깨단수학 실력진단 테스트

# 약점보완 테스트 14회

학 교 : ________________ 학 년 : ________ 이 름 : ________________

1. 이차방정식 $x^2-2007x-2008=0$의 근 중에서 큰 것을 $a$라 하고, 이차방정식 $2008^2x^2+2007\times2009x-1=0$의 근 중에서 작은 것을 $b$라 할 때, $a-b$의 값은?

① $-2009$ ② $-2007$ ③ $0$
④ $2007$ ⑤ $2009$

2. 모든 실수 $x$에 대하여 $\sqrt[3]{(a-3)x^2+2(a-3)x-4}$가 음의 실수가 되도록 하는 정수 $a$의 최댓값을 $M$, 최솟값을 $m$이라 할 때, $M+m$의 값을 구하시오.

3. 모든 자연수 $n$에 대하여 $a_n > a_{n+1}$을 만족시키는 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여

$A_n=\sum_{k=1}^{n}|a_{5k-4}+a_{5k-3}+a_{5k-2}+a_{5k-1}+a_{5k}|$라 하면

$A_1=225,\ A_3=A_4$가 성립한다.

$B_n=\sum_{k=1}^{n}|a_{pk-p+1}+a_{pk-p+2}+\cdots+a_{pk-1}+a_{pk}|$라 할 때,

$B_q=B_{q+1}$을 만족시키는 두 자연수 $p,q$에 대하여 $p+q$의 최댓값을 구하시오.

4. 최고차항의 계수가 1이고 $f(2)=3$인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)=\begin{cases} \dfrac{ax-9}{x-1} & (x<1) \\ f(x) & (x \geq 1) \end{cases}$ 이 다음 조건을 만족시킨다.

> 함수 $y=g(x)$의 그래프와 직선 $y=t$가 서로 다른 두 점에서만 만나도록 하는 모든 실수 $t$의 값의 집합은 $\{t \mid t=-1$ 또는 $t \geq 3\}$이다.

$(g \circ g)(-1)$의 값을 구하시오. (단, $a$는 상수이다.)

5. 최고차항의 계수가 양수인 삼차함수 $f(x)$는 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극댓값을 갖고, $x=1$에서 극솟값을 갖는다.
> (나) 모든 실수 $t$에 대하여
> $\displaystyle\int_0^t |f'(x)+1|\,dx = f(t)+t$ 이다.

함수 $f(x)$의 극솟값의 최솟값이 $-\dfrac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, $p$와 $q$는 서로소인 자연수이다.)

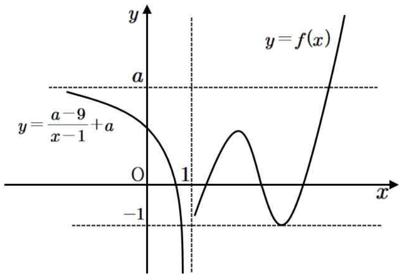
## 정답 및 해설 [수학 Ⅱ]

1) [정답] ⑤
[출제의도] 이차방정식의 해를 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.
$x^2-2007x-2008=0$ 에서
$(x+1)(x-2008)=0$, $x=-1$ 또는 $x=2008$
$\therefore\ a=2008 \quad \cdots㉠$
$2008^2x^2+2007\times2009x-1=0$ 에서
$2008^2x^2+(2008^2-1)x-1=0$
$(x+1)(2008^2x-1)=0$, $x=-1$ 또는 $x=\dfrac{1}{2008^2}$
$\therefore\ b=-1 \quad \cdots㉡$
㉠, ㉡에서 $a-b=2008-(-1)=2009$

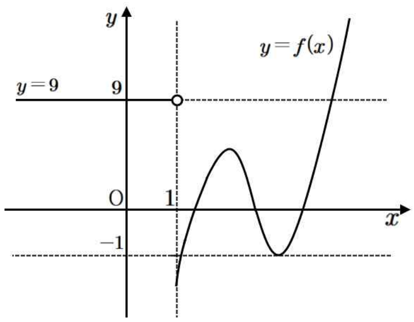
**2) [정답]** 3
모든 실수 $x$에 대해 $\sqrt[3]{(a-3)x^2+2(a-3)x-4}<0$이려면 $(a-3)x^2+2(a-3)x-4<0$에 대해
ⅰ) $a=3$ 일 때
$0\cdot x^2+0\cdot x-4<0$ 모든 실수 $x$에 대해 성립한다.
ⅱ) $a\neq3$ 일 때
모든 실수 $x$에 대해 성립 하려면
이차식 $(a-3)x^2+2(a-3)-4$에서
$a-3<0$이고 $D<0$이어야 한다.
$D=(a-3)^2-(a-3)(-4)=a^2-2a-3$를
인수분해 하면 $(a+1)(a-3)<0$ 이므로
$-1<a<3$
ⅰ), ⅱ)에 의해 $a$의 범위는 $-1<a\le3$
그러므로 정수 $a$의 최댓값 $M=3$, 최솟값 $m=0$

3) [정답] 18
$A_3=|a_1+a_2+\cdots+a_5|+|a_6+a_7+\cdots+a_{10}|+|a_{11}+a_{12}+\cdots+a_{15}|$
$A_4=|a_1+\cdots+a_5|+|a_6+\cdots+a_{10}|+|a_{11}+\cdots+a_{15}|+|a_{16}+\cdots+a_{20}|$
$A_3=A_4$이므로
$a_{16}+a_{17}+\cdots+a_{20}=0$이고 따라서 $a_{18}=0$이므로
$a_n=dn-18d$이다.
한편 $A_1=5a_3=225$ $(\because a_1, a_2, \cdots, a_{17}>0)$ 이므로
$a_3=-15d=\dfrac{225}{5}=45$
따라서 $a_n=-3n+54$
한편
$B_q=B_{q+1}$ 이기 위해서는
$a_{pq+1}+a_{pq+2}+\cdots+a_{pq+p-1}+a_{pq+p}=0$이어야 한다.
따라서 $a_{pq+1}+a_{pq+p}=0$
$-3(pq+1)+54-3(pq+p)+54=0$
$p(2q+1)=35$이다.
이를 만족하는 $(p, q)$의 순서쌍은
$(1, 17), (7, 2), (5, 3)$이고 따라서 $p+q$의 최댓값은 $1+17=18$

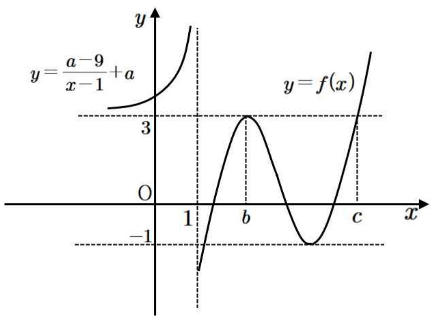
4) [정답] 19
$y=\dfrac{ax-9}{x-1}=\dfrac{a(x-1)+a-9}{x-1}=\dfrac{a-9}{x-1}+a$이므로
$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{a-9}{x-1}+a & (x<1)\\ f(x) & (x\ge1)\end{cases}$$
$a>9$, $a=9$, $a<9$인 경우로 나누어서 그래프를 그려보자.
가) $a>9$일 때




이 경우 $t>a$에서 $y=g(x)$의 그래프와 $y=t$가 두 점에서 만나지 않으므로 조건에 맞지 않는다.
나) $a=9$일 때
$x<1$에서 $g(x)=9$이므로 $y=g(x)$의 그래프는 다음과 같고 $t>9$에서 $y=g(x)$의 그래프와 $y=t$가 두 점에서 만나지 않으므로 조건에 맞지 않는다.




다) $a<9$일 때
$y=g(x)$의 그래프는 다음과 같을 때 주어진 모든 조건을 만족시킨다.




그러므로 $a=3$
한편, $f(1)\le-1$이고 $f(x)$는 극댓값 3, 극솟값 $-1$을 가져야 하므로
$f(x)=(x-b)^2(x-c)+3$
또, 주어진 조건 $f(2)=3$으로부터 $b=2$ 또는 $c=2$

ⅰ) $c=2$일 때 $1<b<2$

$f(x) = (x-b)^2(x-2)+3$에서

$f(1) = (1-b)^2(1-2)+3 = 3-(1-b)^2 > -1$이므로 모순

ⅱ) $b=2$일 때

$f(x) = (x-2)^2(x-c)+3$

$f'(x) = 2(x-2)(x-c)+(x-2)^2 = 3(x-2)\left(x-\frac{2c+2}{3}\right)$에서

$x = \frac{2c+2}{3}$일 때, 극솟값을 가지므로

$$f\left(\frac{2c+2}{3}\right) = \left(\frac{2c-4}{3}\right)^2\left(\frac{-c+2}{3}\right)+3 = -1$$

$-4\left(\frac{c-2}{3}\right)^3 = -4$로부터 $c=5$

이 때, $f(x) = (x-2)^2(x-5)+3$이고 $f(1) = -1$이므로

주어진 조건을 모두 만족한다.

즉, $g(x) = \begin{cases} -\frac{6}{x-1}+3 & (x<1) \\ (x-2)^2(x-5)+3 & (x \geq 1) \end{cases}$

따라서 $(g \circ g)(-1) = g(g(-1)) = g(6) = 19$

5) [정답] 5

조건 (나)에서 $t=0$을 대입하면

$f(0) = \int_0^0 |f'(x)+1|dx = 0$

조건 (나)에서 양변을 $t$에 대하여 미분하면

$|f'(t)+1| = f'(t)+1$

그러므로 $f'(t)+1 \geq 0$, $f'(t) \geq -1$

조건 (가)에서 $x=0$에서 극댓값을 갖고, $x=1$에서 극솟값을 가지므로

$f'(x) = ax(x-1) = a\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{a}{4}$ $(a>0)$

이때 $f'(x) \geq -1$이므로 $f'\left(\frac{1}{2}\right) \geq -1$ 이어야 한다.

그러므로 $-\frac{1}{4}a \geq -1$, $a \leq 4$

한편, $f(x) = \int f'(x)dx = \int ax(x-1)dx$

$= \frac{a}{3}x^3 - \frac{a}{2}x^2 + C$ (단, $C$는 적분상수)

$f(0)=0$이므로 $C=0$

즉, $f(x) = \frac{a}{3}x^3 - \frac{a}{2}x^2$ 이고 $0 < a \leq 4$ 이다.

따라서 극솟값은 $f(1) = \frac{a}{3} - \frac{a}{2} = -\frac{a}{6}$

이때, $0 < a \leq 4$ 에서 $-\frac{2}{3} \leq -\frac{a}{6} < 0$

그러므로 극솟값의 최솟값은 $-\frac{2}{3}$이다.

$\therefore p+q=5$