 2-2\ln 2)$이고 이 점을 지나고 기울기가 0인 직선은 $y=2-2\ln 2$이다.

따라서 y절편은 $2-2\ln 2$

18) 정답 ②

$f'(x)=\begin{cases}2 & (0<x<1)\\ 0 & (1<x<3)\end{cases}$이므로

$$\int_0^3 e^x f(x)dx=\left[e^x f(x)\right]_0^3-\int_0^1 2e^x dx$$
$$=e^3 f(3)-f(0)-2\left[\ e^x\right]_0^1$$
$$=2e^3-2(e-1)$$
$$=2e^3-2e+2$$

19) 정답 ⑤

(나)에서 양변에 x을 곱하고 정리하면

$xf(x^2)-f(x)=e^x$이고 $\int_2^4 g(x)dx=\int_2^4 f(x)dx$이므로

$$\int_2^4 xf(x^2)dx-\int_2^4 f(x)dx=\int_2^4 e^x dx$$

$$\int_2^4 xf(x^2)dx-e^2=\left[\ e^x\ \right]_2^4\ \left(\because \int_2^4 g(x)dx=\int_2^4 f(x)dx\right)$$

$$\int_2^4 xf(x^2)dx=e^4$$

$x^2=t$라 하면

$\frac{1}{2}\int_4^{16} f(t)dt=e^4$에서 $\int_4^{16} f(x)dx=2e^4$이다.

따라서

$$\int_0^{16} f(x)dx$$
$$=\int_0^2 f(x)dx+\int_2^4 f(x)dx+\int_4^{16} f(x)dx$$
$$=\int_0^2 (ax+b)dx+e^2+2e^4=e^2$$
$$\int_0^2 (ax+b)dx=-2e^4$$
$$\left[\frac{1}{2}ax^2+bx\right]_0^2=2a+2b=-2e^4$$

$\therefore\ a+b=-e^4$

$g(2)=f(2)=2a+b=e^4$

$a=2e^4,\ b=-3e^4$이다.

따라서 $x<2$일 때, $f(x)=2e^4x-3e^4$이다.

$\therefore\ f(-2)=-7e^4$

따라서 $\dfrac{f(-2)}{-e^4}=7$이다.

20) 정답 13

$f(x)=\ln(a\cos x+a^2)$에서

$$f'(x)=\frac{-a\sin x}{a\cos x+a^2}$$

$$f''(x)=\frac{-a\cos x(a\cos x+a^2)+a\sin x(-a\sin x)}{(a\cos x+a^2)^2}$$
$$=\frac{-a^2\cos^2 x-a^3\cos x-a^2\sin^2 x}{(a\cos x+a^2)^2}$$
$$=\frac{-a^3\cos x-a^2}{(a\cos x+a^2)^2}$$

함수 $f(x)$가 아래로 볼록이 되기 위해서는 $f''(x)\ge 0$이다.

따라서

$-a^3\cos x-a^2\ \ge\ 0$

$\cos x\ \le -\dfrac{1}{a}$

함수 $f(x)=\ln(a\cos x+a^2)$의 그래프가 열린구간 $(\pi-t,\ \pi+t)$에서 아래로 볼록이 되도록 하는 양수 t의 최댓값이 $g(a)$이므로

$\cos\{\pi-g(a)\}=-\cos g(a)=-\dfrac{1}{a}$

$\cos g(a)=\dfrac{1}{a}$이다.

$-\sin g(a)\times g'(a)=-\dfrac{1}{a^2}$

$\therefore\ g'(a)=\dfrac{1}{a^2\sin g(a)}$

그러므로 $g'(2)=\dfrac{1}{4\sin g(2)}$이다.

$\cos g(2)=\dfrac{1}{2}$이므로 $\sin g(2)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$이다.

따라서

$g'(2)=\dfrac{1}{2\sqrt{3}}$에서 $\{g'(2)\}^2=\dfrac{1}{12}$이다.

$p=12,\ q=1$이므로 $p+q=13$이다.

기하

[출제자 : 황보백 송원학원 010-5673-8601]

16) 정답 ①

l : $\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y+2}{4}$에서 $2x-y-6=0$이므로

직선 l과 x축, y축과의 교점은 $(3,0)$, $(0,\ -6)$이다.

따라서 둘러싸인 삼각형의 넓이는 $\dfrac{1}{2}\times 3\times 6=9$

17) 정답 ⑤

$x^2+y^2+z^2-2x-6y-2\sqrt{6}z+12=0$에서

$(x-1)^2+(y-3)^2+(z-\sqrt{6})^2=2^2$

이므로 이 구의 중심은 $(1,\ 3,\ \sqrt{6})$이고 반지름의 길이는 2이다.

이때, 원점과 점 $(1,\ 3,\ \sqrt{6})$ 사이의 거리는 $\sqrt{1+9+6}=4$이므로 두 구 C_1, C_2의 반지름의 길이는 각각 $4-2=2$, $4+2=6$이다.

따라서 두 구 C_1, C_2의 반지름의 길이의 차는 $6-2=4$

18) 정답 ⑤

쌍곡선 정의에서 $c^2=3+1=4$이다.

따라서 $c=2$

쌍곡선 C_2의 점근선의 방정식은 $y=\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}x$이다.

이것을 C_1에 대입하면 $x^2 \pm \frac{a}{\sqrt{3}}x+3=0$에서

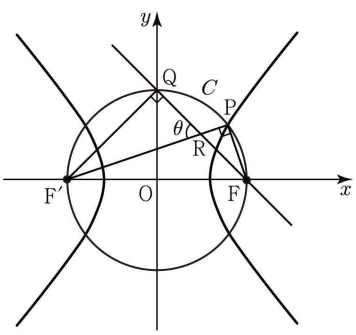
중근을 가질 때 점근선이 포물선에 접하므로

$D=\frac{a^2}{3}-12=0$

따라서 $a^2=36$, $a=6$ ($\because$ $a>0$)

$a+c=8$

19) 정답 ④



두 직선 F′P, QF의 교점을 R라 하면 두 직각삼각형 QF′R, PFR가 서로 닮음이고

$\cos(\angle \mathrm{QRF'})=\cos(\angle \mathrm{PRF})=\cos\theta=\frac{1}{3}$

$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$

$\overline{\mathrm{QR}}=t$ $(t>0)$이라 할 때

$\overline{\mathrm{RF'}}=\frac{\overline{\mathrm{QR}}}{\cos\theta}=3t$,

$\overline{\mathrm{QF}}=\overline{\mathrm{QF'}}=\overline{\mathrm{RF'}}\sin\theta=2\sqrt{2}t$,

$\overline{\mathrm{RF}}=\overline{\mathrm{QF}}-\overline{\mathrm{QR}}=2\sqrt{2}t-t=(2\sqrt{2}-1)t$

$\overline{\mathrm{RP}}=\overline{\mathrm{RF}}\cos\theta=\frac{(2\sqrt{2}-1)t}{3}$,

$\overline{\mathrm{PF}}=\overline{\mathrm{RF}}\sin\theta=\frac{(8-2\sqrt{2})t}{3}$

점 P는 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 위의 점이므로

$\overline{\mathrm{PF'}}-\overline{\mathrm{PF}}=\overline{\mathrm{RF'}}+\overline{\mathrm{RP}}-\overline{\mathrm{PF}}$

$=3t+\frac{(2\sqrt{2}-1)t}{3}-\frac{(8-2\sqrt{2})t}{3}$

$=\frac{4\sqrt{2}}{3}t$

$2a=\frac{4\sqrt{2}}{3}t$에서 $a=\frac{2\sqrt{2}}{3}t$

점 F의 좌표를 $(c, 0)$ $(c>0)$이라 할 때

$\overline{\mathrm{FF'}}=\sqrt{2}\times\overline{\mathrm{QF}}$에서 $c=2t$

$b^2=c^2-a^2=4t^2-\frac{8}{9}t^2=\frac{28}{9}t^2$

따라서 $\frac{b^2}{a^2}=\frac{\frac{28}{9}t^2}{\frac{8}{9}t^2}=\frac{7}{2}$

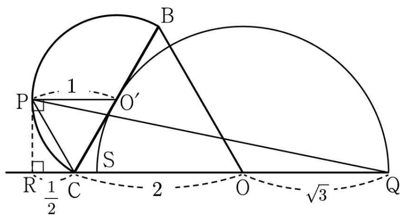
20) 정답 14

$\overrightarrow{\mathrm{CF}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=|\overrightarrow{\mathrm{CF}}||\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|\cos\theta$이므로 $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$를 $\overrightarrow{\mathrm{CF}}$에 정사영한 길이가 최대일 때 내적이 최대이다. 한 변의 길이가 2인 정육각형이므로 $|\overrightarrow{\mathrm{CF}}|=4$이다.

두 점 S와 Q를 직선 CF와 내접원이 만나는 점으로 점 C에 가까운 점을 S, 점 F에 가까운 점으로 정하자.

그럼 점 P는 호 CB위에 위치하게 된다.

정육각형 ABCDEF의 내접원의 중심을 O라 하면 원의 반지름의 길이가 $\sqrt{3}$이므로 $\overline{\mathrm{OQ}}=\sqrt{3}$이다. (정육각형은 중심을 기준으로 6개의 정삼각형으로 쪼갤 수 있고 이에 내접하는 원의 반지름은 한 변의 길이가 2인 정삼각형의 높이에 해당한다.)



그림과 같이 정육각형의 한 변인 선분 BC와 내접원이 만나는 점을 O′라 하고 중심이 O′이고 호가 BC인 반원에 접하고 CQ에 수직인 직선이 만나는 점이 P라 할 수 있다. $\overline{\mathrm{O'P}}=1$이다.

점 P에서 직선 CQ에 내린 수선의 발을 R라 하면 $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$를 $\overrightarrow{\mathrm{CF}}$에 정사영한 길이가 최대가 된다.

따라서 $|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|\cos\theta=|\overrightarrow{\mathrm{RQ}}|$

정육각형의 내접원의 반지름은 $\sqrt{3}$이고 한 모서리 $\overline{\mathrm{CB}}$를 지름으로 하는 반원은 반지름이 1이고 이 원의 중심을 O′라 하면

$\angle \mathrm{O'PR}=\angle \mathrm{PRC}=90^\circ$, $\overline{\mathrm{O'P}}=\overline{\mathrm{O'C}}$ ($\because$ 반지름의 길이)

또한 두 직선 O′P와 CQ가 평행하므로

$\angle \mathrm{O'PC}=\angle \mathrm{PCR}=\angle \mathrm{O'PC}$

따라서 삼각형 O′PC는 정삼각형이다.

그러므로 $\angle \mathrm{BCO}=60^\circ$

$\therefore$ $\overline{\mathrm{RC}}=\frac{1}{2}$

$\overline{\mathrm{CO}}=2$, $\overline{\mathrm{OQ}}=\sqrt{3}$이므로

그러므로 $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$의 $\overrightarrow{\mathrm{CF}}$로의 정사영 $|\overrightarrow{\mathrm{RQ}}|=\frac{5}{2}+\sqrt{3}$의 최댓값을 갖는다.

따라서 $\overrightarrow{\mathrm{CF}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=|\overrightarrow{\mathrm{CF}}||\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|\cos\theta$

$=4\times\left(\frac{5}{2}+\sqrt{3}\right)$

$=10+4\sqrt{3}$

$a=10$, $b=4$이므로 $a+b=14$이다.