제 2 교시

수학 영역

KSM

5지선다형

1. $\dfrac{\sqrt[4]{32}}{\sqrt[8]{4}}$ 의 값은? [2점]

① $\sqrt{2}$ ② 2 ③ $2\sqrt{2}$ ④ 4 ⑤ $4\sqrt{2}$

2. 함수 $f(x)=x^3+3x^2-5$에 대하여 $\lim_{h\to 0}\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}$ 의 값은? [2점]

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

$f'=3x^2+6x$

$f'(1)=9$

3. 모든 항이 실수인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$a_2a_3=2,\quad a_4=4$$

일 때, a_6의 값은? [3점]

① 10 ② 12 ③ 14 ④ 16 ⑤ 18

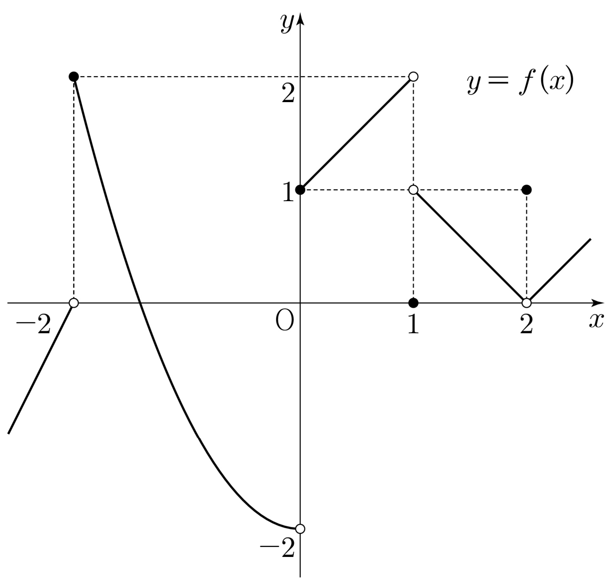
$\dfrac{4}{r^2}\cdot\dfrac{4}{r}=2$

$r^3=8$

$r=2$

$a_6=a_4\cdot r^2=16$

4. 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



$\lim_{x\to 0-}f(x)+\lim_{x\to 1+}f(x)$의 값은? [3점]

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

$-2+1=-1$

5. 함수 $f(x)=(x+1)(x^2+x-5)$에 대하여 $f'(2)$의 값은? [3점]

① 15　② 16　③ 17　④ 18　⑤ 19

$f'(x) = (x^2+x-5) + (x+1)(2x+1)$

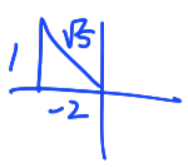
$f'(2) = 1 + 3\cdot 5 = 16$

6. $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$인 θ에 대하여 $\cos(\pi+\theta)=\frac{2\sqrt{5}}{5}$일 때, $\sin\theta+\cos\theta$의 값은? [3점]

① $-\frac{2\sqrt{5}}{5}$　② $-\frac{\sqrt{5}}{5}$　③ 0

④ $\frac{\sqrt{5}}{5}$　⑤ $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

$-\cos\theta = \frac{2}{\sqrt{5}}$, $\cos\theta = -\frac{2}{\sqrt{5}}$



$\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{5}}$) $\frac{-1}{\sqrt{5}}$

7. 함수

$$f(x)=\begin{cases}(x-a)^2 & (x<4)\\ 2x-4 & (x\ge 4)\end{cases}$$

가 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 모든 상수 a의 값의 곱은? [3점]

① 6　② 9　③ 12　④ 15　⑤ 18

$(4-a)^2 = 4$

$4-a = 2, -2$

$a = 2, 6$　$2\times 6 = 12$

8. $a>2$인 상수 a에 대하여 두 수 $\log_2 a$, $\log_a 8$의 합과 곱이 각각 4, k일 때, $a+k$의 값은? [3점]

① 11　② 12　③ 13　④ 14　⑤ 15

$\log_2 a = A$, $\log_a 8 = \frac{3}{A}$
$(a>2 \to A>1)$
$A+\frac{3}{A}=4$, $A^2-4A+3=0$
$A=1,3$
$A\times\frac{3}{A}=3=k$
$\therefore A=3$
$a=8$
$a+k=11$

9. 함수 $f(x)=x^2+x$에 대하여

$$5\int_0^1 f(x)\,dx-\int_0^1\left(5x+f(x)\right)dx$$

의 값은? [4점]

① $\frac{1}{6}$　② $\frac{1}{3}$　③ $\frac{1}{2}$　④ $\frac{2}{3}$　⑤ $\frac{5}{6}$

$\int_0^1 (4f(x)-5x)\,dx$
$=\int_0^1 (4x^2-x)\,dx = \frac{4}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2\Big|_0^1$
$=\frac{4}{3}-\frac{1}{2}=\frac{5}{6}$

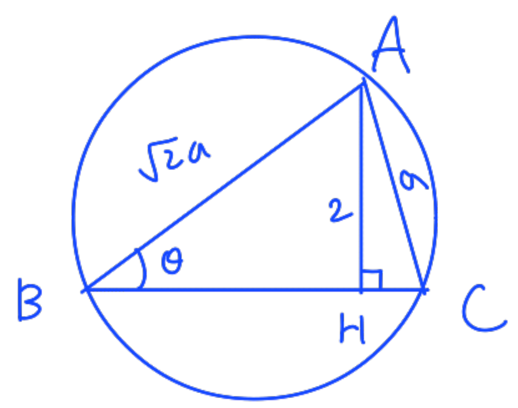
10. $\angle A > \frac{\pi}{2}$인 삼각형 ABC의 꼭짓점 A에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 H라 하자.

$\overline{AB} : \overline{AC} = \sqrt{2} : 1$,　$\overline{AH} = 2$

이고, 삼각형 ABC의 외접원의 넓이가 50π일 때, 선분 BH의 길이는? [4점]

$R=5\sqrt{2}$

① 6　② $\frac{25}{4}$　③ $\frac{13}{2}$　④ $\frac{27}{4}$　⑤ 7



$a=2R\sin\theta=10\sqrt{2}\sin\theta$
$\triangle ABH \to \sin\theta=\frac{2}{\sqrt{2}a}=\frac{\sqrt{2}}{a}$, $a\sin\theta=\sqrt{2}$
$\sin\theta=\frac{a}{10\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{a}$, $a^2=20$, $a=2\sqrt{5}$
$\therefore \overline{AB}=2\sqrt{10}$
$\triangle ABH$, $\overline{BH}=\sqrt{40-4}=6$

11. 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시각 $t\ (t \geq 0)$에서의 위치가 각각

$$x_1 = t^2 + t - 6, \quad x_2 = -t^3 + 7t^2$$

이다. 두 점 P, Q의 위치가 같아지는 순간 두 점 P, Q의 가속도를 각각 p, q라 할 때, $p-q$의 값은? [4점]

① 24 ② 27 ③ 30 ④ 33 ⑤ 36

$t^3 - 6t^2 + t - 6 = 0$

$t^2(t-6) + (t-6) = 0$

$(t-6)(t^2+1) = 0, \ t = 6$

$V_1 = 2t+1, \ V_2 = -3t^2 + 14t$

$a_1 = 2, \ a_2 = -6t + 14$

$p = a_1(6) = 2$

$q = a_2(6) = -22$) $p - q = 24$

12. 수열 $\{a_n\}$은 등차수열이고, 수열 $\{b_n\}$은 모든 자연수 n에 대하여

$$b_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} a_k$$

를 만족시킨다. $b_2 = -2$, $b_3 + b_7 = 0$일 때, 수열 $\{b_n\}$의 첫째항부터 제9항까지의 합은? [4점]

① -22 ② -20 ③ -18 ④ -16 ⑤ -14

$b_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots$

$b_2 = a_1 - a_2 = -2 = -d \quad \therefore d = 2$

$b_3 = a + d$

$b_7 = a + 3d$) $2a + 4d = 0, \ a = -4$

$a_n = 2n - 6$

$\sum_{k=1}^{7} b_k = a, -d, a+d, -2d, a+2d, -3d, a+3d, -4d, a+4d$) $5a = -20$

13. 함수

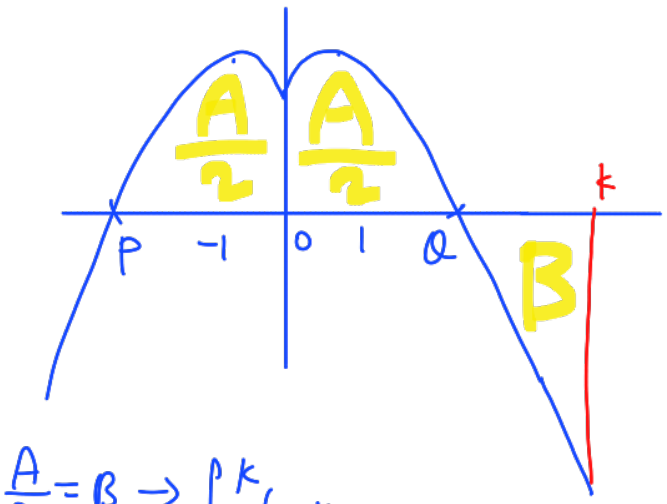
$$f(x)=\begin{cases}-x^2-2x+6 & (x<0) \\ -x^2+2x+6 & (x\ge 0)\end{cases}$$

$-(x+1)^2+7$

$-(x-1)^2+7$ $(4,-2)$

의 그래프가 x축과 만나는 서로 다른 두 점을 P, Q라 하고, 상수 $k\,(k>4)$에 대하여 직선 $x=k$가 x축과 만나는 점을 R이라 하자. 곡선 $y=f(x)$와 선분 PQ로 둘러싸인 부분의 넓이를 A, 곡선 $y=f(x)$와 직선 $x=k$ 및 선분 QR로 둘러싸인 부분의 넓이를 B라 하자. $A=2B$일 때, k의 값은? (단, 점 P의 x좌표는 음수이다.) [4점]

① $\frac{9}{2}$ ② 5 ③ $\frac{11}{2}$ ④ 6 ⑤ $\frac{13}{2}$



$\frac{A}{2}=B \rightarrow \int_0^k(-x^2+2x+6)\,dx=0$

$-\frac{1}{3}x^3+x^2+6x\Big|_0^k$

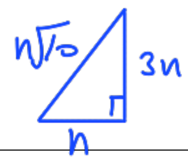
$=-\frac{1}{3}k^3+k^2+6k=0$

$-\frac{1}{3}k(k^2-3k-18)=0$

$-\frac{1}{3}k(k+3)(k-6)=0,\ k=6$

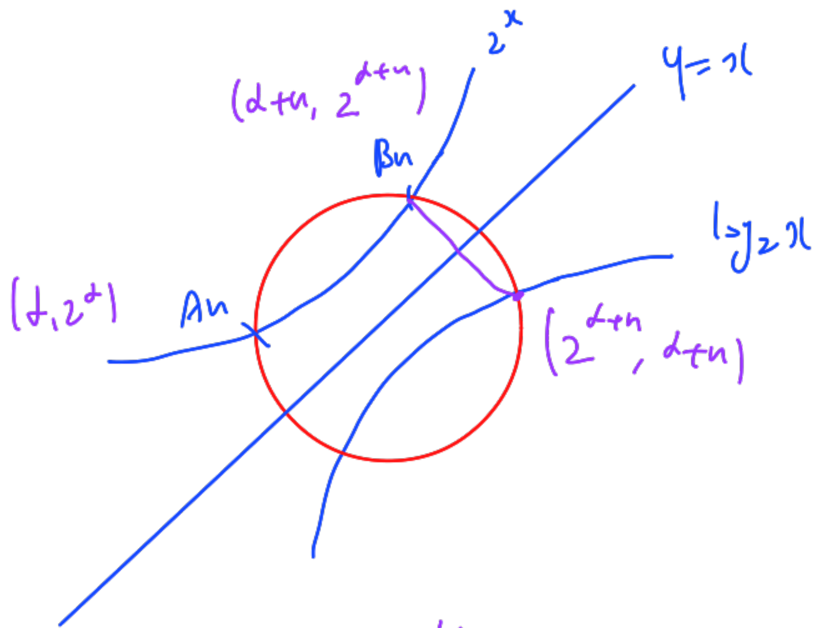
14. 자연수 n에 대하여 곡선 $y=2^x$ 위의 두 점 A_n, B_n이 다음 조건을 만족시킨다.

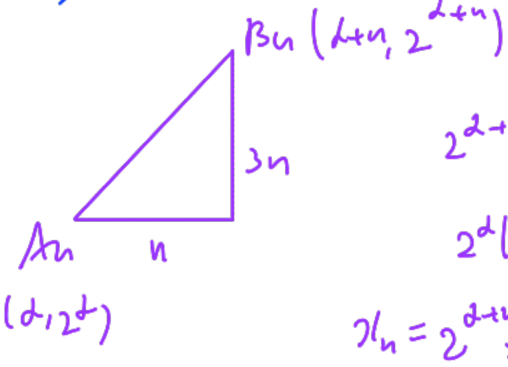
> (가) 직선 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n$의 기울기는 3이다.
>
> (나) $\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n}=n\times\sqrt{10}$



중심이 직선 $y=x$ 위에 있고 두 점 A_n, B_n을 지나는 원이 곡선 $y=\log_2 x$와 만나는 두 점의 x좌표 중 큰 값을 x_n이라 하자. $x_1+x_2+x_3$의 값은? [4점]

① $\frac{150}{7}$ ② $\frac{155}{7}$ ③ $\frac{160}{7}$ ④ $\frac{165}{7}$ ⑤ $\frac{170}{7}$





$2^{\alpha+n}-2^{\alpha}=3n$

$2^{\alpha}(2^n-1)=3n,\ 2^{\alpha}=\frac{3n}{2^n-1}$

$x_n=2^{\alpha+n}=2^{\alpha}\cdot 2^n=\frac{2^n}{2^n-1}\times 3n$

$x_1=6$

$x_2=\frac{4}{3}\times 6=8$

$x_3=\frac{8}{7}\times 9=\frac{72}{7}$

$x_1+x_2+x_3=\frac{170}{7}$

15. 두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$는 모든 실수 x에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $\int_{1}^{x} tf(t)\,dt + \int_{-1}^{x} tg(t)\,dt = 3x^4+8x^3-3x^2$
>
> (나) $f(x) = xg'(x)$

$\int_{0}^{3} g(x)\,dx$의 값은? [4점]

① 72 ② 76 ③ 80 ④ 84 ⑤ 88

(가) 양변미분

$xf(x) + xg(x) = 12x^3+24x^2-6x$

$f(x)+g(x) = 12x^2+24x-6$

$xg'(x)+g(x) = 12x^2+24x-6$,

$(xg(x))' = 12x^2+24x-6$

$xg(x) = 4x^3+12x^2-6x+C$, $x=0$ $\rightarrow C=0$

$g(x) = 4x^2+12x-6$

$\int_0^3 g(x)dx = \frac{4}{3}x^3+6x^2-6x \Big|_0^3$

$= 36+54-18 = 72$

단답형

16. 방정식

$$\log_3(x+2) - \log_{\frac{1}{3}}(x-4) = 3$$

을 만족시키는 실수 x의 값을 구하시오. [3점]

$\boxed{7}$

$x>4$

$\log_3(x+2)+\log_3(x-4)=3$

$\log_3(x^2-2x-8)=3$

$x^2-2x-8=27$

$(x-7)(x+5)=0$

$x=7$ $(\because x>4)$

17. 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x) = 6x^2+2x+1$이고 $f(0)=1$일 때, $f(1)$의 값을 구하시오. [3점]

$\boxed{5}$

$f(x) = 2x^3+x^2+x+1$

$f(1) = 5$

18. 수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$\sum_{k=1}^{10} ka_k = 36, \quad \sum_{k=1}^{9} ka_{k+1} = 7$$

일 때, $\sum_{k=1}^{10} a_k$의 값을 구하시오. [3점]

$\boxed{29}$

$a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \cdots + 10a_{10} = 36$

$-\big)\quad a_2 + 2a_3 + \cdots + 9a_{10} = 7$

$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{10} = 29$

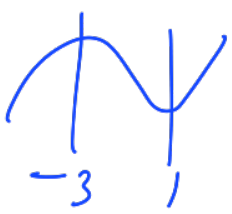
19. 함수 $f(x) = x^3 + ax^2 - 9x + b$는 $x = 1$에서 극소이다. 함수 $f(x)$의 극댓값이 28일 때, $a+b$의 값을 구하시오. (단, a와 b는 상수이다.) [3점]

$\boxed{4}$

$f'(x) = 3x^2 + 2ax - 9$

$f'(1) = 2a - 6 = 0, \quad a = 3$

$f'(x) = 3(x+3)(x-1)$



$f(-3) = 27 + b = 28$

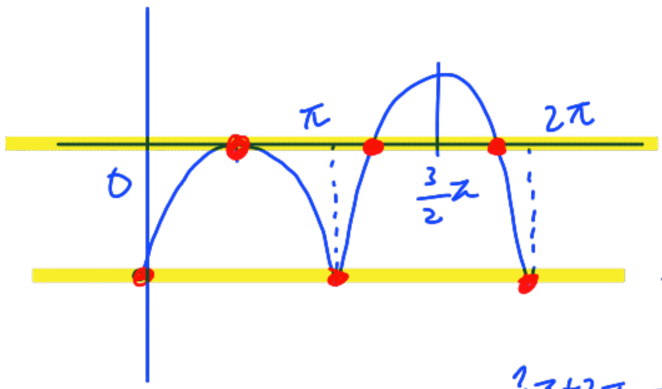
$b = 1, \quad a + b = 4$

20. 닫힌구간 $[0, 2\pi]$에서 정의된 함수

$$f(x) = \begin{cases} \sin x - 1 & (0 \le x < \pi) \\ -\sqrt{2}\sin x - 1 & (\pi \le x \le 2\pi) \end{cases}$$

가 있다. $0 \le t \le 2\pi$인 실수 t에 대하여 x에 대한 방정식 $f(x) = f(t)$의 서로 다른 실근의 개수가 3이 되도록 하는 모든 t의 값의 합은 $\frac{q}{p}\pi$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

$\boxed{15}$



$\rightarrow \frac{\pi}{2} + 3\pi = \frac{7}{2}\pi$

$\rightarrow \pi + 2\pi = 3\pi$

$\frac{7}{2}\pi + 3\pi = \frac{13}{2}\pi$

21. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 모든 정수 k에 대하여

$$2k-8 \le \frac{f(k+2)-f(k)}{2} \le 4k^2+14k$$

를 만족시킬 때, $f'(3)$의 값을 구하시오. [4점]

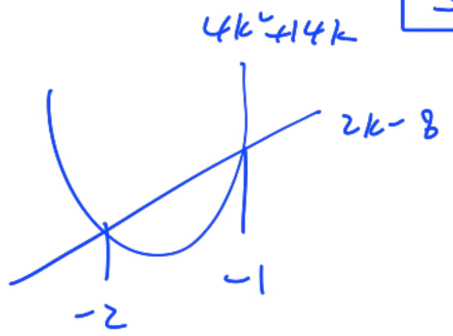
$\boxed{31}$

$4k^2+14k=2k-8$

$k^2+3k+2=0$

$(k+1)(k+2)=0$

$k=-2,-1$



$k=-2 \rightarrow -12 \le \frac{f(0)-f(-2)}{2} \le -12$

$f(0)-f(-2)=-24$

$k=-1 \rightarrow -10 \le \frac{f(1)-f(-1)}{2} \le -10$

$f(1)-f(-1)=-20$

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$

$f(0)-f(-2)=c-(4a-2b-8+c)=-24$

$-4a+2b=-32,\quad 2a-b=16$

$f(1)-f(-1)=(a+b+c+1)-(a-b+c-1)$

$=2b+2=-20,\quad b=-11$

$a=\frac{5}{2}$

$f'(x)=3x^2+5x-11,\quad f'(3)=27+15-11$

$=31$

22. 양수 k에 대하여 $a_1=k$인 수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $a_2 \times a_3 < 0$ $\Rightarrow$ $a_2, a_3 \neq 0$
>
> (나) 모든 자연수 n에 대하여
>
> $\left(a_{n+1}-a_n+\frac{2}{3}k\right)(a_{n+1}+ka_n)=0$이다.

$a_5=0$이 되도록 하는 서로 다른 모든 양수 k에 대하여 k^2의 값의 합을 구하시오. [4점]

$\boxed{8}$

$a_{n+1}=\begin{cases} a_n-\frac{2}{3}k \\ -ka_n \end{cases}\qquad a_n=\begin{cases} a_{n+1}+\frac{2}{3}k \\ -\frac{1}{k}a_{n+1} \end{cases}$

$a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad a_4 \quad a_5$

$k \quad \begin{cases} \frac{k}{3} \\ -k^2 \ (-) \end{cases}$

$\frac{4}{3}k,\ -\frac{2}{3} \rangle \frac{2}{3}k$

$\frac{2}{3}k,\ 0 \rangle 0$

$\frac{2}{3}k,\ 0 \rangle 0$

$a_2 \times a_3 < 0$

$\therefore \quad a_2 \quad a_3$

i) $\frac{k}{3} \quad -\frac{2}{3}$ $\begin{cases} \frac{k}{3}-\frac{2}{3}k=-\frac{2}{3}, & k=2,\ k^2=4 \\ (-k)\frac{k}{3}=-\frac{2}{3}, & k^2=2 \end{cases}$

ii) $-k^2 \quad \frac{4}{3}k$ $\begin{cases} -k^2-\frac{2}{3}k=\frac{4}{3}k \rightarrow k=0,-2\ (\times) \\ (-k)(-k^2)=\frac{4}{3}k \rightarrow k^2=\frac{4}{3} \end{cases}$

iii) $-k^2 \quad \frac{2}{3}k$ $\begin{cases} -k^2+\frac{2}{3}k=\frac{2}{3}k \rightarrow k=0\ (\times) \\ (-k)(-k^2)=\frac{2}{3}k \rightarrow k^2=\frac{2}{3} \end{cases}$

$\Rightarrow 4+2+\frac{4}{3}+\frac{2}{3}=8$

> ＊ 확인 사항
>
> ○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.
>
> ○ 이어서, **「선택과목(확률과 통계)」** 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

제 2 교시

수학 영역(확률과 통계)

5지선다형

23. 다섯 개의 숫자 1, 2, 2, 3, 3을 모두 일렬로 나열하는 경우의 수는? [2점]

① 10 ② 15 ③ 20 ④ 25 ⑤ 30

$\frac{5!}{2!2!} = 30$

24. 두 사건 A, B는 서로 독립이고

$$\mathrm{P}(A) = \frac{2}{3}, \quad \mathrm{P}(A \cap B) = \frac{1}{6}$$

일 때, $\mathrm{P}(A \cup B)$의 값은? [3점]

① $\frac{3}{4}$ ② $\frac{19}{24}$ ③ $\frac{5}{6}$ ④ $\frac{7}{8}$ ⑤ $\frac{11}{12}$

$P(A)P(B) = \frac{1}{6}$, $P(B) = \frac{1}{4}$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$= \frac{2}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{6} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$

25. 1부터 11까지의 자연수 중에서 임의로 서로 다른 2개의 수를 선택한다. 선택한 2개의 수 중 적어도 하나가 7 이상의 홀수일 확률은? [3점]

① $\frac{23}{55}$ ② $\frac{24}{55}$ ③ $\frac{5}{11}$ ④ $\frac{26}{55}$ ⑤ $\frac{27}{55}$

7, 9, 11

$1-\frac{{}_8C_2}{{}_{11}C_2}$

$=1-\frac{8\cdot7}{11\cdot10}=\frac{27}{55}$

26. 정규분포 $\mathrm{N}(m,\,6^2)$을 따르는 모집단에서 크기가 9인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균을 $\overline{X}$, 정규분포 $\mathrm{N}(6,\,2^2)$을 따르는 모집단에서 크기가 4인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균을 $\overline{Y}$라 하자. $\mathrm{P}(\overline{X}\le 12)+\mathrm{P}(\overline{Y}\ge 8)=1$이 되도록 하는 m의 값은? [3점]

① 5 ② $\frac{13}{2}$ ③ 8 ④ $\frac{19}{2}$ ⑤ 11

$\overline{X}\sim N(m,2^2)$

$\overline{Y}\sim N(6,1^2)$

$P(Z\le\frac{12-m}{2})+P(Z\ge 2)=1$

$\frac{12-m}{2}=2,\ m=8$

27. 이산확률변수 X가 가지는 값이 0부터 4까지의 정수이고

$$\mathrm{P}(X=k)=\mathrm{P}(X=k+2)\ (k=0,\ 1,\ 2)$$

이다. $\mathrm{E}(X^2)=\frac{35}{6}$일 때, $\mathrm{P}(X=0)$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{24}$ ② $\frac{1}{12}$ ③ $\frac{1}{8}$ ④ $\frac{1}{6}$ ⑤ $\frac{5}{24}$

X^2	0	1	4	9	16	
X	0	1	2	3	4	
$P(X=x)$	α	β	α	β	α	1

$3\alpha+2\beta=1$

$\beta+4\alpha+9\beta+16\alpha=\frac{35}{6}$

$4\alpha+2\beta=\frac{7}{6}$

$\alpha=\frac{1}{6}$

$\beta=\frac{1}{4}$

$\alpha=\frac{1}{6}$

28. 집합 $X=\{1, 2, 3, 4\}$에 대하여 $f: X \to X$인 모든 함수 f 중에서 임의로 하나를 선택하는 시행을 한다. 이 시행에서 선택한 함수 f가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(4)$가 짝수일 확률은? [4점]

> $a \in X$, $b \in X$에 대하여
> a가 b의 약수이면 $f(a)$는 $f(b)$의 약수이다.

① $\frac{9}{19}$ ② $\frac{8}{15}$ ③ $\frac{3}{5}$ ④ $\frac{27}{40}$ ⑤ $\frac{19}{25}$

12
13
14
24

$f(1)$ $f(2)$ $f(4)$ $f(3)$

1 — 1: 1,2,3,4 / 2: 2,4 / 3: 3 / 4: 4 — $(1\sim4)$ → $8\times4=32$

2 — 2: 2, 4 / 4: 4 — $(2,4)$ → $3\times2=6$

3 3 3 3 → 1

4 4 4 4 → 1

$32+6+1+1=40$

$f(4)$ 짝수 → $5\times4+3\times2+1=27$

$\therefore \frac{27}{40}$

단답형

29. 수직선의 원점에 점 A가 있다. 한 개의 주사위를 사용하여 다음 시행을 한다.

> 주사위를 한 번 던져 나온 눈의 수가
> 4 이하이면 점 A를 양의 방향으로 1만큼 이동시키고,
> 5 이상이면 점 A를 음의 방향으로 1만큼 이동시킨다.

이 시행을 16200번 반복하여 이동된 점 A의 위치가 5700 이하일 확률을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 값을 k라 하자. $1000 \times k$의 값을 구하시오. [4점]

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
1.0	0.341
1.5	0.433
2.0	0.477
2.5	0.494

$\boxed{994}$

4 이하 눈이 나온 횟수: X, $X \sim B\left(16200, \frac{2}{3}\right)$

$X \sim N(10800, 60^2)$

점 A 위치 $Y = X - (16200 - X)$

$Y = 2X - 16200$

$P(Y \le 5700) = P(2X - 16200 \le 5700)$

$= P(X \le 10950)$

$= P\left(Z \le \frac{5}{2}\right) = 0.994 = k$

$\therefore 1000k = 994$

30. 흰 공 4개와 검은 공 4개를 세 명의 학생 A, B, C에게 다음 규칙에 따라 남김없이 나누어 주는 경우의 수를 구하시오. (단, 같은 색 공끼리는 서로 구별하지 않고, 공을 받지 못하는 학생이 있을 수 있다.) [4점] $\boxed{93}$

> (가) 학생 A가 받는 공의 개수는 0 이상 2 이하이다.
> (나) 학생 B가 받는 공의 개수는 2 이상이다.

A가 받는 공의 종류

B	0	0	1	0	2	1
W	0	1	0	2	0	1

$(5\times5)-(1+1+1) = 22$ | $(5\times4)-(1+1+1) = 17$ | $(5\times3)-(1+1+1) = 12$ | $(4\times4)-(1+1+1) = 13$

$22 + 17\times2 + 12\times2 + 13 = 93$

※ 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

○ 이어서, **「선택과목(미적분)」** 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

제 2 교시

수학 영역(미적분)

5지선다형

23. $\lim_{x \to 0} \frac{\sin 5x}{x}$ 의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

24. 양의 실수 전체의 집합에서 정의된 미분가능한 함수 $f(x)$가 있다. 양수 t에 대하여 곡선 $y = f(x)$ 위의 점 $(t, f(t))$에서의 접선의 기울기는 $\frac{1}{t} + 4e^{2t}$이다. $f(1) = 2e^2 + 1$일 때, $f(e)$의 값은? [3점]

① $2e^{2e} - 1$ ② $2e^{2e}$ ③ $2e^{2e} + 1$ ④ $2e^{2e} + 2$ ⑤ $2e^{2e} + 3$

$f'(t) = \frac{1}{t} + 4e^{2t}$

$f(t) = \ln t + 2e^{2t} + c$

$f(1) = 2e^2 + c = 2e^2 + 1,\ c = 1$

$f(e) = 1 + 2e^{2e} + 1 = 2e^{2e} + 2$

25. 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$\lim_{n\to\infty}\frac{4^n \times a_n - 1}{3\times 2^{n+1}} = 1$$

일 때, $a_1 + a_2$의 값은? [3점]

① $\frac{3}{2}$ ② $\frac{5}{2}$ ③ $\frac{7}{2}$ ④ $\frac{9}{2}$ ⑤ $\frac{11}{2}$

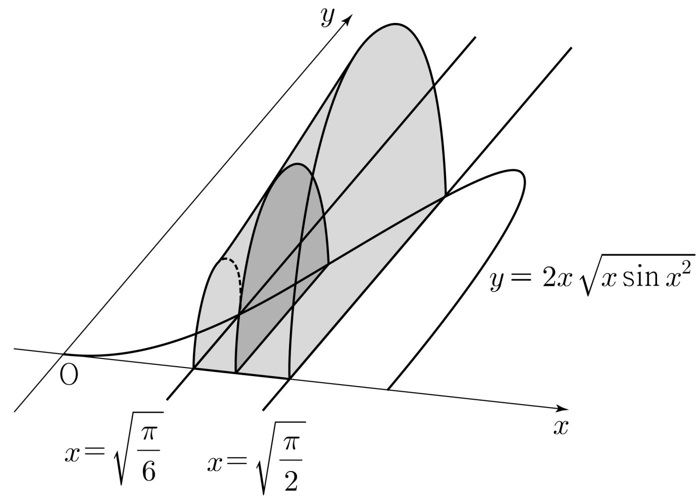
$r = \frac{1}{2}$

$a_n = a\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$\frac{2a}{6} = 1$, $a = 3$

$a_1 = 3$, $a_2 = \frac{3}{2}$) $3 + \frac{3}{2} = \frac{9}{2}$

26. 그림과 같이 곡선 $y = 2x\sqrt{x\sin x^2}$ $(0 \le x \le \sqrt{\pi})$와 x축 및 두 직선 $x = \sqrt{\frac{\pi}{6}}$, $x = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$로 둘러싸인 부분을 밑면으로 하는 입체도형이 있다. 이 입체도형을 x축에 수직인 평면으로 자른 단면이 모두 반원일 때, 이 입체도형의 부피는? [3점]



① $\frac{\pi^2 + 6\pi}{48}$ ② $\frac{\sqrt{2}\pi^2 + 6\pi}{48}$ ③ $\frac{\sqrt{3}\pi^2 + 6\pi}{48}$

④ $\frac{\sqrt{2}\pi^2 + 12\pi}{48}$ ⑤ $\frac{\sqrt{3}\pi^2 + 12\pi}{48}$

$\frac{\pi}{2}\left(x\sqrt{x\sin x^2}\right)^2$

$\frac{\pi}{2}\int_{\sqrt{\frac{\pi}{6}}}^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} x^3 \sin x^2 \, dx$ $x^2 = t$, $2x\,dx = dt$

$\frac{\pi}{4}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} t\sin t \, dt$

t $\sin t$
1 $-\cos t$
0 $-\sin t$

$= \frac{\pi}{4}\left[-t\cos t + \sin t\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}$

$= \frac{\pi}{4}\left[1 - \left(-\frac{\sqrt{3}}{12}\pi + \frac{1}{2}\right)\right]$

$= \frac{\pi}{8} + \frac{\sqrt{3}}{48}\pi^2 = \frac{\sqrt{3}\pi^2 + 6\pi}{48}$

27. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$f(x)+f\left(\frac{1}{2}\sin x\right)=\sin x$$

를 만족시킬 때, $f'(\pi)$의 값은? [3점]

① $-\frac{5}{6}$ ② $-\frac{2}{3}$ ③ $-\frac{1}{2}$ ④ $-\frac{1}{3}$ ⑤ $-\frac{1}{6}$

양변미분 $f'(x)+f'\left(\frac{1}{2}\sin x\right)\times\left(\frac{1}{2}\cos x\right)=\cos x$

$x=\pi \rightarrow f'(\pi)+f'(0)\left(-\frac{1}{2}\right)=-1$

$x=0 \rightarrow f'(0)+\frac{1}{2}f'(0)=1,\ f'(0)=\frac{2}{3}$

$\therefore f'(\pi)-\frac{1}{3}=-1$

$f'(\pi)=-\frac{2}{3}$

28. 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속인 이계도함수를 갖고, 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $g(x)$를

$$g(x)=f'(2x)\sin \pi x+x$$

$g(0)=0 \rightarrow g^{-1}(0)=0$

$g(1)=1 \rightarrow g^{-1}(1)=1$

라 하자. 함수 $g(x)$는 역함수 $g^{-1}(x)$를 갖고,

$$\int_0^1 g^{-1}(x)\,dx=2\int_0^1 f'(2x)\sin \pi x\,dx+\frac{1}{4}$$

을 만족시킬 때, $\int_0^2 f(x)\cos\frac{\pi}{2}x\,dx$의 값은? [4점]

① $-\frac{1}{\pi}$ ② $-\frac{1}{2\pi}$ ③ $-\frac{1}{3\pi}$ ④ $-\frac{1}{4\pi}$ ⑤ $-\frac{1}{5\pi}$

$\int_0^1 g^{-1}(x)dx$ $\quad x=g(t),\ dx=g'(t)dt$ $\quad \int_0^1 g^{-1}(x)dx=\int_0^1 t\,g'(t)dt$

$=\left[t\,g(t)\right]_0^1-\int_0^1 g(t)dt=1-\int_0^1 g(t)dt$

$1-\int_0^1 g(x)dx=2\int_0^1 (g(x)-x)dx+\frac{1}{4}$

$=2\int_0^1 g(x)dx-1+\frac{1}{4},$

$\therefore \int_0^1 g(x)dx=\frac{7}{12}$

$\int_0^2 f(x)\cos\frac{\pi}{2}x\,dx$ $\quad x=2t,\ dx=2dt$

$=2\int_0^1 f(2t)\cos \pi t\,dt=2\left\{\left[\frac{1}{\pi}f(2t)\sin\pi t\right]_0^1-\frac{2}{\pi}\int_0^1 \overbrace{f'(2t)\sin\pi t}^{g(t)-t}\,dt\right\}$

$=-\frac{4}{\pi}\int_0^1 (g(t)-t)dt=-\frac{4}{\pi}\left(\frac{7}{12}-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{3\pi}$

단답형

29. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제m항까지의 합을 S_m이라 하자. 모든 자연수 m에 대하여

$$S_m=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{m+1}{n(n+m+1)}$$

일 때, $a_1+a_{10}=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.

(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

$\boxed{57}$

$S_{10}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{11}{k(k+11)} \to \frac{1}{k}-\frac{1}{k+11}$

$-\ S_9=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{10}{k(k+10)} \to \frac{1}{k}-\frac{1}{k+10}$

$a_{10}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+10}-\frac{1}{k+11}\right)=\frac{1}{11}$

$a_1=S_1=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n(n+2)}$

$=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$

$\therefore a_{10}+a_{11}=\frac{1}{11}+\frac{3}{2}=\frac{35}{22}$

30. 양수 k에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=(k-|x|)e^{-x}$$

이라 하자. 실수 전체의 집합에서 미분가능하고 다음 조건을 만족시키는 모든 함수 $F(x)$에 대하여 $F(0)$의 최솟값을 $g(k)$라 하자.

모든 실수 x에 대하여 $F'(x)=f(x)$이고 $F(x)\ge f(x)$이다.

$g\left(\frac{1}{4}\right)+g\left(\frac{3}{2}\right)=pe+q$일 때, $100(p+q)$의 값을 구하시오.

(단, $\lim_{x\to\infty}xe^{-x}=0$이고, p와 q는 유리수이다.) [4점]

$\boxed{25}$

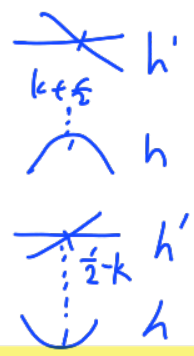
$f(x)=\begin{cases}(k-x)e^{-x} & (x\ge 0)\\ (k+x)e^{-x} & (x<0)\end{cases}$ $\quad F(x)=\begin{cases}(x-k+1)e^{-x}+C_1 & (x\ge 0)\\ -(x+k+1)e^{-x}+C_2 & (x<0)\end{cases}$

$C_2 = C_1+2$

$x=0$ 연속 $\to 1-k+C_1=-k-1+C_2,\ C_2=C_1+2$

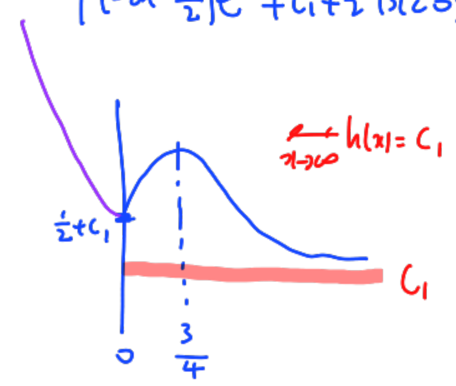
$\underbrace{F(x)-f(x)}_{h(x)}=\begin{cases}(2x-2k+1)e^{-x}+C_1 & (x\ge 0)\\ (-2x-2k-1)e^{-x}+C_1+2 & (x<0)\end{cases}$

$h'(x)=\begin{cases}-(2x-2k-1)e^{-x} & (x>0)\\ (2x+2k-1)e^{-x} & (x<0)\end{cases}$



i) $k=\frac{1}{4}$, $F(0)=\frac{3}{4}+C_1$

$h(x)=\begin{cases}(2x+\frac{1}{2})e^{-x}+C_1 & (x\ge 0)\\ (-2x-\frac{3}{2})e^{-x}+C_1+2 & (x<0)\end{cases}$

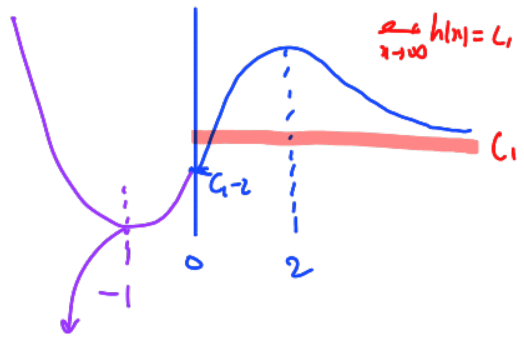


$C_1\ge 0$

$F(0)=\frac{3}{4}+C_1\ge \frac{3}{4}=g\left(\frac{1}{4}\right)$

ii) $k=\frac{3}{2}$, $F(0)=C_1-\frac{1}{2}$

$h(x)=\begin{cases}(2x-2)e^{-x}+C_1 & (x\ge 0)\\ (-2x-4)e^{-x}+C_1+2 & (x<0)\end{cases}$



$(-1,\ -2e+C_1+2)$

$-2e+C_1+2\ge 0$

$C_1\ge 2e-2$, $F(0)=C_1-\frac{1}{2}\ge 2e-\frac{5}{2}=g\left(\frac{3}{2}\right)$

$g\left(\frac{1}{4}\right)+g\left(\frac{3}{2}\right)=2e-\frac{7}{4}=pe+q \quad p=2,\ q=-\frac{7}{4}$

$100(p+q)=25$

※ 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

○ 이어서, 「**선택과목(기하)**」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

제 2 교시

수학 영역(기하)

5지선다형

23. 두 벡터 $\vec{a}=(4,0)$, $\vec{b}=(1,3)$에 대하여 $2\vec{a}+\vec{b}=(9,k)$ 일 때, k의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

24. 타원 $\frac{x^2}{4^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$의 두 초점 사이의 거리가 6일 때, b^2의 값은? (단, $0<b<4$) [3점]

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

$c=3$

$9=16-b^2$

$b^2=7$

25. 좌표공간의 서로 다른 두 점 $\mathrm{A}(a,\ b,\ -5)$, $\mathrm{B}(-8,\ 6,\ c)$에 대하여 선분 AB의 중점이 zx평면 위에 있고, 선분 AB를 $1:2$로 내분하는 점이 y축 위에 있을 때, $a+b+c$의 값은? [3점]

① -8 ② -4 ③ 0 ④ 4 ⑤ 8

$6+b=0,\ b=-6$

$\left(\dfrac{-8+2a}{1+2},\ \square,\ \dfrac{c-10}{1+2}\right)$

$\dfrac{-8+2a}{1+2}=0,\quad \dfrac{c-10}{1+2}=0$

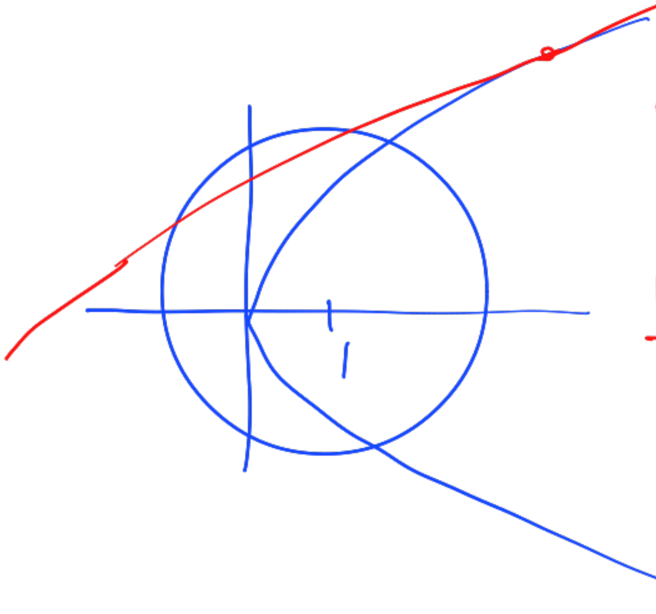
$a=4,\ c=10$

$a+b+c=8$

26. 좌표평면에서 점 $(1,\ 0)$을 중심으로 하고 반지름의 길이가 6인 원을 C라 하자. 포물선 $y^2=4x$ 위의 점 $(n^2,\ 2n)$에서의 접선이 원 C와 만나도록 하는 자연수 n의 개수는? [3점]

① 1 ② 3 ③ 5 ④ 7 ⑤ 9

$(n^2, 2n)$



$2ny=2(x+n^2)$

$x-ny+n^2=0$

$\dfrac{|1+n^2|}{\sqrt{n^2+1}}\le 6$

$\sqrt{n^2+1}\le 6$

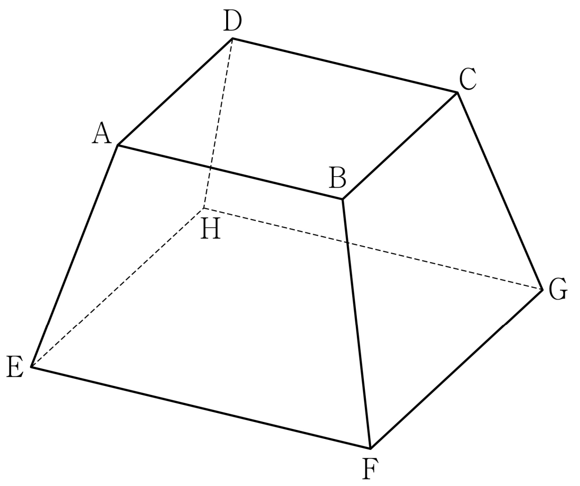
$n^2\le 35$

$n=1,2,3,4,5$

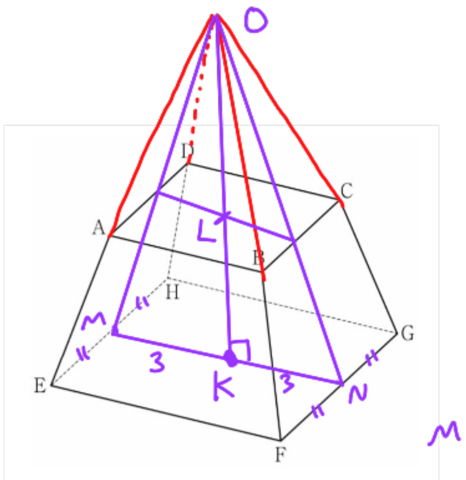
27. 그림과 같이 한 변의 길이가 각각 4, 6인 두 정사각형 ABCD, EFGH를 밑면으로 하고

$$\overline{AE}=\overline{BF}=\overline{CG}=\overline{DH}$$

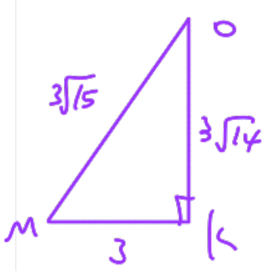
인 사각뿔대 ABCD−EFGH가 있다. 사각뿔대 ABCD−EFGH의 높이가 $\sqrt{14}$일 때, 사각형 AEHD의 평면 BFGC 위로의 정사영의 넓이는? [3점]

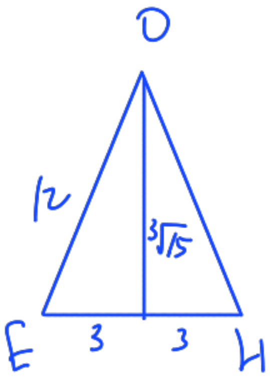


① $\frac{10}{3}\sqrt{15}$ ② $\frac{11}{3}\sqrt{15}$ ③ $4\sqrt{15}$ ④ $\frac{13}{3}\sqrt{15}$ ⑤ $\frac{14}{3}\sqrt{15}$



$LK=\sqrt{14}$
$OK=3\sqrt{14}$

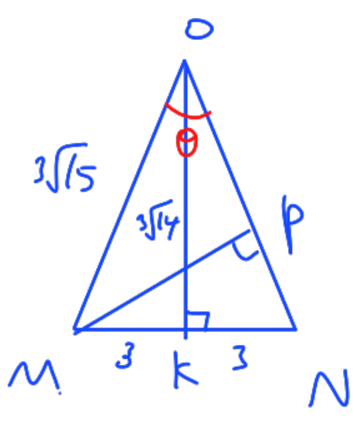




$\triangle OAD \sim \triangle OEH$
$l\ 2:3$
$s\ 4:9$

$\triangle OEH = 9\sqrt{15}$

$\therefore \square ADHE = \frac{5}{9}\triangle OEH$
$= 5\sqrt{15}$

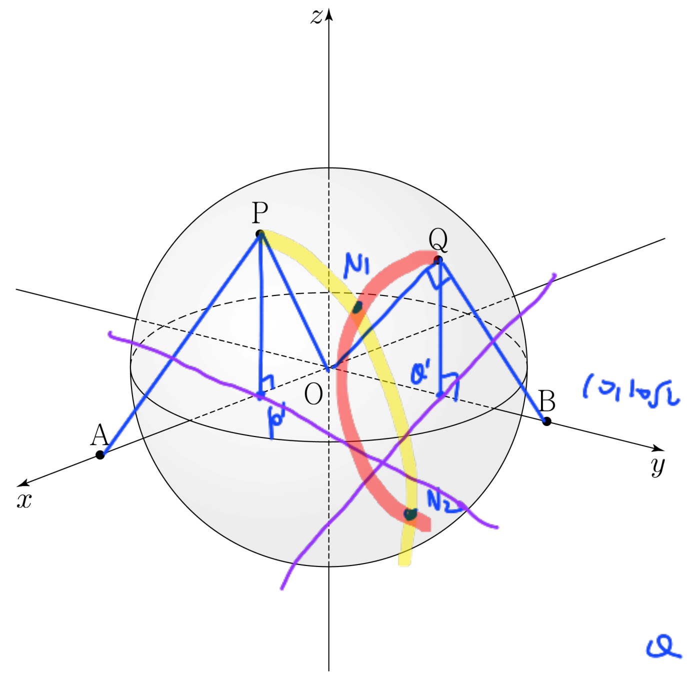


$6\times 3\sqrt{14} = MP\times 3\sqrt{15}$
$MP = \frac{6\sqrt{14}}{\sqrt{15}}$, $\sin\theta = \frac{2\sqrt{14}}{15}$, $\cos\theta = \frac{13}{15}$

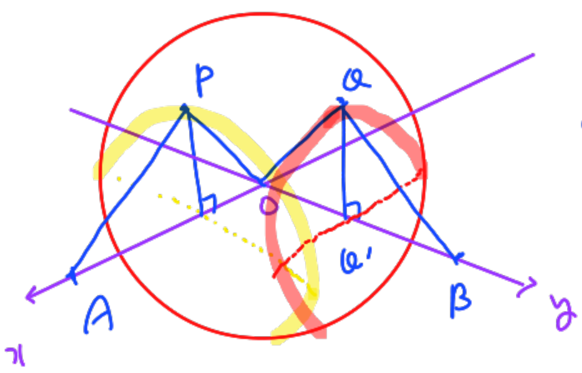
$\therefore \square ADHE \times \cos\theta$
$= 5\sqrt{15}\times\frac{13}{15} = \frac{13}{3}\sqrt{15}$

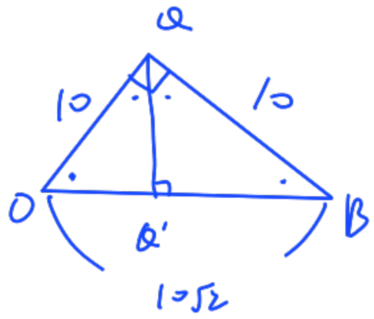
28. 좌표공간에 두 점 A$(a,0,0)$, B$(0,10\sqrt{2},0)$과 구 $S: x^2+y^2+z^2=100$이 있다. $\angle APO=\frac{\pi}{2}$인 구 S 위의 모든 점 P가 나타내는 도형을 C_1, $\angle BQO=\frac{\pi}{2}$인 구 S 위의 모든 점 Q가 나타내는 도형을 C_2라 하자. C_1과 C_2가 서로 다른 두 점 N_1, N_2에서 만나고 $\cos(\angle N_1ON_2)=\frac{3}{5}$일 때, a의 값은? (단, $a>10\sqrt{2}$이고, O는 원점이다.) [4점]

① $\frac{10}{3}\sqrt{30}$ ② $\frac{15}{4}\sqrt{30}$ ③ $\frac{25}{6}\sqrt{30}$ ④ $\frac{55}{12}\sqrt{30}$ ⑤ $5\sqrt{30}$

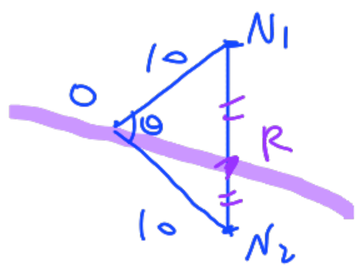


$(0, 10\sqrt{2}, 0)$

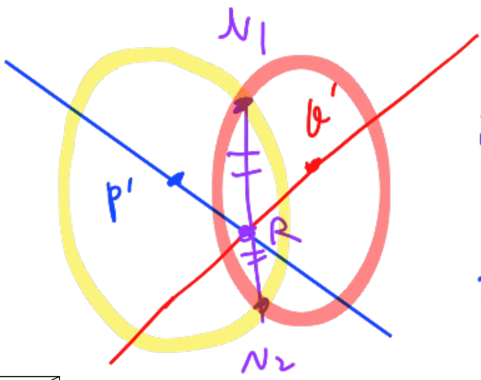




$10\sqrt{2}$
$\overline{QQ'}=\overline{OQ'}=5\sqrt{2}$
$Q'(0, 5\sqrt{2}, 0)$



$\overline{N_1N_2}^2 = 100+100-2\cdot 10\cdot 10\cdot\frac{3}{5}$
$= 200-120 = 80$
$\overline{N_1N_2} = 4\sqrt{5}$
$\overline{N_1R}=\overline{N_2R}=2\sqrt{5}$
$N_1(p, 5\sqrt{2}, 2\sqrt{5})$

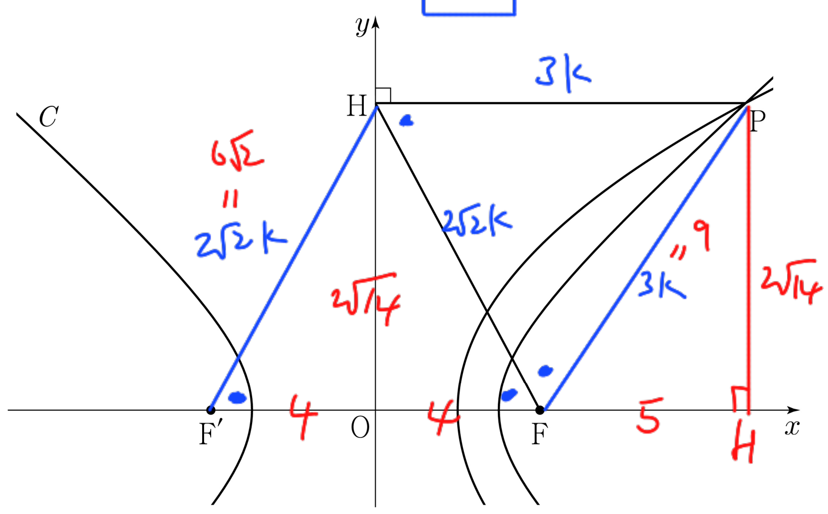


$\overline{ON_1} = \sqrt{p^2+70} = 10$ $\therefore p=\sqrt{30}$
$P'(\sqrt{30}, 0, 0)$
$\overline{OP}^2 = \overline{OP'}\times\overline{OA}$, $100 = \sqrt{30}\times a$
$a = \frac{10}{3}\sqrt{30}$

단답형

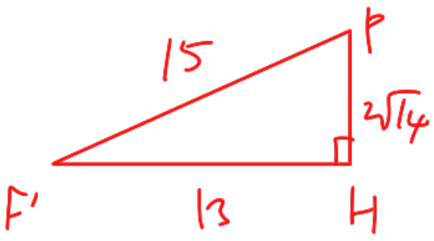
29. 그림과 같이 두 점 F$(4, 0)$, F$'(-4, 0)$을 초점으로 하는 쌍곡선 $C : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$이 있다. 점 F를 초점으로 하고 y축을 준선으로 하는 포물선이 쌍곡선 C와 만나는 점 중 제1사분면 위의 점을 P라 하자. 점 P에서 y축에 내린 수선의 발을 H라 할 때, $\overline{\mathrm{PH}} : \overline{\mathrm{HF}} = 3 : 2\sqrt{2}$이다. $a^2 \times b^2$의 값을 구하시오. (단, $a > b > 0$) [4점]

63



△PHF ∽ △HF'F, FF' = 8

$\frac{2\sqrt{2}k}{3k} = \frac{8}{2\sqrt{2}k}$, 8k = 24, k = 3



PF' = $\sqrt{169+56} = 15$

PF' − PF = 6 = 2a

a = 3, $b^2 = c^2 - a^2 = 7$

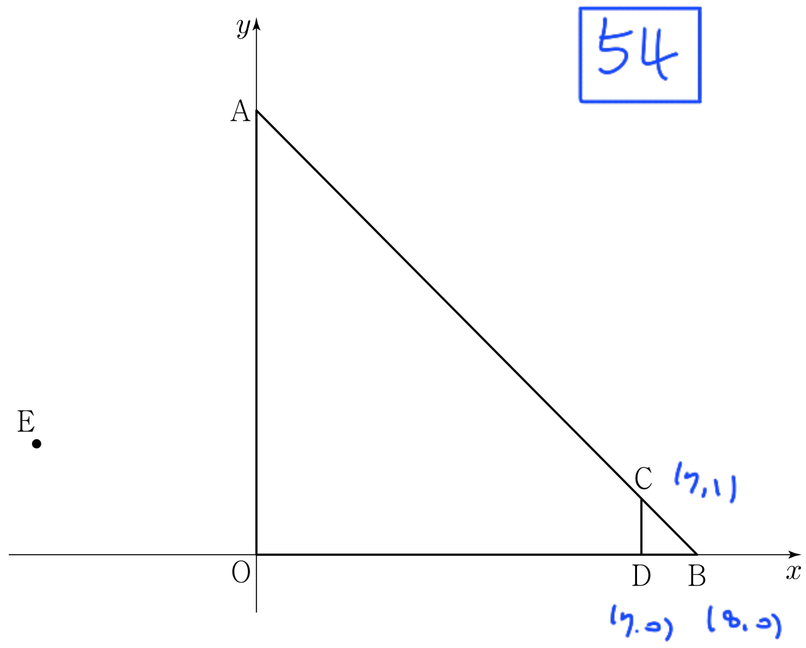
$a^2 \times b^2 = 63$

30. 좌표평면 위에 다섯 점

$$\mathrm{A}(0, 8),\ \mathrm{B}(8, 0),\ \mathrm{C}(7, 1),\ \mathrm{D}(7, 0),\ \mathrm{E}(-4, 2)$$

가 있다. 삼각형 AOB의 변 위를 움직이는 점 P와 삼각형 CDB의 변 위를 움직이는 점 Q에 대하여 $|\overrightarrow{\mathrm{PQ}} + \overrightarrow{\mathrm{OE}}|^2$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $M + m$의 값을 구하시오. (단, O는 원점이다.) [4점]

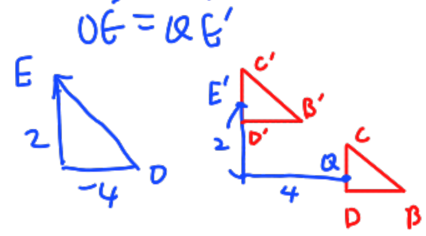
54



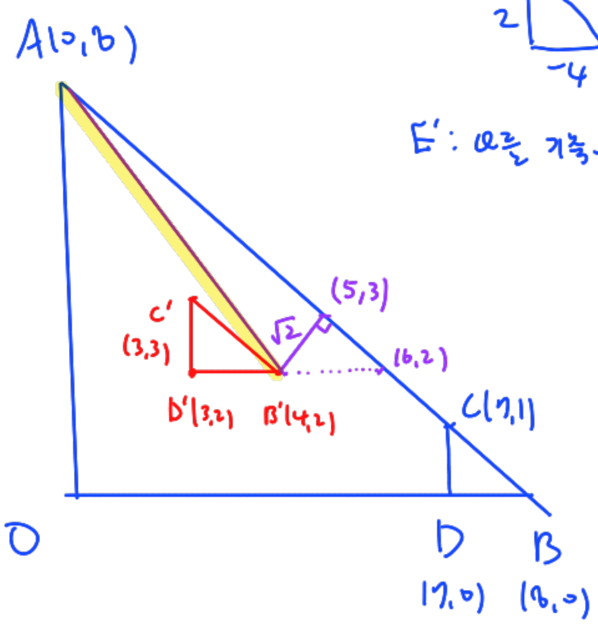
$\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{OE} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QE'}$

$= \overrightarrow{PE'}$

$\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{QE'}$



E' : Q를 x축 -4, y축 2 평행이동



|PE| 최소 m = √2

|PE| 최대 M = $|\overrightarrow{AB'}| = \sqrt{52}$

$m^2 + M^2 = 54$

* 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.