1번 문항 (2020 단국대학교 논술기출)

다음 극한값이 수렴하는지를 보이고, 수렴하면 그 값을 구하시오.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}k^6}{\sum_{k=1}^{2n}k^2\sum_{k=2n+1}^{4n}k^3}$$

2번 문항 (2021 서울과학기술대학교 모의논술)

극한 $\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\{(2n)!\}-n\ln n-\ln(n!)}{n}$ 의 값을 구하시오.

3번 문항 (2022 한양대학교 모의논술)

극한값 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}$ 을 구하시오.

4번 문항 (2023 한양대학교 모의논술)

자연수 n에 대하여 $x_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{2n} \frac{2n}{2n+2k-1}$ 일 때, 극한값 $\lim_{n \to \infty} x_n$을 구하시오.

5번 문항

자연수 n에 대하여 $a_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$라 할 때, 다음 물음에 답하여라.

(1) $0 \le x \le 1$일 때, 다음 부등식이 성립함을 보여라.

$$1 + \sum_{k=1}^{2n-1} (-x)^k \le \frac{1}{1+x} \le 1 + \sum_{k=1}^{2n} (-x)^k$$

(2) $\lim_{n \to \infty} a_n$의 값을 구하시오.

6번 문항 (2017 고려대학교 모의논술)

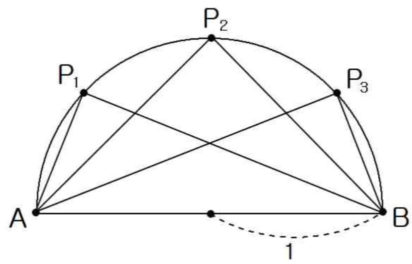
(마) $p(x)$ 는 다음 두 가지 성질을 만족하는 가장 낮은 차수의 다항함수이다.

• $p(x)$ 의 최고차항의 계수는 1 이다. • $\lvert\sin(\pi x)\rvert p(x)$ 는 구간 $(-n, 0)$ 에서 미분 가능하다.

(단, n 은 2 이상의 자연수이다.)

제시문 (마)에서 $a_n = \int_0^1 \ln p(x)dx$ 라 할 때, 극한값 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(a_n - \sum_{k=1}^{n}\ln(n+k)\right)$ 를 구하시오.

7번 문항 (2023 한양대 모의논술)



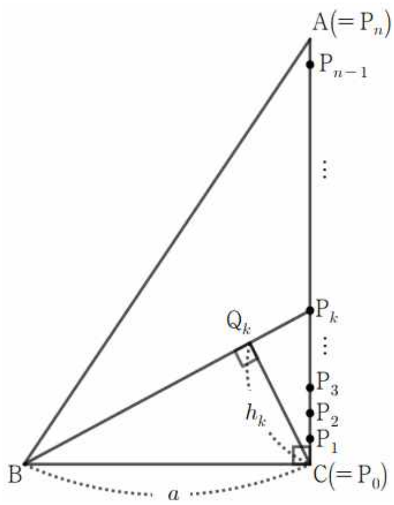
선분 AB를 지름으로 하고, 반지름의 길이가 1인 반원의 호 위에 $\overline{\mathrm{AP}_1}=\overline{\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2}=\overline{\mathrm{P}_2\mathrm{P}_3}=\cdots=\overline{\mathrm{P}_{n-1}\mathrm{P}_n}=\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{B}}$를 만족시키는 n개의 점 $\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \cdots, \mathrm{P}_n$이 순서대로 놓여있다.

자연수 $k(1 \le k \le n)$에 대하여 삼각형 $\mathrm{AP}_k\mathrm{B}$의 넓이를 S_k라 할 때, 극한값 $\lim_{n\to\infty}\frac{S_1^2+S_2^2+\cdots+S_n^2}{n+1}$을 구하시오.

(오른쪽 그림은 $n=3$인 경우이다.)

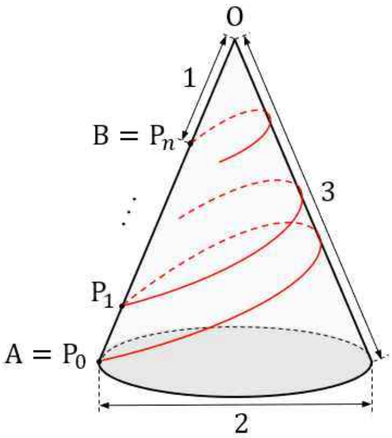
8번 문항 (2020 연세대 논술기출)

그림과 같이 $\overline{AC}=1$, $\overline{BC}=a$ $(a>0)$이고 $\angle \mathrm{BCA}=\frac{\pi}{2}$인 삼각형 ABC가 있다. 자연수 n에 대하여 선분 CA를 n등분한 각 분점을 점 C에서 가까운 것부터 차례로 $\mathrm{P_0}(=\mathrm{C}), \mathrm{P_1}, \mathrm{P_2}, \cdots, \mathrm{P_{n-1}}, \mathrm{P_n}(=\mathrm{A})$ 이라 하자. $1 \leq k \leq n$인 자연수 k에 대하여 선분 $\mathrm{BP_k}$에 내린 수선의 발을 $\mathrm{Q_k}$라 하고, 선분 $\mathrm{CQ_k}$의 길이를 h_k라 하자. h_k의 평균을 H_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} H_n$을 구하시오.



9번 문항 (2020 서강대 모의논술)

아래 그림과 같이 모선의 길이가 3이고 밑면의 지름의 길이가 2인 직원뿔 모양의 산이 있다. 원뿔의 한 모선이 밑면과 만나는 점을 출발점 $\mathrm{A}=\mathrm{P}_0$, 이 모선 위에서 정상으로부터 1만큼 떨어진 점을 도착점 B라고 하자. 선분 AB를 n등분한 점에 n개의 전망대 $\mathrm{P}_1, \cdots, \mathrm{P}_n=\mathrm{B}$가 있다(단, n은 1보다 큰 자연수). 또한, A를 출발하여 전망대 $\mathrm{P}_1, \cdots, \mathrm{P}_{n-1}$을 차례로 거쳐 B에 도착하는 경로가 있다. 이때, 두 지점 P_{k-1}과 P_k $(k=1, \cdots, n)$ 사이의 경로는 산 주위를 한 바퀴 회전하면서 두 지점을 최단 거리로 잇는다.



[1] n보다 작거나 같은 자연수 k에 대하여 P_{k-1}과 P_k를 잇는 경로의 길이를 L_k라 할 때 $L_k=\sqrt{\dfrac{12}{n^2}k^2-\left(\dfrac{36}{n}+\dfrac{12}{n^2}\right)k+27+\dfrac{18}{n}+\dfrac{4}{n^2}}$ 임을 보이시오.

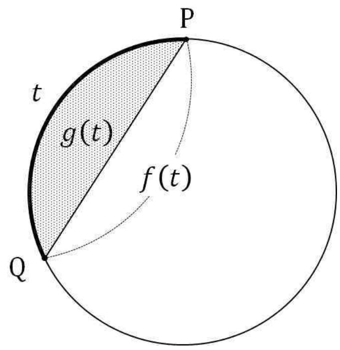
[2] 문항 [1]에서 정의한 L_k에 대하여, 극한값 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{L_k^2}{n}$ 을 구하시오.

[3] 두 점 P_0와 P_1을 잇는 경로 위의 점 중에서 밑면으로부터의 높이가 최대인 점을 Q_n이라고 하고, 점 Q_n의 밑면으로부터의 높이를 h_n이라고 하자. h_n을 n에 대한 식으로 나타내고, 극한값 $\lim\limits_{n\to\infty}h_n$을 구하시오.

[4] 원뿔의 꼭짓점을 O라고 하고 문항 [3]에서 정의한 점 Q_n과 높이 h_n에 대하여 $a_n=\overline{\mathrm{OQ}_n}\times h_n^2$이라고 할 때, $n\geq 2$인 모든 자연수 n에 대하여 $a_n>a_{n+1}$임을 보이시오.

10번 문항 (2022 한양대 논술기출)

<가> 오른쪽 그림과 같이 반지름의 길이가 1인 원 위의 두 점 P, Q를 잇는 한 호 PQ의 길이를 t라고 할 때, 현 PQ의 길이를 $f(t)$, 현 PQ와 길이가 t인 호 PQ로 둘러싸인 도형의 넓이를 $g(t)$라고 하자.

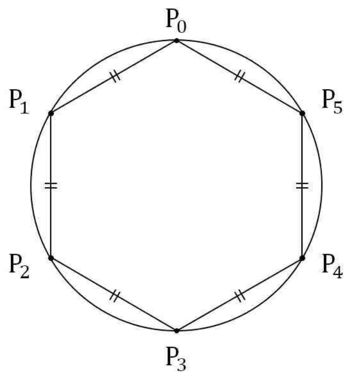


<나> 반지름의 길이가 1인 원 위에 서로 다른 n개의 점 $P_0, P_1, \cdots, P_{n-1}$이 순서대로 놓여 있고,

$$\overline{P_0P_1} = \overline{P_1P_2} = \cdots = \overline{P_{n-2}P_{n-1}} = \overline{P_{n-1}P_0}$$

을 만족시킨다.

예를 들어, 오른쪽 그림은 $n=6$인 경우이다.



[1] 제시문 <나>에서 주어진 n개의 점 $P_0, P_1, \cdots, P_{n-1}$에 대하여 극한값

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\overline{P_0P_1} + \overline{P_0P_2} + \cdots + \overline{P_0P_{n-1}}}{n}$$

을 구하시오.

[2] 제시문 <나>에서 주어진 n개의 점 $P_0, P_1, \cdots, P_{n-1}$에 대하여 호 P_0P_1과 현 P_0P_1로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_1, 호 P_0P_2와 현 P_0P_2로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_2, $\cdots$, 호 P_0P_{n-1}과 현 P_0P_{n-1}로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_{n-1}이라 하자. 극한값

$$\lim_{n \to \infty} \frac{{S_1}^2 + {S_2}^2 + \cdots + {S_{n-1}}^2}{n}$$

을 구하시오. (단, $S_1 < S_2 < \cdots < S_{n-1}$이 되도록 호를 선택한다.)

11번 문항 (2018 서강대 논술기출)

(1). $a_n = \sqrt[n]{\frac{(3n)!}{(2n)!n^n}}$ 일 때, $\lim_{n\to\infty} \ln a_n$의 값을 구하시오.

(2). $x > 4$ 일 때, $\sqrt{x} > \ln x$ 가 성립함을 보이고, 이를 이용하여 $\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n} = 0$ 임을 보이시오.

(3) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{n+1-k}{n}\ln\left(\frac{n+k}{n}\right)\right\} = \int_0^1 (1-x)\ln(1+x)dx$ 임을 보이시오.

(4). $a_n = (n+1)^n(n+2)^{n-1}(n+3)^{n-2}\cdots(2n-1)^2(2n)$ 일 때, $\lim_{n\to\infty}\ln\left(\frac{\sqrt[n^2]{a_n}}{\sqrt{n}}\right)$의 값을 구하시오.

12번 문항 (2019 이화여대 논술기출)

양의 실수 a에 대하여 $g(x)=\dfrac{1}{1+ax^2}$이고, 실수 전체의 미분가능한 함수 $f(x)$가 아래 조건을 만족시킨다.

$f'(x)=g(x)+xg'(x)$, $f(0)=0$

다음 물음에 답하시오.

(1) 함수 $f(x)$를 구하시오.

(2) 함수 $f(x)$의 최댓값을 $M(a)$라고 할 때, $M(a)$를 구하시오.

(3) $M(a)$에 대하여 다음 극한값을 구하시오.

$$\lim_{x\to\infty}\left[M(n)\sum_{k=1}^{n}\{M(n)-M(n+k)\}\right]$$

13번 문항 (2018 중앙대학교 논술기출)

다음 극한을 구하시오.

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^3}{n^4\cos^2\left(\frac{\pi k^2}{4n^2}\right)}$$

14번 문항 (2018 중앙대학교 논술기출)

다음 극한을 구하시오.

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\int_{0}^{\pi} e^{-nx}\sin(kx)\,dx$$

15번 문항 (2015 한양대학교 논술기출)

수열 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 에 대하여 $a_n \neq 0$, $b_n > 0$ 를 만족시킬 때, A_n, B_n 을 다음과 같이 정의한다.

$$A_n = \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{2^n a_n}\ln(1+x)\right)dx\,, \quad B_n = \int_0^1 \pi\,(b_n)^2\, 2^{-2nx}\,dx$$

(1). 모든 자연수 n 에 대하여 $A_n = 2\pi$ 로 일정할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 이 수렴하는지를 보이고,

수렴하면 그 값을 구하시오.

(2). 모든 자연수 n 에 대하여 $B_n = 2\pi$ 로 일정할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 과 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{\sqrt{n}}$ 수렴하는지를

보이고,

수렴하면 그 값을 구하시오.

16번 문항 (2021 중앙대학교 논술기출)

다음 극한을 구하시오.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n}+1)^4+(\sqrt{n}+2)^4+(\sqrt{n}+3)^4+\cdots+(\sqrt{n}+n)^4}{(n+1)^4+(n+2)^4+(n+3)^4+\cdots+(2n)^4}$$

17번 문항 (2022 한양대학교 모의논술)

연속함수 $f(x)$는 다음 식을 만족시킨다.

$$\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) - n\int_0^1 f(x)dx = n\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}\left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right)dx$$

극한값 $\lim_{n\to\infty}\left[\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} n\left(\frac{k-1}{n}\right)^4\left(\frac{k}{n}-x\right)dx\right]$와 $\lim_{n\to\infty}\left[\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} n\left(\frac{k}{n}\right)^4\left(\frac{k}{n}-x\right)dx\right]$을 구하시오.

18번 문항 (2022 한양대학교 모의논술)

연속함수 $f(x)$는 다음 식을 만족시킨다.

$$\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) - n\int_{0}^{1} f(x)dx = n\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}\left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right)dx$$

극한값 $\lim_{n\to\infty}\left[\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^{5} - n\int_{0}^{1} x^{5}\,dx\right]$을 구하시오.

1번 문항 해설

1. 정답 : $\dfrac{1}{1120}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}k^6}{\sum_{k=1}^{2n}k^2\sum_{k=2n+1}^{4n}k^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^7}\sum_{k=1}^{n}k^6}{\left(\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{2n}k^2\right)\left(\frac{1}{n^4}\sum_{k=2n+1}^{4n}k^3\right)}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^6}{\left\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{2n}\left(\frac{k}{n}\right)^2\right\}\left\{\frac{1}{n}\sum_{k=2n+1}^{4n}k^3\right\}}=\frac{\int_0^1 x^6dx}{\left(\int_0^2 x^2dx\right)\left(\int_2^4 x^3dx\right)}=\frac{1}{1120}$$

2번 문항 해설

로그의 성질을 이용하여 간단히 하면

$$\begin{aligned}\ln\{(2n)!\}-n\ln n-\ln(n!)&=\ln 2n+\ln(2n-1)+\ln(2n-2)+\cdots+\ln(n+1)-n\ln n\\&=(\ln 2n-\ln n)+\{\ln(2n-1)-\ln n\}+\cdots+\{\ln(n+1)-\ln n\}\\&=\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)\end{aligned}$$

이다. 따라서

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\{(2n)!\}-n\ln n-\ln(n!)}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)=\int_1^2\ln x\,dx$$

이고, 부분적분하면

$$\int_1^2\ln x\,dx=[x\ln x-x]_1^2=2\ln 2-1$$

3번 문항 해설

함수 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ 의 그래프를 생각하면, 다음 부등식이 성립한다.

$$\int_1^{n+1}\frac{1}{\sqrt{x}}dx \le \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}} \le 1+\int_1^{n}\frac{1}{\sqrt{x}}dx$$

$$\Rightarrow\ 2\left(\sqrt{n+1}-1\right) \le \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}} \le 1+2\left(\sqrt{n}-1\right)$$

각 변에 $\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ 을 곱한 후에 극한 $\lim\limits_{n\to\infty}$ 을 취하면,

$$2=\lim_{n\to\infty}\frac{2\left(\sqrt{n+1}-1\right)}{\sqrt{n}} \le \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}} \le \lim_{n\to\infty}\frac{1+2\left(\sqrt{n}-1\right)}{\sqrt{n}}=2\text{ 이다.}$$

그러므로 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{\sqrt{k}}=2$ 이다.

(나침반 다른 풀이)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{k}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{\frac{k}{n}}}=\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x}}dx=\left[2\sqrt{x}\,\right]_0^1=2$$

4번 문항 해설

$f(x)=\dfrac{1}{1+x}$ 는 $[0,\ 1]$ 에서 연속함수이다.

$x_n=\dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{2n}\dfrac{2n}{2n+2k-1}=\dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{2n}\dfrac{1}{1+\dfrac{2k-1}{2n}}=\dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{2n}f\left(\dfrac{2k-1}{2n}\right)$ 이다.

$\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{2n}f\left(\dfrac{2k-1}{2n}\right)=\int_0^2 f(x)\,dx=\int_0^2\dfrac{1}{1+x}\,dx=\ln 3$

5번 문항 해설

정답 : (1) 해설참조 (2) ln2

(1) $x \neq -1$이므로

$$1+\sum_{k=1}^{2n-1}(-x)^k = 1+\frac{-x\left(1-(-x)^{2n-1}\right)}{1-(-x)} = \frac{1+x-x-x^{2n}}{1+x} = \frac{1-x^{2n}}{1+x}$$

이고

$$1+\sum_{k=1}^{2n}(-x)^k = 1+\frac{-x\left(1-(-x)^{2n}\right)}{1-(-x)} = \frac{1+x-x+x^{2n+1}}{1+x} = \frac{1+x^{2n+1}}{1+x}$$

이다. 한편 $0 \leqq x \leqq 1$이면, $1-x^{2n} \leqq 1 \leqq 1+x^{2n+1}$이고, $1+x>0$이므로 다음이 성립한다.

$$\frac{1-x^{2n}}{1+x} \leq \frac{1}{1+x} \leqq \frac{1+x^{2n+1}}{1+x}$$

따라서

$$1+\sum_{k=1}^{2n-1}(-x)^k \leqq \frac{1}{1+x} \leqq 1+\sum_{k=1}^{2n}(-x)^k$$

이다.

(2) a_n은 적분을 이용하여 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$a_n = \sum_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^{k+1}}{k} = \sum_{k=1}^{2n}\int_0^1(-x)^{k-1}dx = \int_0^1\left(1+\sum_{k=1}^{2n-1}(-x)^k\right)dx$$

따라서 문항 (1)의 첫 번째 부등식에 의해

$$a_n \leq \int_0^1\frac{1}{x+1}dx = \ln 2$$

이다. 또한,

$$a_n = \int_0^1\left(1+\sum_{k=1}^{2n-1}(-x)^k\right)dx = \int_0^1\left(1+\sum_{k=1}^{2n}(-x)^k\right)dx - \int_0^1 x^{2n}dx = \int_0^1\left(1+\sum_{k=1}^{2n}(-x)^k\right)dx - \frac{1}{2n+1}$$

이므로, 문항 (1)의 두 번째 부등식에 의해

$$a_n \geqq \int_0^1\frac{1}{x+1}dx - \frac{1}{2n+1} = \ln 2 - \frac{1}{2n+1}$$ 이다.

따라서 $\ln 2 - \frac{1}{2n+1} \leqq a_n \leqq ln2$이므로

수열의 극한값의 대소 관계에 의해서 $\lim_{n\to\infty}a_n = \ln 2$이다.

6번 문항 해설

$p(x)$의 최고차항의 계수는 1이고, 함수 $|\sin(\pi x)|p(x)$는 2이상의 자연수 n에 대하여 구간 $(-n, 0)$에서 미분 가능한 최소다항식이므로

$$p(x)=(x+1)(x+2)(x+3)\cdots(x+n-1)$$

이다. 또한

$$\begin{aligned} a_n &= \int_0^1 \ln p(x)dx = \int_0^1 \ln(x+1)(x+2)(x+3)\cdots(x+n-1)dx \\ &= \int_0^1 \ln(x+1)dx + \int_0^1 \ln(x+2)dx + \cdots + \int_0^1 \ln(x+n-1)dx \\ &= \sum_{k=1}^{n-1}\int_0^1 \ln(x+k)dx = \sum_{k=1}^{n-1}\left[(x+k)\ln(x+k)-(x+k)\right]_0^1 \\ &= \sum_{k=1}^{n-1}\{(1+k)\ln(1+k)-k\ln k-1\} = n\ln n-(n-1) \end{aligned}$$

이다. 따라서

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(a_n-\sum_{k=1}^{n}\ln(n+k)\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left\{n\ln n-(n-1)-\sum_{k=1}^{n}\ln(n+k)\right\}\cdots ㉠$$

이고, $\sum_{k=1}^{n}\ln(n+k)=\sum_{k=1}^{n}\ln n\left(1+\frac{k}{n}\right)=n\ln n+\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)$이므로 ㉠은 다음과 같다.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left\{n\ln n-(n-1)-n\ln n-\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)\right\}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left\{-(n-1)-\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)\right\}$$

한편,

(i) $\lim_{n\to\infty}\frac{-(n-1)}{n}=-1$

(iii) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left\{\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)\right\}=\int_1^2 \ln x\,dx=2\ln 2-1$

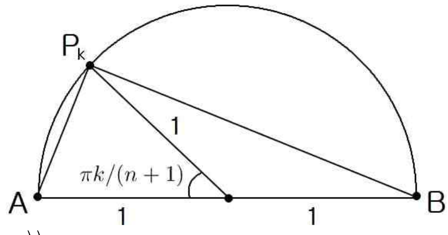
이다. 그러므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(a_n-\sum_{k=1}^{n}\ln(n+k)\right)=-2\ln 2$$

이다.

7번 문항 해설

오른쪽 그림에서



$\overline{\mathrm{AP}_k} = 1^2 + 1^2 - 2\times1\times1\times\cos\left(\frac{\pi}{n+1}k\right) = 2 - 2\cos\left(\frac{\pi}{n+1}k\right)$

$\overline{\mathrm{P}_k\mathrm{B}}^2 = 4 - \overline{\mathrm{AP}_k}^2 = 2 + 2\cos\left(\frac{\pi}{n+1}k\right)$ 이고, 따라서

$$S_k^2 = \left(\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AP}_k}\times\overline{\mathrm{P}_k\mathrm{B}}\right)^2 = \frac{1}{4}\left(2-2\cos\left(\frac{\pi}{n+1}k\right)\right)\left(2+2\cos\left(\frac{\pi}{n+1}k\right)\right)$$
$$= \sin^2\left(\frac{\pi}{n+1}k\right)$$

이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_1^2+S_2^2+\cdots+S_n^2}{n+1} = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\sin^2\left(\frac{\pi}{n+1}k\right)\frac{1}{n+1} = \lim_{n+1\to\infty}\sum_{k=1}^{n+1}\sin^2\left(\frac{\pi}{n+1}k\right)\frac{1}{n+1}$$
$$= \lim_{n+1\to\infty}\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n+1}\sin^2\left(0+\frac{\pi-0}{n+1}k\right)\frac{\pi-0}{n+1} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin^2 t\,dt$$

이고, 부분적분법에 의해 $\int\sin^2 t\,dt = \frac{1}{2}(t-\cos t\sin t)+C$이므로,

구하는 값은 $\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin^2 t\,dt = \frac{1}{2\pi}\left[t-\cos t\sin t\right]_0^{\pi} = \frac{1}{2}$

8번 문항 해설

정답 : $a\left(\sqrt{a^2+1}-a\right)$

삼각형 P_kBC의 넓이를 두 가지 방법으로 계산하면,

$h_k \times \sqrt{a^3+\left(\frac{k}{n}\right)^2} = a \times \frac{k}{n}$이므로

$h_k = \frac{ak}{n} \times \frac{1}{\sqrt{a^2+\left(\frac{k}{n}\right)^2}}$가 된다.

따라서 $H_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} h_k = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{ak}{n}\frac{1}{\sqrt{a^2+\left(\frac{k}{n}\right)^2}}$이고,

$$\lim_{n\to\infty} H_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{ak}{n}\frac{1}{\sqrt{a^2+\left(\frac{k}{n}\right)}} = \int_0^1 \frac{ax}{\sqrt{a^2+x^2}}dx = a\left(\sqrt{a^2+1}-a\right)$$

이 된다.

[별해]

$\mathrm{A}(a,1), \mathrm{B}(0,0), \mathrm{C}(a,0)$라고 하면, $\mathrm{P_k}\left(a,\frac{k}{n}\right)$이고

직선 $\mathrm{OP_k}$는 $kx-any=0$이므로 $h_k = \frac{ak}{\sqrt{k^2+a^2n^2}}$

따라서 $H_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{ak}{\sqrt{k^2+a^2n^2}}$

$$\lim_{n\to\infty} H_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{ak}{\sqrt{k^2+a^2n^2}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{ak}{n}\frac{1}{\sqrt{a^2+\left(\frac{k}{n}\right)}}$$

$$= \int_0^1 \frac{ax}{\sqrt{a^2+x^2}}dx = a\left(\sqrt{a^2+1}-a\right)$$

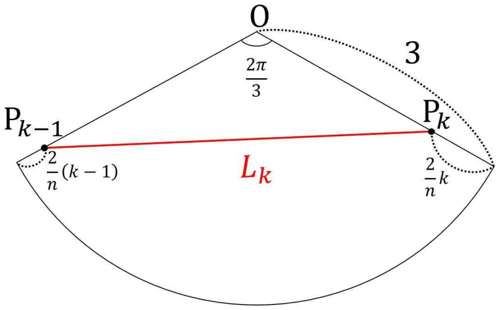
따라서 $\lim_{n\to\infty}\ln a_n = \int_0^1 \ln(2+x)dx = \int_2^3 \ln t\, dt$

$= [t\ln t]_2^3 - \int_2^3 t\frac{1}{t}dt$

$= (3\ln 3 - 2\ln 2) - 1 = \ln\frac{27}{4e}$

9번 문항 해설

[1]



P_{k-1}과 P_k 사이의 최단 경로는 그림과 같이 원뿔의 옆면을 펼쳐서 생기는 부채꼴에서, 부채꼴을 이루는 서로 다른 반지름 위에 있는 P_{k-1}과 P_k를 선분으로 연결한 것이다. 이때, 부채꼴의 반지름의 길이는 원뿔의 모선의 길이와 같으므로 3이고, 호의 길이가 밑면의 원주인 2π와 같으므로 중심각은 $\frac{2\pi}{3}$이다.

$\triangle \mathrm{OP}_{k-1}\mathrm{P}_k$에서 코사인법칙을 이용하면,

$$\begin{aligned} L_k^2 &= \left\{3-\frac{2}{n}(k-1)\right\}^2+\left(3-\frac{2}{n}k\right)^2-2\left\{3-\frac{2}{n}(k-1)\right\}\left(3-\frac{2}{n}k\right)\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) \\ &= \frac{12}{n^2}k^2-\left(\frac{36}{n}+\frac{12}{n^2}\right)k+27+\frac{18}{n}+\frac{4}{n^2} \end{aligned}$$

이므로 $L_k=\sqrt{\frac{12}{n^2}k^2-\left(\frac{36}{n}+\frac{12}{n^2}\right)k+27+\frac{18}{n}+\frac{4}{n^2}}$ 이다.

[2]

$\sum_{k=1}^{n}\frac{L_k^2}{n}=\frac{12}{n^3}\times\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-\left(\frac{36}{n^2}+\frac{12}{n^3}\right)\frac{n(n+1)}{2}+27+\frac{18}{n}+\frac{4}{n^2}$ 이므로

$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{L_k^2}{n}=4-18+27=13$이다.

[3]

부채꼴의 호 위의 임의의 점 R에 대하여 두 선분 OR과 $\mathrm{P}_0\mathrm{P}_1$의 교점을 Q라고 하자. 밑면으로부터의 높이는 $\frac{2\sqrt{2}}{3}\overline{\mathrm{QR}}$이므로 $\overline{\mathrm{QR}}$이 최대일 때, 즉, $\overline{\mathrm{OQ}}$가 최소일 때, 높이가 최대가 된다. 따라서, 높이가 최대가 되게 하는 점 Q_n은 O에서 선분 $\mathrm{P}_0\mathrm{P}_1$에 내린 수선의 발이다.

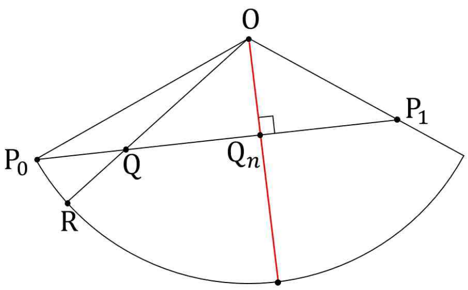
$\overline{\mathrm{OQ}_n}=b_n$이라고 놓자. 삼각형 $\mathrm{OP}_0\mathrm{P}_1$의 넓이로부터 $\frac{1}{2}L_1b_n=\frac{1}{2}\times3\left(3-\frac{2}{n}\right)\times\sin\frac{2\pi}{3}$를 얻게 되어

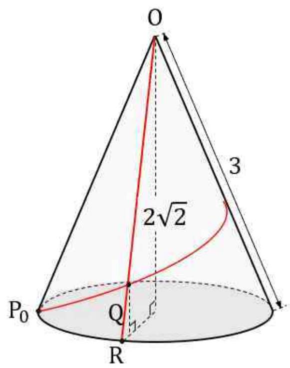
$$b_n=\frac{3\sqrt{3}}{2L_1}\left(3-\frac{2}{n}\right)=\frac{3\sqrt{3}}{2}\left(3-\frac{2}{n}\right)\frac{n}{\sqrt{27n^2-18n+4}}$$

이다. 따라서,

$$h_n = \frac{2\sqrt{2}}{3}(3-b_n) = \frac{2\sqrt{2}}{3}\left\{3-\frac{3\sqrt{3}}{2}\left(3-\frac{2}{n}\right)\frac{n}{\sqrt{27n^2-18n+4}}\right\}$$

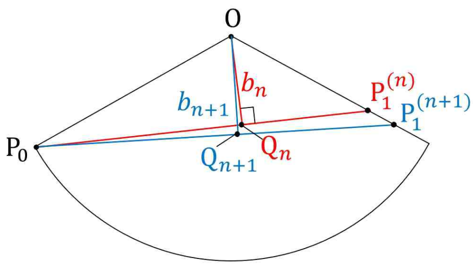
이고 $\lim_{n\to\infty} h_n = \frac{2\sqrt{2}}{3}\left(3-\frac{3\sqrt{3}}{2}\times\frac{3}{\sqrt{27}}\right) = \sqrt{2}$ 이다.





[4]

n이 커지면 $\overline{\mathrm{OP_1}}$가 길어지므로 $\angle \mathrm{OP_0P_1}$이 커진다. 선분 AB를 n등분했을 때, $\mathrm{P_1}$을 $\mathrm{P_1^{(n)}}$으로 나타내면 $b_n = 3\sin\left(\angle \mathrm{OP_0P_1^{(n)}}\right)$이다. $n \geq 2$인 모든 자연수 n에 대하여, $0 < \angle \mathrm{OP_0P_1^{(n)}} < \frac{\pi}{6}$이고 사인함수는 구간 $\left(0, \frac{\pi}{6}\right)$에서 증가한다. 따라서, $b_n < b_{n+1}$이다. 또한,



$b_2 = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{19}} > 1$이고 $\lim_{n\to\infty} b_n = \frac{3}{2}$이므로, $n \geq 2$인 모든 자연수 n에 대하여 $b_n \in \left(1, \frac{3}{2}\right)$이다.

한편, $a_n = \frac{8}{9}b_n(3-b_n)^2$이므로, $f(x) = x(3-x)^2$이라고 하면 $a_n = \frac{8}{9}f(b_n)$이다.

$f'(x) = 3(x-1)(x-3)$이므로, 구간 $\left(1, \frac{3}{2}\right)$에서 $f'(x) < 0$가 되어 f는 감소한다.

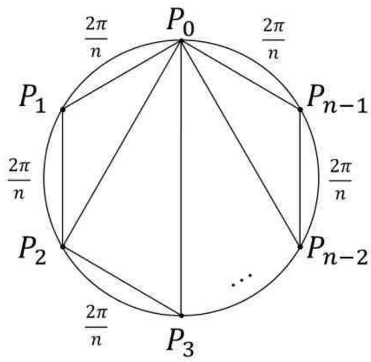
따라서, $a_n > a_{n+1}$이다.

10번 문항 해설

[1] 1번에서 구한 $f(t)$에 대하여,

$$\overline{\mathrm{P_0P_1}}=f\left(\frac{2\pi}{n}\right),\ \overline{\mathrm{P_0P_2}}=f\left(\frac{2\pi}{n}\times 2\right),$$

$$\cdots,\ \overline{\mathrm{P_0P}_{n-1}}=f\left(\frac{2\pi}{n}\times(n-1)\right)$$



이고, $f\left(\frac{2\pi}{n}\times n\right)=f(2\pi)=0$ 이므로,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\overline{\mathrm{P_0P_1}}+\cdots+\overline{\mathrm{P_0P}_{n-1}}}{n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n-1}f\left(\frac{2\pi}{n}\times k\right)\frac{1}{n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\sum_{k=1}^{n-1}f\left(\frac{2\pi}{n}\times k\right)\frac{1}{n}+f\left(\frac{2\pi}{n}\times n\right)\frac{1}{n}\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{2\pi}{n}\times k\right)\frac{1}{n}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f\left(0+\frac{2\pi-0}{n}\times k\right)\frac{2\pi-0}{n}\times\frac{1}{2\pi}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(t)\,dt$$

이고, $f(t)=2\sin\frac{t}{2}$ 이므로 $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(t)\,dt=\frac{4}{\pi}$ 이다.

(별해)

함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a,b]$에서 연속이면

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f(x_k)\Delta x=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n-p}f(x_k)\Delta x=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n+p}f(x_k)\Delta x=\int_a^b f(x)\,dx$$ (단, p는 자연수)

이다. 즉, ∞에 대해서 유한인 상수 p는 영향을 받지 않는다. 따라서

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\overline{\mathrm{P_0P_1}}+\cdots+\overline{\mathrm{P_0P}_{n-1}}}{n}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n-1}f\left(\frac{2\pi}{n}\times k\right)\frac{1}{n}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(t)\,dt$$

[2] 1번에서 구한 $g(t)$에 대하여,

$$S_1=g\left(\frac{2\pi}{n}\right),\ S_2=g\left(\frac{2\pi}{n}\times 2\right),\ \cdots,\ S_{n-1}=g\left(\frac{2\pi}{n}\times(n-1)\right)$$

이고, $g\left(\frac{2\pi}{n}\times n\right)=g(2\pi)=\pi$ 이므로,

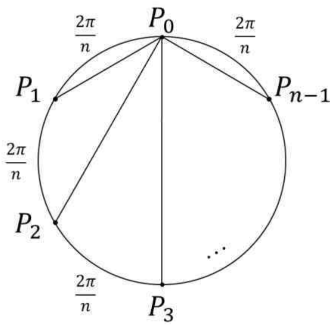
$$\lim_{n\to\infty}\frac{{S_1}^2+\cdots+{S_{n-1}}^2}{n}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\left\{g\left(\frac{2\pi}{n}\times k\right)\right\}^2\frac{1}{n}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\sum_{k=1}^{n}\left\{g\left(\frac{2\pi}{n}\times k\right)\right\}^2\frac{1}{n} - \left\{g\left(\frac{2\pi}{n}\times n\right)\right\}^2\frac{1}{n}\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\sum_{k=1}^{n}\left\{g\left(0+\frac{2\pi-0}{n}\times k\right)\right\}^2\frac{2\pi-0}{n}\times\frac{1}{2\pi}\right] - \lim_{n\to\infty}\frac{\pi^2}{n}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\{g(t)\}^2\,dt - 0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left\{\frac{1}{2}(t-\sin t)\right\}^2 dt$$

$$= \frac{1}{8\pi}\int_0^{2\pi}(t^2 - 2t\sin t + \sin^2 t)\,dt$$



이다.

부분적분에 의해

$$\int t\sin t\,dt = -t\cos t + \sin t + C_1, \qquad \int \sin^2 t\,dt = \frac{1}{2}(t - \cos t\sin t) + C_2$$

를 구하고, 따라서

$$\frac{1}{8\pi}\int_0^{2\pi}(t^2 - 2t\sin t + \sin^2 t)\,dt = \frac{1}{8\pi}\left[\frac{1}{3}t^3 - 2(-t\cos t + \sin t) + \frac{1}{2}(t - \cos t\sin t)\right]_0^{2\pi}$$

$$= \frac{1}{8\pi}\left(\frac{8}{3}\pi^3 + 5\pi\right) = \frac{\pi^2}{3} + \frac{5}{8}.$$

11번 문항 해설

정답 : (1) $\ln\frac{27}{4e}$ (2) 0 (3) 해설참조 (4) $2\ln 2-\frac{5}{4}$

(1) $a_n=\sqrt[n]{\frac{(3n)!}{(2n)!n^n}}$ 이므로

$$\begin{aligned}\ln a_n &= \frac{1}{n}\ln\frac{(2n+1)(2n+2)\cdots(3n)}{n^n}\\ &= \frac{1}{n}\ln\left(2+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{2}{n}\right)\cdots\left(2+\frac{n}{n}\right)\\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(2+\frac{k}{n}\right)\end{aligned}$$

(2) $f(x)=\sqrt{x}-\ln x$라 하면, $x>4$ 일 때 $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{x}=\frac{\sqrt{x}-2}{2x}>0$이다.

따라서 $f(x)$는 $[4,\infty)$에서 증가한다.

$f(4)=\sqrt{4}-\ln 4=2(1-\ln 2)>0$ 이므로 모든 $x>4$에 대해 $f(x)=\sqrt{x}-\ln x>0$이 성립한다.

$n>4$에 대해 $0<\frac{\ln n}{n}=\frac{1}{\sqrt{n}}\frac{\ln x}{\sqrt{n}}<\frac{1}{\sqrt{n}}$ 이고

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=0$ 이므로 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n}=0$ 이다.

(3)

$$\begin{aligned}&\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{n+1-k}{n}\ln\frac{n+k}{n}\right)\\ &=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{n-k}{n}\ln\frac{n-k}{n}\right)+\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\ln\frac{n+k}{n}\end{aligned}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{n-k}{n}\ln\frac{n+k}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left\{\left(1-\frac{k}{n}\right)\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)\right\}=\int_0^1(1-x)\ln(1+x)dx$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{n}\ln\frac{n+k}{n}\right)1=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{n}\times\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)\right\}=\left(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\right)\times\int_0^1\ln(1+x)dx=0\times ln\frac{4}{e}=0$$

$$\because \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{n+1-k}{n}\ln\left(\frac{n+k}{n}\right)\right\}=\int_0^1(1-x)\ln(1+x)dx$$

(4)

$$\begin{aligned}\ln a_n &= n\ln(n+1)+(n-1)\ln(n+2)+\cdots ln(2n)\\ &=\sum_{k=1}^{n}(n+1-k)\ln(n+k)\\ &=\sum_{k=1}^{n}\left\{(n+1-k)\ln\frac{n+k}{n}\right\}+\frac{n(n+1)}{2}\ln n\end{aligned}$$

이므로

$$\ln\frac{\sqrt[n^2]{a_n}}{\sqrt{n}}=\frac{1}{n^2}\ln a_n-\frac{1}{2}\ln n$$
$$=\frac{1}{n^2}\left\{\frac{n(n+1)}{2}\ln n+\sum_{k=1}^{n}(n+1-k)\ln\frac{n+k}{n}\right\}-\frac{\ln n}{2}$$
$$=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{n+1-k}{n}\ln\frac{n+k}{n}\right)+\frac{1}{2n}\ln n$$

(2)에 의해 $\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n}=0$ 이고, (3)에 의해

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{n+1-k}{n}\ln\left(\frac{n+k}{n}\right)\right\}=\int_0^1(1-x)\ln(1+x)dx$$ 이므로

$$\lim_{n\to\infty}\ln\frac{\sqrt[n^2]{a_n}}{\sqrt{n}}=\int_0^1(1-x)\ln(1+x)dx=\int_1^2(2-t)\ln t\,dt$$ 이다.

$$\int_1^2(2-t)\ln t\,dt=\left[\left(2t-\frac{t^2}{2}\right)\ln t\right]_1^2-\int_1^2\left(2t-\frac{t^2}{2}\right)\frac{1}{t}dt=\left[\left(2t-\frac{t^2}{2}\right)\ln t\right]_1^2-\left[2t-\frac{t^2}{4}\right]_1^2=2\ln 2-\frac{5}{4}$$

따라서, $\lim_{n\to\infty}\ln\frac{\sqrt[n^2]{a_n}}{\sqrt{n}}=\int_0^1(1-x)\ln(1+x)dx=2\ln 2-\frac{5}{4}$ 이다.

12번 문항 해설

정답 : (1) $f(x)=\dfrac{x}{1+ax^2}$ (2) $M(a)=\dfrac{1}{2\sqrt{a}}$ (3) $\dfrac{1}{4}(3-2\sqrt{2})$

(1) 주어진 도함수 $f'(x)$에 대한 적분을 다음과 같이 분리하면

$$\begin{aligned}\int f'(x)dx &= \int g(x)+xg'(x)dx \\ &= \int g(x)dx+\int xg'(x)dx\end{aligned}$$

이고, 부분적분법을 이용하면 $f(x)=\dfrac{x}{1+ax^2}+C$ 를 구할 수 있다.

주어진 조건 $f(0)=0$으로부터 $C=0$이므로 $f(x)=\dfrac{x}{1+ax^2}$이다.

(2) $x\leqq 0$일 때, $f(x)\leqq 0$, $x>0$일 때 $f(x)>0$이다.
그러므로 $f(x)$의 최댓값은 $x>0$의 범위에서 찾으면 된다.

$f'(x)=\dfrac{1-ax^2}{(1+ax^2)^2}$이므로, $f(x)$의 증감표를 그려보면 $x=\dfrac{1}{\sqrt{a}}$에서 극댓값을 가짐을 확인할 수 있다.

따라서 함수 $f(x)$는 $x=\dfrac{1}{\sqrt{a}}$일 때 최댓값 $M(a)=\dfrac{1}{2\sqrt{a}}$을 갖는다.

(3)과 (2)에 의해 $M(n)\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\{M(n)-M(n+k)\}=\frac{1}{4}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(1-\frac{1}{\sqrt{1+\frac{k}{n}}}\right)$ 이고,

구분구적법에 의해 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}M(n)\sum_{k=1}^{n}\{M(n)-M(n+k)\}=\frac{1}{4}\int_0^1\left(1-\frac{1}{\sqrt{1+t}}\right)dt=\frac{1}{4}(3-2\sqrt{2})$ 이다.

13번 문항 해설

정답 : $\frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi^2}\ln 2$

식을 변형하면 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\left(\frac{k}{n}\right)^2}{\cos^2\left(\frac{\pi}{4}\left(\frac{k}{n}\right)^2\right)}\frac{1}{n}$이 되고, 구분구적법에 의해 $\int_0^1\frac{x^2}{\cos^2\left(\frac{\pi}{4}x^2\right)}dx$와

같다.

$y=x^2$로 치환하면 $\int_0^1\frac{x^2}{\cos^2\left(\frac{\pi}{4}x^2\right)}dx=\int_0^1\frac{\frac{1}{2}y}{\cos^2\left(\frac{\pi}{4}y\right)}dy$

$z=\frac{\pi}{4}y$로 치환하면 $\int_0^1\frac{\frac{1}{2}y}{\cos^2\left(\frac{\pi}{4}y\right)}dy=\frac{8}{\pi^2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{z}{\cos^2 z}dz$

$\frac{d(\tan z)}{dz}=\frac{1}{\cos^2 z}$를 이용한 부분적분을 통해 계산하면

$$\frac{8}{\pi^2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{z}{\cos^2 z}dz=\frac{8}{\pi^2}\left\{[z\tan z]_0^{\frac{\pi}{4}}-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan z\,dz\right\}$$

$\tan z=\frac{\sin z}{\cos z}$이므로 $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan z\,dz=[-\ln(\cos x)]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{2}\ln 2$가 되고,

이를 적용하면 $\frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi^2}\ln 2$이 얻어진다.

14번 문항 해설

정답 : $\dfrac{\ln 2}{2}$

우선 부분적분을 두 번 적용하여 다음을 얻는다.

$$\begin{aligned}\int_0^\pi e^{-nx}\sin(kx)dx &= \left[-\frac{1}{n}e^{-nx}\sin(kx)\right]_0^\pi - \int_0^\pi\left(-\frac{1}{n}e^{-nx}\right)k\cos(kx)dx \\ &= \frac{k}{n}\int_0^\pi e^{-nx}\cos(kx)dx \\ &= \frac{k}{n}\left[-\frac{1}{n}e^{-nx}\cos(kx)\right]_0^\pi - \frac{k}{n}\int_0^\pi\left(-\frac{1}{n}e^{-nx}\right)(-k\sin(kx))dx \\ &= -\frac{e^{-n\pi}k\cos(k\pi)}{n^2} + \frac{k}{n^2} - \frac{k^2}{n^2}\int_0^\pi e^{-nx}\sin(kx)dx\end{aligned}$$

위 식을 정리하면 $\displaystyle\int_0^\pi e^{-nx}\sin(kx)dx = \frac{k}{n^2+k^2} - \frac{e^{-n\pi}k\cos(k\pi)}{n^2+k^2}$ 이므로

$$\sum_{k=1}^n\int_0^\pi e^{-nx}\sin(kx)dx = \sum_{k=1}^n\frac{k}{n^2+k^2} - \sum_{k=1}^n\frac{e^{-n\pi}k\cos(k\pi)}{n^2+k^2}$$

이다. 이때, 구분구적법과 치환 $(t=1+x^2)$을 이용하여

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n\frac{k}{n^2+k^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n\frac{\frac{k}{n}}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2} = \int_0^1\frac{x}{1+x^2}dx = \int_1^2\frac{1}{2t}dt = \frac{\ln 2}{2}$$

를 얻을 수 있다. 한편, $-\dfrac{1}{n^2} \le \dfrac{\cos(k\pi)}{n^2+k^2} \le \dfrac{1}{n^2}$ 이므로,

$$-\sum_{k=1}^n\frac{e^{-n\pi}k}{n^2} \le \sum_{k=1}^n\frac{e^{-n\pi}\cos(k\pi)k}{n^2+k^2} \le \sum_{k=1}^n\frac{e^{-n\pi}k}{n^2}$$

이다. 그런데 $\displaystyle\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$ 를 이용하여 계산하면 $\displaystyle\sum_{k=1}^n\frac{e^{-n\pi}k}{n^2} = e^{-n\pi}\frac{n(n+1)}{2n^2}$ 이 0으로 수렴함을 보일 수 있다. $\displaystyle\sum_{k=1}^n\frac{3^{-n\pi}(-1)^k k}{n^2+k^2}$ 보다 작은 수열과 큰 수열 모두 0으로 수렴하므로,

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n\frac{e^{-n\pi}(-1)^k k}{n^2+k^2} = 0$ 이다.

모두를 정리하여, $\displaystyle\sum_{k=1}^n\int_0^\pi e^{-nx}\sin(kx)dx = \frac{\ln 2}{2}$ 를 얻는다.

15번 문항 해설

정답 : (1) 2 (2) $-\dfrac{2\ln 2-1}{2\pi-1}$

(1) $A_n=\pi\displaystyle\int_0^{2^n a_n}(2^n a_n-y)dy=\left[\pi\left(2^n a_n y-\frac{1}{2}y^2\right)\right]_0^{2^n a_n}=\frac{\pi}{2}4^n {a_n}^2$이다.

$A_n=2\pi$이므로 $a_n=\dfrac{2}{2^n}$이고 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n=2$

(2)

$$B_n=\int_0^1\left(1-\frac{1}{2^n b_n}\ln(x+1)\right)dx=\left[x-\frac{1}{2^n b_n}((x+1)\ln(x+1)-(x+1))\right]_0^1=1-\frac{1}{2^n b_n}(2\ln 2-1)$$

이다.

$B_n=2\pi$이므로 $b_n=\dfrac{2\ln 2-1}{2^n(1-2\pi)}$이고 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\frac{2\ln 2-1}{1-2\pi}=\frac{1-2\ln 2}{2\pi-1}=-\frac{2\ln 2-1}{2\pi-1}$

16번 문항 해설

정답 : $\frac{1}{5}$

우선 문제에 주어진 식을 다음과 같이 정리한다.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}(k+\sqrt{n})^4}{\sum_{k=1}^{n}(n+k)^4}=\frac{\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^5}\sum_{k=1}^{n}(k+\sqrt{n})^4}{\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^5}\sum_{k=1}^{n}(n+k)^4}$$

분모는 정적분과 급수의 합과의 관계를 이용하여

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^5}\sum_{k=1}^{n}(n+k)^4=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n}\right)^4=\int_0^1(1+x)^4dx=\frac{31}{5}$$

를 얻는다. 분자는 다음과 같은 식을 정리한 후

$$\sum_{k=1}^{n}(k+\sqrt{n})^4=\sum_{k=1}^{n}k^4+4\sqrt{n}\sum_{k=1}^{n}k^3+6n\sum_{k=1}^{n}k^2+4n\sqrt{n}\sum_{k=1}^{n}k+n^2$$

거듭제곱의 합 공식을 적용한다.

$$\sum_{k=1}^{n}(k+\sqrt{n})^4=\sum_{k=1}^{n}k^4+4\sqrt{n}\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2+6n\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+4n\sqrt{n}\frac{n(n+1)}{2}+n^2$$

그리고 정적분과 급수의 합과의 관계를 이용하여 극한을 취한다.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^5}\sum_{k=1}^{n}(k+\sqrt{n})^4=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^4+0=\int_0^1x^4dx=\frac{1}{5}$$

마지막으로 분자의 극한을 분모의 극한으로 나누어 정답 $\frac{1}{31}$을 얻는다.

[방법 2]

위 예시답안에서 분자의 극한을 취할 때, 식을 다음과 같이 정리한 후,

$$\frac{1}{n^5}\sum_{k=1}^{n}(k+\sqrt{n})^4=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^4+\frac{4}{\sqrt{n}}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^3+\frac{6}{n}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^2+\frac{4}{n\sqrt{n}}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)+\frac{1}{n^2}$$

정적분과 급수의 관계를 이용하여

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^5}\sum_{k=1}^{n}(k+\sqrt{n})^4=\int_0^1x^4dx+0\cdot\int_0^1x^3dx+0\cdot\int_0^1x^2dx+0\cdot\int_0^1x\,dx+0=\frac{1}{5}$$

을 얻을 수도 있다. 나머지 과정은 동일하다.

17번 문항 해설

첫 번째로 주어진 급수를 다음과 같이 정리할 수 있다.

$$\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} n\left(\frac{k-1}{n}\right)^4\left(\frac{k}{n}-x\right)dx=\sum_{k=1}^{n} n\left(\frac{k-1}{n}\right)^4\left(\frac{1}{2n^2}\right)=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k-1}{n}\right)^4\left(\frac{1}{n}\right)$$

따라서 제시문에 의해 구하고자 하는 극한값은 아래와 같이 계산할 수 있다.

$$\lim_{n\to\infty}\left[\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} n\left(\frac{k-1}{n}\right)^4\left(\frac{k}{n}-x\right)dx\right]=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k-1}{n}\right)^4\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{2}\int_0^1 x^4dx=\frac{1}{10}$$

동일한 방식으로 두 번째 극한값을 아래와 같이 계산 가능하다.

$$\lim_{n\to\infty}\left[\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} n\left(\frac{k}{n}\right)^4\left(\frac{k}{n}-x\right)dx\right]=\lim_{n\to\infty}\left[\sum_{k=1}^{n} n\left(\frac{k}{n}\right)^4\left(\frac{1}{2n^2}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left[\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^4\left(\frac{1}{n}\right)\right]=\frac{1}{2}\int_0^1 x^4dx=\frac{1}{10}$$

18번 문항 해설

아래의 등식이 성립함을 알 수 있다.

$$\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) - n\int_0^1 f(x)dx = n\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right) - n\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(x)dx = n\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}\left(f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right)dx$$

여기서 $f(x)=x^5$ 이라 하자. 그러면 $f(x)$ 는 연속이고 미분가능한 함수이므로, 평균값 정리에 의해

$\displaystyle\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}\left(f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right)dx = \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f'(\theta_k(x))\left(\frac{k}{n}-x\right)dx$ 을 만족하는 $\theta_k(x)\in\left[x, \frac{k}{n}\right]$ 가 존재한다.

$f'(x)=5x^4$ 는 $[0, 1]$ 에서 증가하므로,

모든 $x\in\left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right]$ 에 대하여 $5\left(\frac{k-1}{n}\right)^4 \le 5x^4 \le 5\left(\frac{k}{n}\right)^4$ 이 성립한다. 따라서

$$\int_x^{\frac{k}{n}} 5\left(\frac{k-1}{n}\right)^4 dx \le \int_x^{\frac{k}{n}} 5x^4\,dx \le \int_x^{\frac{k}{n}} 5\left(\frac{k}{n}\right)^4 dx$$

$$5\left(\frac{k-1}{n}\right)^4\left(\frac{k}{n}-x\right) \le \left(\frac{k}{n}\right)^5 - x^5 \le 5\left(\frac{k}{n}\right)^4\left(\frac{k}{n}-x\right)$$

이고, 이로부터 아래와 같은 부등식을 얻을 수 있다.

$$n\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} 5\left(\frac{k-1}{n}\right)^4\left(\frac{k}{n}-x\right)dx \le n\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}\left(\left(\frac{k}{n}\right)^5 - x^5\right)dx \le n\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} 5\left(\frac{k}{n}\right)^4\left(\frac{k}{n}-x\right)dx$$

위 부등식 양쪽 끝을 $n\to\infty$ 일 때의 극한값을 계산하면 $\frac{1}{2}$ 로 동일함을 알 수 있다.

따라서 문제에서 구하고자 하는 극한값은 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left[\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^5 - n\int_0^1 x^5 dx\right] = \frac{1}{2}$ 이다.