EBS
DifferIntegration

EBS Ch① 수열의 극한과 급수

① 수열의 극한과 급수

TH①. 2024년 수능특강

2024년 수능특강 유제

3점 연계 가능

1. 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\lim\limits_{n \to \infty}(2n-1)a_n = 2$일 때, $\lim\limits_{n \to \infty}\{(4n-1)(a_{2n}+a_{2n+1})+2a_{2n+1}\}$ 의 값은?

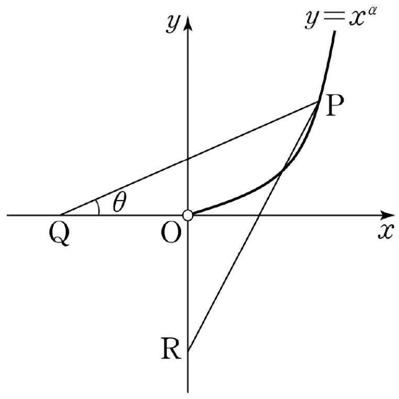
① 1　　② 2　　③ 3
④ 4　　⑤ 5

2024년 수능특강 Lv3

New

2. 그림과 같이 1보다 큰 상수 α와 자연수 n에 대하여 곡선 $y=x^\alpha\ (x>0)$ 위의 점 $\mathrm{P}(n,\ n^\alpha)$과 점 $\mathrm{R}(0,\ (-\alpha+1)n^\alpha)$이 있다. 음의 실수 t에 대하여 점 $\mathrm{Q}(t,\ 0)$이 $\overline{\mathrm{PQ}}=\overline{PR}$을 만족시킬 때, 직선 PQ와 x축이 이루는 예각의 크기를 θ라 하자.

$\lim\limits_{n \to \infty}\theta = \dfrac{\pi}{4}$일 때, 상수 α의 값은?



① $\sqrt{2}$　　② $\sqrt{3}$　　③ 2
④ $\sqrt{5}$　　⑤ $\sqrt{6}$

3점 연계 가능

3. $0 < k < 1$인 상수 k와 2 이상의 자연수 n에 대하여 좌표평면 위의 원점 O와 두 점 $A_n\left(2-\frac{k}{n},\ 0\right)$, $B_n\left(2,\ \frac{1}{n}\right)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형 OA_nB_n의 외접원의 반지름의 길이를 R_n이라 하자. $\lim_{n \to \infty} R_n = \frac{5}{4}$일 때, k의 값은?

① $\frac{2}{3}$ ② $\frac{17}{24}$ ③ $\frac{3}{4}$
④ $\frac{19}{24}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

3점 연계 가능

4. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자. $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - 2) = 10$일 때, $\lim_{n \to \infty}(S_{n+2} - 2n)$의 값은?

① 11 ② 12 ③ 13
④ 14 ⑤ 15

3점 연계 가능

5. $a_1=1$, $a_2=2$인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_n a_{n+1} a_{n+2} = \left(\frac{1}{4}\right)^n$$

을 만족시킬 때, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$의 값은?

① $\frac{7}{2}$ ② $\frac{11}{3}$ ③ $\frac{23}{6}$
④ 4 ⑤ $\frac{25}{6}$

6. 3의 배수인 자연수 p에 대하여 첫째항이 p이고 공비가 $\frac{3}{4}$인 등비수열 $\{a_n\}$과 첫째항이 6이고 공비가 $\frac{2p-10}{p-2}$인 등비수열 $\{b_n\}$이 $\sum_{n=1}^{\infty}(b_n-a_n)=q$를 만족시킨다. $p+q$의 값은? (단, q는 상수이다.)

① -8 ② -7 ③ -6
④ -5 ⑤ -4

7. 그림과 같이 자연수 m에 대하여 곡선 $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x+3$과 직선 $x=m$이 만나는 점을 $\mathrm{P_m}$이라 하자. $\mathrm{P_m P_{m+1}}$을 대각선으로 하고 모든 변이 x축 또는 y축과 평행한 직사각형의 넓이를 S_m이라 할 때, 부등식 $\sum_{n=1}^{\infty} S_{m+2n} > \frac{1}{1200}$을 만족시키는 m의 최댓값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

TH②. 2024년 수능완성

8. 0이 아닌 실수 전체의 집합에서 정의된 함수

$$f(x)=\begin{cases} \lim_{n\to\infty} \dfrac{x^n+\left(\frac{1}{x}\right)^{n+1}+\left(\frac{1}{x}\right)^n}{x^{n+1}+\left(\frac{1}{x}\right)^n} & (x\neq -1) \\ 1 & (x=-1) \end{cases}$$

에 대하여 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x+k$가 서로 다른 세 점에서 만나도록 하는 모든 실수 k의 값의 합이 S일 때, $6S$의 값을 구하시오.

3점 연계 가능

9. 2 이상의 자연수 n에 대하여 직선 $y=nx$ 위의 점 중 x좌표가 n인 점을 A_n이라 하고 직선 $y=\frac{1}{n}x$ 위의 점 중 y좌표가 n인 점을 B_n이라 하자. 삼각형 $\mathrm{OA}_n\mathrm{B}_n$에 내접하는 원의 반지름의 길이를 r_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{r_n}{n^2}$의 값은? (단, O는 원점이다.)

① $\frac{2-\sqrt{2}}{8}$ ② $\frac{2-\sqrt{2}}{4}$ ③ $\frac{2-\sqrt{2}}{2}$

④ $2-\sqrt{2}$ ⑤ $2(2-\sqrt{2})$

2024년 수능완성

10. 함수 $f(x)=\begin{cases}\log_{\frac{1}{2}}x & (0<x<1)\\ \log_4 x & (x\geq 1)\end{cases}$ 에 대하여 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $x=n$이 만나는 점을 P_n이라 할 때, 점 P_n을 지나고 x축에 평행한 직선이 함수 $y=f(x)$의 그래프와 만나는 점 중 P_n이 아닌 점을 Q_n이라 하자. 점 Q_n의 x좌표를 x_n이라할 때, $\sum_{n=2}^{\infty}(x_{2n-1}\times x_{2n+1})^2$의 값은? (단, n은 2 이상의 자연수이다.)

① 1 ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{1}{4}$

④ $\frac{1}{6}$ ⑤ $\frac{1}{8}$

11. $a_1 = b_1 \neq 0$인 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $a_{n+1} = ra_n$, $b_{n+1} = (r^2 - 1)b_n$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$
>
> (나) 두 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$은 모두 수렴하고
>
> $\sum_{n=1}^{\infty} a_n : \sum_{n=1}^{\infty} b_n = 14 : 3$이다.

급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{a_n}$이 실수 p에 수렴할 때, $44p$의 값을 구하시오. (단, r은 상수이다.)

1. 답. ④

$(2n-1)a_n = b_n$ 이라 하면 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 2$ 이므로

$\lim\limits_{n\to\infty} b_{2n} = 2,\ \lim\limits_{n\to\infty} b_{2n+1} = 2$

따라서

$\lim\limits_{n\to\infty}\{(4n-1)(a_{2n}+a_{2n+1})+2a_{2n+1}\}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\{(4n-1)a_{2n}+(4n+1)a_{2n+1}\}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}(b_{2n}+b_{2n+1})$

$=\lim\limits_{n\to\infty} b_{2n}+\lim\limits_{n\to\infty} b_{2n+1}$

$=2+2$

$=4$

2. 답. ①

$\overline{\mathrm{PQ}}=\overline{PR}$에서 $\overline{\mathrm{PQ}}^2=\overline{PR}^2$

$\overline{\mathrm{PQ}}^2=(n-t)^2+(n^\alpha-0)^2=(n-t)^2+n^{2\alpha}$,

$\overline{\mathrm{PR}}^2=(n-0)^2+\{n^\alpha-(-\alpha+1)n^\alpha\}^2=n^2+\alpha^2 n^{2\alpha}$ 이므로

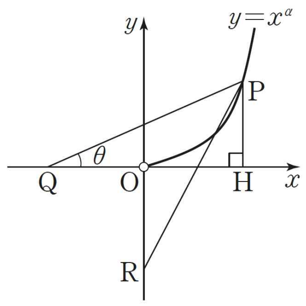
$(n-t)^2+n^{2\alpha}=n^2+\alpha^2 n^{2\alpha}$에서

$(n-t)^2=n^2+(\alpha^2-1)n^{2\alpha}$

$n-t>0$이므로

$n-t=\sqrt{n^2+(\alpha^2-1)n^{2\alpha}}$

또한 점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하자.



$\tan\theta=\dfrac{\overline{\mathrm{PH}}}{\overline{\mathrm{HQ}}}=\dfrac{n^\alpha}{n-t}=\dfrac{n^\alpha}{\sqrt{n^2+(\alpha^2-1)n^{2\alpha}}}$

그런데 $\lim\limits_{n\to\infty}\theta=\dfrac{\pi}{4}$이면 $\lim\limits_{n\to\infty} tan\theta=1$이고 $\alpha>1$이므로

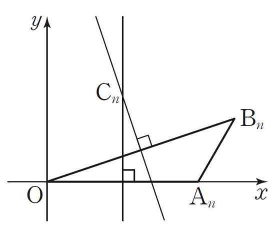
$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^\alpha}{\sqrt{n^2+(\alpha^2-1)n^{2\alpha}}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{1}{n^{2\alpha-2}}+\alpha^2-1}}$

$=\dfrac{1}{\sqrt{\alpha^2-1}}=1$

따라서 $\sqrt{\alpha^2-1}=1$에서 $\alpha^2=2$이고

$\alpha>1$이므로 $\alpha=\sqrt{2}$

3. 답. ③



선분 $\mathrm{OA_n}$의 수직이등분선은 직선 $x=1-\dfrac{k}{2n}$이다.

또 선분 $\mathrm{OB_n}$의 중점의 좌표는 $\left(1,\ \dfrac{1}{2n}\right)$이고, 직선 $\mathrm{OB_n}$의 기울기가 $\dfrac{1}{2n}$이므로 선분 $\mathrm{OB_n}$의 수직이등분선의 방정식은

$y-\dfrac{1}{2n}=-2n(x-1)$

$y=-2nx+2n+\dfrac{1}{2n}$

삼각형의 외접원의 중심은 세 변의 수직이등분선이 만나는 점이므로 두 직선 $x=1-\dfrac{k}{2n}$, $y=-2nx+2n+\dfrac{1}{2n}$이 만나는 점을 $\mathrm{C_n}$이라 하면 삼각형 $\mathrm{OA_nB_n}$의 외접원의 중심은 점 $\mathrm{C_n}$이다.

$y=-2n\left(1-\dfrac{k}{2n}\right)+2n+\dfrac{1}{2n}=k+\dfrac{1}{2n}$에서

$\mathrm{C_n}\left(1-\dfrac{\mathrm{k}}{2\mathrm{n}},\ \mathrm{k}+\dfrac{1}{2\mathrm{n}}\right)$

이때 $R_n=\overline{\mathrm{OC_n}}$이므로

$R_n=\sqrt{\left(1-\dfrac{k}{2n}\right)^2+\left(k+\dfrac{1}{2n}\right)^2}$

$=\sqrt{\dfrac{k^2+1}{4n^2}+k^2+1}$

$\lim\limits_{n\to\infty}R_n=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\dfrac{k^2+1}{4n^2}+k^2+1}$

$=\sqrt{0+k^2+1}$

$=\sqrt{k^2+1}$

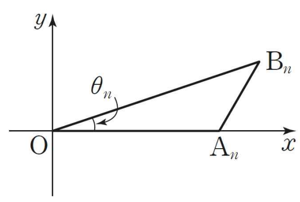
따라서 $\sqrt{k^2+1}=\dfrac{5}{4}$에서 $k^2=\dfrac{9}{16}$

$k>0$이므로 $k=\dfrac{3}{4}$

다른풀이

직선 $\mathrm{OB_n}$의 기울기가 $\dfrac{1}{2n}$이므로

$\angle \mathrm{B_nOA_n}=\theta_n$이라 하면



$\tan\theta_n=\dfrac{1}{2n}$

$1+\tan^2\theta_n=\dfrac{1}{\cos^2\theta_n}$ 에서

$\cos^2\theta_n=\dfrac{1}{1+\tan^2\theta_n}=\dfrac{1}{1+\left(\dfrac{1}{2n}\right)^2}=\dfrac{4n^2}{4n^2+1}$

$\sin^2\theta_n=1-\cos^2\theta_n=1-\dfrac{4n^2}{4n^2+1}=\dfrac{1}{4n^2+1}$

$\sin\theta_n>0$이므로 $\sin\theta_n=\dfrac{1}{\sqrt{4n^2+1}}$

이때 삼각형 $\mathrm{OA_nB_n}$에서

$\overline{\mathrm{A_nB_n}}=\sqrt{\left(\dfrac{k}{n}\right)^2+\left(\dfrac{1}{n}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{k^2+1}}{n}$

이고, 사인법칙에 의하여

$\dfrac{\overline{\mathrm{A_nB_n}}}{\sin\theta_n}=2R_n$

$$\frac{\frac{\sqrt{k^2+1}}{n}}{\frac{1}{\sqrt{4n^2+1}}}=2R_n$$

$$R_n=\frac{\sqrt{4n^2+1}\times\sqrt{k^2+1}}{2n}$$

$$\lim_{n\to\infty}R_n=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{4n^2+1}\times\sqrt{k^2+1}}{2n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{4+\frac{1}{n^2}}\times\sqrt{k^2+1}}{2}$$

$$=\frac{2\times\sqrt{k^2+1}}{2}$$

$$=\sqrt{k^2+1}$$

따라서 $\sqrt{k^2+1}=\frac{5}{4}$에서 $k^2=\frac{9}{16}$

$k>0$이므로 $k=\frac{3}{4}$

4. 답. ④

급수 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-2)$가 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty}(a_n-2)=0$

이때 $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\{(a_n-2)+2\}=\lim_{n\to\infty}(a_n-2)+\lim_{n\to\infty}2=0+2=2$

이므로

$\lim_{n\to\infty}a_{n+1}=2,\ \lim_{n\to\infty}a_{n+2}=2$

한편,

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-2)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(a_k-2)=\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}a_k-\sum_{k=1}^{n}2\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}(S_n-2n)$$

이므로 $\lim_{n\to\infty}(S_n-2n)=10$

따라서

$$\lim_{n\to\infty}(S_{n+2}-2n)=\lim_{n\to\infty}(S_n+a_{n+1}+a_{n+2}-2n)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\{(S_n-2n)+a_{n+1}+a_{n+2}\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}(S_n-2n)+\lim_{n\to\infty}a_{n+1}+\lim_{n\to\infty}a_{n+2}$$

$$=10+2+2$$

$$=14$$

5. 답. ⑤

$a_1=1,\ a_2=2$이므로

$a_1a_2a_3=\frac{1}{4}$에서 $a_3=\frac{1}{8}$

또 $a_{n+1}a_{n+2}a_{n+3}=\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}$이므로

$\frac{a_{n+1}a_{n+2}a_{n+3}}{a_na_{n+1}a_{n+2}}=\frac{\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{\left(\frac{1}{4}\right)^{n}}$에서

$$\frac{a_{n+3}}{a_n}=\frac{1}{4}$$

즉, 수열 $\{a_{3n-2}\}$, $\{a_{3n-1}\}$, $\{a_{3n}\}$은 첫째항이 각각 1, 2, $\frac{1}{8}$이고

공비가 모두 $\frac{1}{4}$인 등비수열이다.

따라서

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}a_{3n-2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_{3n-1}+\sum_{n=1}^{\infty}a_{3n}$$

$$=\frac{1}{1-\frac{1}{4}}+\frac{2}{1-\frac{1}{4}}+\frac{\frac{1}{8}}{1-\frac{1}{4}}$$

$$=\frac{4}{3}\times\left(1+2+\frac{1}{8}\right)$$

$$=\frac{4}{3}\times\frac{25}{8}$$

$$=\frac{25}{6}$$

6. 답. ③

등비수열 $\{a_n\}$의 공비가 $\frac{3}{4}$이므로 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$은 수렴하고

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\frac{p}{1-\frac{3}{4}}=4p$$

또 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}(b_n-a_n)$과 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$이 모두 수렴하므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\sum_{n=1}^{\infty}\{(b_n-a_n)+a_n\}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(b_n-a_n)+\sum_{n=1}^{\infty}a_n$$

$$=q+4p \qquad \cdots\cdots ㉠$$

즉, 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$은 수렴한다.

한편, 등비수열 $\{b_n\}$의 공비가 $\frac{2p-10}{p-2}$이므로

$-1<\frac{2p-10}{p-2}<1$

$p-2>0$이므로 $-p+2<2p-10<p-2$

$-p+2<2p-10$에서 $p>4$이고

$2p-10<p-2$에서 $p<8$이므로

$4<p<8$

p가 3의 배수인 자연수이므로 $p=6$

이때 수열 $\{b_n\}$의 공비가 $\frac{1}{2}$이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\frac{6}{1-\frac{1}{2}}=12$$

㉠에서

$q+24=12$이므로 $q=-12$

따라서 $p+q=6+(-12)=-6$

7. 답. ④

$$S_m=\{(m+1)-m\}+\left[\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^m+3\right\}-\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^{m+1}+3\right\}\right]$$

$$=\left(\frac{1}{3}\right)^m-\left(\frac{1}{3}\right)^{m+1}$$

$$=\frac{2}{3}\times\left(\frac{1}{3}\right)^m$$

이때

$$\sum_{n=1}^{\infty}S_{m+2n}$$

$$=S_{m+2}+S_{m+4}+S_{m+6}+\cdots$$

$$=\frac{2}{3}\times\left(\frac{1}{3}\right)^{m+2}+\frac{2}{3}\times\left(\frac{1}{3}\right)^{m+4}+\frac{2}{3}\times\left(\frac{1}{3}\right)^{m+6}+\cdots$$

즉, $\sum_{n=1}^{\infty}S_{m+2n}$은 첫째항이 S_{m+2}이고 공비가 $\frac{1}{9}$인 등비급수의 합이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}S_{m+2n}=\frac{\frac{2}{3}\times\left(\frac{1}{3}\right)^{m+2}}{1-\frac{1}{9}}$$

$$=\frac{1}{12}\times\left(\frac{1}{3}\right)^m$$

따라서 $\frac{1}{12}\times\left(\frac{1}{3}\right)^m>\frac{1}{1200}$에서

$$\left(\frac{1}{3}\right)^m>\frac{1}{100}$$

$$3^m<100$$

이때 $3^4<100<3^5$이므로 구하는 자연수 m의 최댓값은 4이다.

8. 정답 15

(i) $|x|>1$일 때

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{|x^n|}=0$이므로

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^n+\left(\frac{1}{x}\right)^{n+1}+\left(\frac{1}{x}\right)^n}{x^{n+1}+\left(\frac{1}{x}\right)^n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{x}+\left(\frac{1}{x}\right)^{2n+2}+\left(\frac{1}{x}\right)^{2n+1}}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^{2n+1}}$$

$$=\frac{1}{x}$$

(ii) $|x|<1$이고 $x\neq 0$일 때

$\lim_{n\to\infty}|x^n|=0$이므로

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^n+\left(\frac{1}{x}\right)^{n+1}+\left(\frac{1}{x}\right)^n}{x^{n+1}+\left(\frac{1}{x}\right)^n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n}+\frac{1}{x}+1}{x^{2n+1}+1}$$

$$=\frac{1}{x}+1$$

(iii) $x=1$일 때

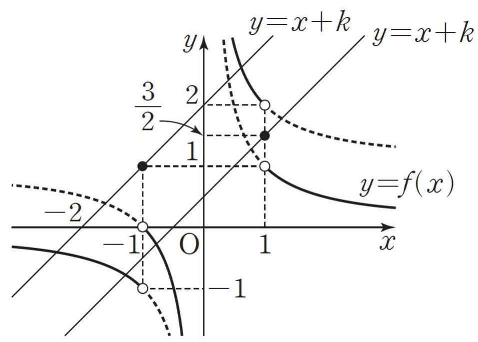
$\lim_{n\to\infty}x^n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{x^n}=1$이므로

$$f(1)=\frac{1+1+1}{1+1}=\frac{3}{2}$$

(i), (ii), (iii)에 의하여

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x} & (|x|>1)\\ \frac{1}{x}+1 & (|x|<1, x\neq 0)\\ \frac{3}{2} & (x=1)\\ 1 & (x=-1)\end{cases}$$

이고 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x+k$가 서로 다른 세 점에서 만나는 경우는 그림과 같이 직선 $y=x+k$가 점 $(-1,\ 1)$을 지나는 경우와 점 $\left(1,\ \frac{3}{2}\right)$을 지나는 경우이다.



$1=-1+k$에서 $k=2$이고

$\frac{3}{2}=1+k$에서 $k=\frac{1}{2}$이므로

$S=2+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$에서

$6S=6\times\frac{5}{2}=15$

9. 정답 ③

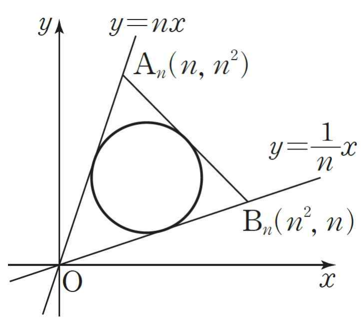
2 이상의 자연수 n에 대하여 직선 $y=nx$ 위의 점 중 x좌표가 n인 점을 $\mathrm{A_n}$의 좌표는 $(n,\ n^2)$이고 직선 $y=\frac{1}{n}x$ 위의 점 중 y좌표가 n인 점을 $\mathrm{B_n}$의 좌표는 $(n^2,\ n)$이므로

$$\overline{\mathrm{OA}_n}=\sqrt{n^2+n^4}$$

$$\overline{\mathrm{OB}_n}=\sqrt{n^4+n^2}$$

$$\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n}=\sqrt{(n^2-n)^2+(n-n^2)^2}=\sqrt{2}(n^2-n)$$

그러므로 삼각형 $\mathrm{OA_nB_n}$은 $\overline{\mathrm{OA}_n}=\overline{\mathrm{OB}_n}$인 이등변삼각형이다.



그림에서 삼각형 $\mathrm{OA_nB_n}$에 내접하는 원의 반지름의 길이를 r_n이라

하면 삼각형 $\mathrm{OA_nB_n}$의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times\left(\overline{\mathrm{OA}_n}\times r_n+\overline{\mathrm{OB}_n}\times r_n+\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n}\times r_n\right)$$

$$=\frac{r_n}{2}\times\left(\overline{\mathrm{OA}_n}+\overline{\mathrm{OB}_n}+\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n}\right) \qquad \cdots\cdots ㉠$$

한편, 점 $\mathrm{B_n}$에서 두 점 O, A_n을 지나는 직선 $y=nx$에 내린 수선의 발을 H_n이라 하면 $\overline{\mathrm{B}_n\mathrm{H}_n}$은 점 $\mathrm{B_n}$과 직선 $nx-y=0$ 사이의 거리이고 n은 2 이상의 자연수이므로

$$\overline{\mathrm{B}_n\mathrm{H}_n}=\frac{|n^3-n|}{\sqrt{n^2+1}}=\frac{n(n^2-1)}{\sqrt{n^2+1}}$$

이때 삼각형 $\mathrm{OA_nB_n}$의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{OA}_n}\times\overline{\mathrm{B}_n\mathrm{H}_n} \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡에서

$$\frac{r_n}{2}\times\left(\overline{\mathrm{OA}_n}+\overline{\mathrm{OB}_n}+\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n}\right)=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{OA}_n}\times\overline{\mathrm{B}_n\mathrm{H}_n}$$

$$r_n=\frac{\overline{\mathrm{OA}_n}\times\overline{\mathrm{B}_n\mathrm{H}_n}}{\overline{\mathrm{OA}_n}+\overline{\mathrm{OB}_n}+\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n}}$$

$$=\frac{\sqrt{n^2+n^4}\times\dfrac{n(n^2-1)}{\sqrt{n^2+1}}}{\sqrt{n^2+n^4}+\sqrt{n^4+n^2}+\sqrt{2}\,(n^2-n)}$$

$$=\frac{n^2(n^2-1)}{2\sqrt{n^4+n^2}+\sqrt{2}\,(n^2-n)}$$

따라서

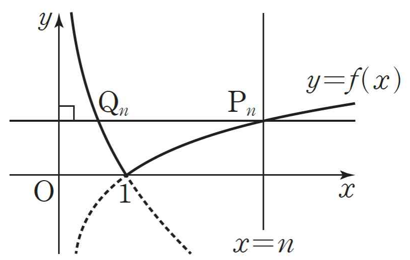
$$\lim_{n\to\infty}\frac{r^n}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-1}{2\sqrt{n^4+n^2}+\sqrt{2}\,(n^2-n)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\dfrac{1}{n^2}}{2\sqrt{1+\dfrac{1}{n^2}}+\sqrt{2}\left(1-\dfrac{1}{n}\right)}$$

$$=\frac{1}{2+\sqrt{2}}=\frac{2-\sqrt{2}}{2}$$

10. 정답 ④

함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



그림과 같이 점 $\mathrm{P_n}$은 x좌표가 n이고 곡선 $y=\log_4 x$ 위의 점이므로 점 $\mathrm{P_n}$의 y좌표는 $\log_4 n$이다.

또 점 $\mathrm{P_n}$을 지나고 x축에 평행한 직선의 방정식은 $y=\log_4 n$이므로 곡선 $y=\log_{\frac{1}{2}} x$ 위의 점 Q_n의 y좌표는 $\log_4 n$이다.

$\log_4 n=\log_{\frac{1}{2}} x_n$, 즉 $\frac{1}{2}\log_2 n=\log_2 x_n^{-1}$에서

$x_n^{-1}=n^{\frac{1}{2}}$, $x_n=\frac{1}{\sqrt{n}}$

따라서 $x_{2n-1}=\frac{1}{\sqrt{2n-1}}$, $x_{2n+1}=\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$이므로

$$\sum_{n=2}^{\infty}(x_{2n-1}\times x_{2n+1})^2=\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{2n-1}}\times\frac{1}{\sqrt{2n+1}}\right)^2$$

$$=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2n+1}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$$

11. 정답 24

조건 (가)에서 수열 $\{a_n\}$은 공비가 r인 등비수열이고, 수열 $\{b_n\}$은 공비가 r^2-1인 등비수열이다.

조건 (나)에서 등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$은 수렴하므로

$-1<r<1 \qquad \cdots\cdots ㉠$

등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$도 수렴하므로

$-1<r^2-1<1$에서 $0<r^2<2$이고

$-\sqrt{2}<r<0$ 또는 $0<r<\sqrt{2} \qquad \cdots\cdots ㉡$

㉠, ㉡을 동시에 만족시키는 r의 값의 범위는

$-1<r<0$ 또는 $0<r<1$

두 등비급수의 합을 구하면

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\frac{a_1}{1-r}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\frac{b_1}{1-(r^2-1)}=\frac{b_1}{2-r^2}$$

조건 (나)에서

$$\frac{a_1}{1-r}:\frac{b_1}{2-r^2}=14:3$$

$\frac{3a_1}{1-r}=\frac{14b_1}{2-r^2}$에서 $a_1=b_1\neq 0$이므로 양변을 a_1로 나누면

$$\frac{3}{1-r}=\frac{14}{2-r^2}$$

$3(2-r^2)=14(1-r)$

$3r^2-14r+8=0$

$(3r-2)(r-4)=0$

이때 $-1<r<0$ 또는 $0<r<1$이므로 $r=\frac{2}{3}$

즉, 수열 $\{a_n\}$은 공비가 $\frac{2}{3}$인 등비수열이고, 수열 $\{b_n\}$은 공비가 $-\frac{5}{9}$인 등비수열이다.

두 등비수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$의 일반항을 각각 구하면

$a_n=a_1\times\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$, $b_n=b_1\times\left(-\frac{5}{9}\right)^{n-1}$이므로

$$\frac{a_n}{b_n}=\frac{b_1\times\left(-\frac{5}{9}\right)^{n-1}}{a_1\times\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}}=\left(-\frac{5}{6}\right)^{n-1}$$

따라서

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{a_n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{5}{6}\right)^{n-1}=\frac{1}{1-\left(-\frac{5}{6}\right)}=\frac{6}{11}$$ 이므로

$p=\frac{6}{11}$ 이고

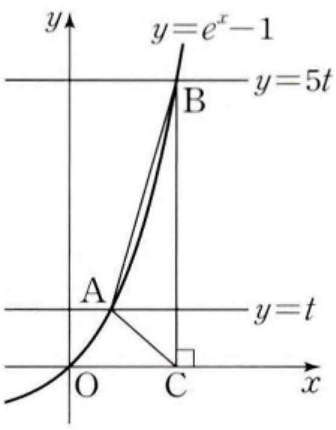
$44p=44\times\frac{6}{11}=24$

② 함수의 극한

TH①. 2024년 수능특강

2024년 수능특강 Lv2

1. 그림과 같이 양수 t에 대하여 곡선 $y=e^x-1$이 두 직선 $y=t$, $y=5t$와 만나는 점을 각각 A, B라 하고, 점 B에서 x축에 내린 수선의 발을 C라 하자. 삼각형 ACB의 넓이를 $S(t)$라 할 때, $\lim_{t\to0+}\frac{S(t)}{t^2}$의 값을 구하시오.

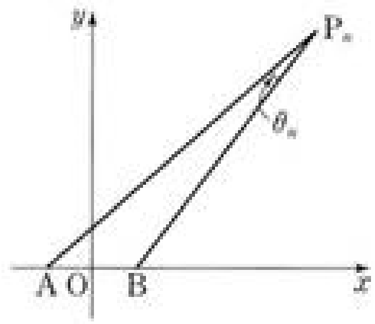


2024년 수능특강 Lv3

3점(27번) 연계 가능

2. 그림과 같이 좌표평면에 두 점 $\mathrm{A}(-1,\ 0)$, $\mathrm{B}(1,\ 0)$이 있다. 점 $\mathrm{P}_n(2n,\ 5)$에 대하여 $\angle \mathrm{AP}_n\mathrm{B}=\theta_n$이라 할 때, $\sum_{n=1}^{10}\frac{2\tan\theta_n}{2-5\tan\theta_n}$의 값은? (단, n은 자연수이다.)

① $\frac{14}{3}$ ② $\frac{33}{7}$ ③ $\frac{100}{21}$
④ $\frac{101}{21}$ ⑤ $\frac{34}{7}$



New

3. 양수 $a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_n$에 대하여

$(n+2)$개의 수 $1,\ a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_n,\ e^2$은 이 순서대로 등차수열을 이루고,

양수 $b_1,\ b_2,\ b_3,\ \cdots,\ b_n$에 대하여

$(n+2)$개의 수 $1,\ b_1,\ b_2,\ b_3,\ \cdots,\ b_n,\ e^2$은 이 순서대로 등비수열을 이룬다.

$$f(n)=1+a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n+e^2,$$
$$g(n)=1+b_1+b_2+b_3+\cdots+b_n+e^2$$

이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\dfrac{g(n)}{f(n)}$의 값은?

① $\dfrac{e^2-2}{1+e^2}$　　② $\dfrac{e^2-1}{1+e^2}$　　③ $\dfrac{e^2}{1+e^2}$

④ 1　　⑤ $\dfrac{e^2+2}{1+e^2}$

2024년 수능특강 Lv3

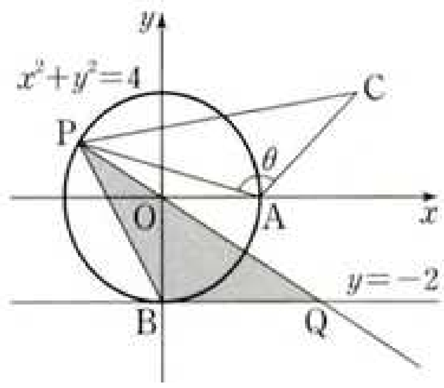
연계 가능

4. 그림과 같이 좌표평면에서 세 점

$\mathrm{A}(2,\ 0),\ \mathrm{B}(0,\ -2),\ \mathrm{C}(4,\ 2)$와 원 $x^2+y^2=4$위의 제2사분면에 있는 점 P에 대하여 직선 PO와 직선 $y=2$가 만나는 점을 Q라 하고, $\angle\mathrm{PAC}=\theta$라 하자. 삼각형PBQ의 넓이를 $\mathrm{S}(\theta)$라 할 때, $\lim_{\theta\to\frac{3\pi}{4}-}\{(3\pi-4\theta)\mathrm{S}(\theta)\}$의 값은? (단, O는 원점이다.)

① 1　　② 2　　③ 3

④ 4　　⑤ 5



TH②. 2024년 수능완성

5. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $0 \le f(x) < \frac{\pi^2}{4}$ 이고 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\lim_{x \to 1} \frac{\ln\{1+f(x)\}}{x-1} = 6$

(나) $\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos\sqrt{f(x)}}{e^x - 1} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{f(\sin x) f(\cos x)}{x^3}$ 의 값은? [4점]

① -16　② -12　③ -9　④ -6　⑤ -3

1. 답. 10

점 A에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하면

$e^x-1=t$에서 $x=\ln(1+t)$이므로

$\mathrm{H}(\ln(1+t),\ 0)$

또 $e^x-1=5t$에서 $x=\ln(1+5t)$이므로

$\mathrm{C}(\ln(1+5t),\ 0)$

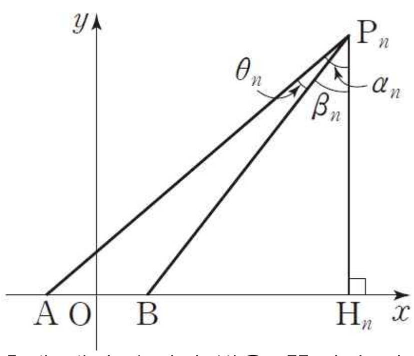
삼각형 ACB의 넓이는

$$S(t)=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{BC}}\times\overline{\mathrm{HC}}$$
$$=\frac{1}{2}\times5t\times\{\ln(1+5t)-\ln(1+t)\}$$
$$=\frac{5}{2}t\{\ln(1+5t)-\ln(1+t)\}$$

따라서

$$\lim_{t\to0+}\frac{S(t)}{t^2}$$
$$=\frac{5}{2}\lim_{t\to0+}\frac{\ln(1+5t)-\ln(1+t)}{t}$$
$$=\frac{5}{2}\lim_{t\to0+}\left\{\frac{\ln(1+5t)}{t}-\frac{\ln(1+t)}{t}\right\}$$
$$=\frac{5}{2}\times\left\{\lim_{t\to0+}\frac{\ln(1+5t)}{5t}\times5-\lim_{t\to0+}\frac{\ln(1+t)}{t}\right\}$$
$$=\frac{5}{2}\times(1\times5-1)$$
$$=10$$

2. 답. ③



점 P_n에서 x축에 내린 수선의 발을 H_n이라 하고

$\angle AP_nH_n=\alpha_n$, $\angle BP_nH_n=\beta_n$이라 하면 $\theta_n=\alpha_n-\beta_n$

이때

$$\tan\alpha_n=\frac{\overline{AH_n}}{\overline{P_nH_n}}=\frac{2n+1}{5},\ \tan\beta_n=\frac{\overline{BH_n}}{\overline{P_nH_n}}=\frac{2n-1}{5}$$

이므로

$$\tan\theta_n=\tan(\alpha_n-\beta_n)$$
$$=\frac{\tan\alpha_n-\tan\beta_n}{1+\tan\alpha_n\tan\beta_n}$$
$$=\frac{\frac{2n+1}{5}-\frac{2n-1}{5}}{1+\frac{2n+1}{5}\times\frac{2n-1}{5}}$$
$$=\frac{10}{25+(2n-1)(2n+1)}$$

따라서

$$\sum_{n=1}^{10}\frac{2\tan\theta_n}{2-5\tan\theta_n}$$
$$=\sum_{n=1}^{10}\frac{2\times\frac{10}{25+(2n-1)(2n+1)}}{2-5\times\frac{10}{25+(2n-1)(2n+1)}}$$
$$=\sum_{n=1}^{10}\frac{10}{(2n-1)(2n+1)}$$
$$=5\sum_{n=1}^{10}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$$
$$=5\left\{\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{19}-\frac{1}{21}\right)\right\}$$
$$=5\times\left(1-\frac{1}{21}\right)$$
$$=\frac{100}{21}$$

3. 답. ②

$1,\ a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_n,\ e^2$ 이 등차수열을 이루므로

$$f(n)=\frac{(2+n)(1+e^2)}{2}$$

또 $1,\ b_1,\ b_2,\ b_3,\ \cdots,\ b_n,\ e^2$ 이 등비수열을 이루므로 이 수열의 공비를 r $(r>0)$이라 하면

$1\times r^{n+1}=e^2$에서 $r=e^{\frac{2}{n+1}}$

$$g(n)=\frac{1\times(r^{n+2}-1)}{r-1}=\frac{e^{\frac{2(n+2)}{n+1}}-1}{e^{\frac{2}{n+1}}-1}$$

그러므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{g(n)}{f(n)}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{e^{\frac{2(n+2)}{n+1}}-1}{e^{\frac{2}{n+1}}-1}}{\frac{(n+2)(1+e^2)}{2}}$$
$$=\frac{2}{1+e^2}\lim_{n\to\infty}\left[\left\{e^{\frac{2(n+2)}{n+1}}-1\right\}\times\frac{\frac{1}{n+2}}{e^{\frac{2}{n+1}}-1}\right]$$
$$=\frac{2}{1+e^2}\lim_{n\to\infty}\left[\left\{e^{\frac{2(n+2)}{n+1}}-1\right\}\times\frac{\frac{2}{n+1}}{e^{\frac{2}{n+1}}-1}\times\frac{n+1}{2(n+2)}\right]$$

이때 $\lim_{n\to\infty}\dfrac{\frac{2}{n+1}}{e^{\frac{2}{n+1}}-1}$에서 $\dfrac{2}{n+1}=t$로 놓으면

$n\to\infty$일 때 $t\to 0+$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2}{n+1}}{e^{\frac{2}{n+1}}-1}=\lim_{t\to 0+}\frac{t}{e^t-1}=\lim_{t\to 0+}\frac{1}{\frac{e^t-1}{t}}=\frac{1}{1}=1$$

또 $\lim_{n\to\infty}\dfrac{2(n+2)}{(n+1)}=2$, $\lim_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{2(n+2)}=\dfrac{1}{2}$이므로

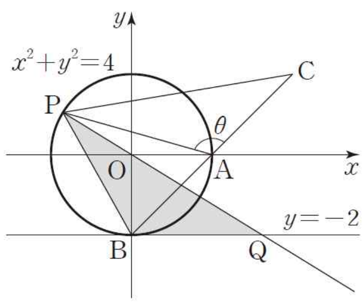
$$\lim_{n\to\infty}\frac{g(n)}{f(n)}$$

$$=\frac{2}{1+e^2}\left[\lim_{n\to\infty}\left\{e^{\frac{2(n+2)}{n+1}}-1\right\}\times\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2}{n+1}}{e^{\frac{2}{n+1}}-1}\times\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2(n+2)}\right]$$

$$=\frac{2}{1+e^2}\left\{(e^2-1)\times 1\times\frac{1}{2}\right\}$$

$$=\frac{e^2-1}{1+e^2}$$

4. 답. ④



$\angle AOB=\dfrac{\pi}{2}$이므로 중심각과 원주각의 성질에 의하여

$\angle APB=\dfrac{1}{2}\angle AOB=\dfrac{\pi}{4}$

삼각형 PBA에서 $\angle BAP=\pi-\theta$이므로

$\angle PBA=\pi-\dfrac{\pi}{4}-(\pi-\theta)=\theta-\dfrac{\pi}{4}$

이때 $\angle ABQ=\angle APB=\dfrac{\pi}{4}$이므로

$\angle PBQ=\angle PBA+\angle ABQ=\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)+\dfrac{\pi}{4}=\theta$

또 삼각형 PBA에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{AB}}{\sin\frac{\pi}{4}}=\frac{\overline{PB}}{\sin(\pi-\theta)}$$

$$\frac{2\sqrt{2}}{\frac{1}{\sqrt{2}}}=\frac{\overline{PB}}{\sin\theta}$$

$\overline{PB}=4\sin\theta$

한편, 삼각형 OPB에서 $\angle PBO=\theta-\dfrac{\pi}{2}$이고

$\overline{OP}=\overline{OB}$이므로

$\angle OPB=\theta-\dfrac{\pi}{2}$

중심각과 원주각의 성질에 의하여

$\angle QOB=2\times\left(\theta-\dfrac{\pi}{2}\right)=2\theta-\pi$

이므로 삼각형 OBQ에서

$\overline{BQ}=\overline{OB}\times\tan(2\theta-\pi)=2\tan 2\theta$

따라서 삼각형 PBQ의 넓이는

$$S(\theta)=\frac{1}{2}\times\overline{PB}\times\overline{BQ}\times\sin\theta$$

$$=\frac{1}{2}\times 4\sin\theta\times 2\tan 2\theta\times\sin\theta$$

$$=4\tan 2\theta\sin^2\theta$$

이므로

$$\lim_{\theta\to\frac{3\pi}{4}-}\{(3\pi-4\theta)S(\theta)\}$$

$$=\lim_{\theta\to\frac{3\pi}{4}-}\{(3\pi-4\theta)\tan 2\theta\times 4\sin^2\theta\}$$

이때 $\lim_{\theta\to\frac{3\pi}{4}-}\{(3\pi-4\theta)\tan 2\theta\}$에서 $\theta-\dfrac{3\pi}{4}=t$로 놓으면

$\theta\to\dfrac{3\pi}{4}-$일 때, $t\to 0-$이므로

$$\lim_{\theta\to\frac{3\pi}{4}-}\{(3\pi-4\theta)\tan 2\theta\}$$

$$=\lim_{t\to 0-}\left\{(-4t)\tan\left(\frac{3\pi}{2}+2t\right)\right\}$$

$$=\lim_{t\to 0-}\frac{4t}{\tan 2t}$$

$$=\lim_{t\to 0-}\left(\frac{2t}{\tan 2t}\times 2\right)$$

$=1\times 2$

$=2$

따라서

$$\lim_{\theta\to\frac{3\pi}{4}-}\{(3\pi-4\theta)S(\theta)\}$$

$$=\lim_{\theta\to\frac{3\pi}{4}-}\{(3\pi-4\theta)\tan 2\theta\}\times\lim_{\theta\to\frac{3\pi}{4}-}4\sin^2\theta$$

$=2\times 2$

$=4$

5. **정답** ④

조건 (가)에서 $x\to 1$일 때 (분모) → 0이고 극한값이 존재하므로 (분자) → 0이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to 1}\ln\{1+f(x)\}=0$이므로 $\lim_{x\to 1}f(x)=0$

이때

$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln\{1+f(x)\}}{x-1}=\lim_{x\to 1}\left[\frac{\ln\{1+f(x)\}}{f(x)}\times\frac{f(x)}{x-1}\right]=6$$

$\lim_{x\to 1}\dfrac{\ln\{1+f(x)\}}{f(x)}=1$이므로 $\lim_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{x-1}=6$

$x-1=t$라 하면 $\lim_{t\to 0}\dfrac{f(t+1)}{t}=6$ …… ㉠

조건 (나)에서 $x\to 0$일 때 (분모) → 0이고 극한값이 존재하므로 (분자) → 0이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to 0}\{1-\cos\sqrt{f(x)}\}=0$ 이므로 $\lim_{x\to 0}\sqrt{f(x)}=1$

$0\le f(x)<\frac{\pi^2}{4}$ 에서 $0\le \sqrt{f(x)}<\frac{\pi}{2}$ 이므로 $\lim_{x\to 0}f(x)=0$

이때

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos\sqrt{f(x)}}{e^x-1}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\{1-\cos\sqrt{f(x)}\}\{1+\cos\sqrt{f(x)}\}}{(e^x-1)\{1+\cos\sqrt{f(x)}\}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2\sqrt{f(x)}}{(e^x-1)\{1+\cos\sqrt{f(x)}\}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2\sqrt{f(x)}}{(e^x-1)\{1+\cos\sqrt{f(x)}\}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[\frac{\sin^2\sqrt{f(x)}}{f(x)}\times\frac{x}{e^x-1}\times\frac{f(x)}{x\{1+\cos\sqrt{f(x)}\}}\right]=1$$

$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2\sqrt{f(x)}}{f(x)}=1$, $\lim_{x\to 0}\frac{x}{e^x-1}=1$, $\lim_{x\to 0}\{1+\cos\sqrt{f(x)}\}=2$

이므로 $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=2$ …… ㉡

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(\sin x)f(\cos x)}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{f(\sin x)}{\sin x}\times\frac{f((\cos x-1)+1)}{\cos x-1}\times\frac{\sin x(\cos x-1)}{x^3}\right\}$$

㉠, ㉡에서 $\lim_{x\to 0}\frac{f((\cos x-1)+1)}{\cos x-1}=6$, $\lim_{x\to 0}\frac{f(\sin x)}{\sin x}=2$이고

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x(\cos x-1)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x(\cos x-1)(\cos x+1)}{x^3(\cos x+1)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^3 x}{x^3}\times\lim_{x\to 0}\frac{-1}{\cos x+1}$$

$$=1^3\times\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$=-\frac{1}{2}$$

이므로

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(\sin x)f(\cos x)}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{f(\sin x)}{\sin x}\times\lim_{x\to 0}\frac{f((\cos x-1)+1)}{\cos x-1}\times\lim_{x\to 0}\frac{\sin x(\cos x-1)}{x^3}$$

$$=2\times 6\times\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$=-6$$

③ 여러 가지 미분

TH①. 2024년 수능특강

2024년 수능특강 Lv3

연계가능성 높음

1. 두 함수 $f(x)=e^{|\cos\pi x|}$, $g(x)=ax^3+ax-2a+1$에 대하여 함수 $(f\circ g)(x)$가 열린구간 $(0,\ 2)$에서 미분가능하도록 하는 양수 a의 최댓값은?

① $\frac{1}{20}$ ② $\frac{1}{16}$ ③ $\frac{1}{12}$
④ $\frac{1}{8}$ ⑤ $\frac{1}{4}$

2024년 수능특강 Lv3

연계가능성 높음

2. $0<t<\frac{5}{2}$인 실수 t에 대하여 열린구간 (0, π)에서 정의된 함수 $f(x)=2tx-t\cos x-5\sin x$가 있다. x축에 평행한 직선이 함수 $y=f(x)$의 그래프에 접할 때 접점의 x좌표를 $g(t)$라 하면 함수 $g(t)$는 열린구간 $\left(0,\ \frac{5}{2}\right)$에서 미분가능하다. $g(\alpha)=\frac{\pi}{6}$인 실수 α에 대하여 $\alpha\times g'(\alpha)$의 값은?

① $-\frac{7\sqrt{3}}{8}$ ② $-\frac{3\sqrt{3}}{4}$ ③ $-\frac{5\sqrt{3}}{8}$
④ $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ ⑤ $-\frac{3\sqrt{3}}{8}$

2024년 수능특강 Lv3

연계가능성 높음

3. 함수 $f(x)=e^{ax}-e^{-ax}\,(a<0)$의 역함수를 $g(x)$라 하자.
등식

$$\lim_{x\to b}\frac{f(x)+g(x)}{(x-b)g\left(x-\frac{3}{2}\right)}=-\frac{4a^3+a}{2f''\left(\frac{3}{2}\right)}$$

를 만족시키는 실수 b가 존재할 때, 상수 a의 값은?

① $-\frac{5}{3}\ln 2$ ② $-\frac{4}{3}\ln 2$ ③ $-\ln 2$

④ $-\frac{2}{3}\ln 2$ ⑤ $-\frac{1}{3}\ln 2$

TH②. 2024년 수능완성

2024년 수능완성

4. 함수 $f(x)=e^x+x$와 함수 $f(x)$의 역함수 $g(x)$가 있다. 실수 t에 대하여 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점 $(t,\ f(t))$에서의 접선과 함수 $y=g(x)$의 그래프 위의 점 $(k,\ g(k))$에서의 접선이 이루는 예각의 크기가 $\frac{\pi}{4}$가 되도록 하는 실수 k의 값을 $h(t)$라 하자. $16\times\{h'(\ln 8)\}^2$의 값을 구하시오. [4점]

1. 답. ②

$0 < x \le \frac{1}{2}$ 또는 $\frac{3}{2} \le x < 2$에서 $\cos\pi x \ge 0$,

$\frac{1}{2} < x < \frac{3}{2}$에서 $\cos\pi x < 0$이므로

$$f(x) = \begin{cases} e^{\cos\pi x} & \left(0 < x \le \frac{1}{2} \text{ 또는 } \frac{3}{2} \le x < 2\right) \\ e^{-\cos\pi x} & \left(\frac{1}{2} < x < \frac{3}{2}\right) \end{cases}$$

$(e^{\cos\pi x})' = e^{\cos\pi x} \times (\cos\pi x)' = -\pi e^{\cos\pi x}\sin\pi x$,
$(e^{-\cos\pi x})' = e^{-\cos\pi x} \times (-\cos\pi x)' = \pi e^{-\cos\pi x}\sin\pi x$
이므로

$$f(x) = \begin{cases} -\pi e^{\cos\pi x}\sin\pi x & \left(0 < x < \frac{1}{2} \text{ 또는 } \frac{3}{2} < x < 2\right) \\ \pi e^{-\cos\pi x}\sin\pi x & \left(\frac{1}{2} < x < \frac{3}{2}\right) \end{cases}$$

이고 함수 $f(x)$는 $x = \frac{1}{2}, x = \frac{3}{2}$에서 미분가능하지 않다.

한편, 함수 $g(x) = ax^3 + ax - 2a + 1$에서
$g'(x) = 3ax^2 + a$이고 $a > 0$이므로 모든 실수 x에 대하여 $g'(x) > 0$이고, 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 증가한다.
또한 방정식 $x^3 + x - 2 = 0$의 실근은
$(x-1)(x^2+x+2) = 0$에서 $x = 1$뿐이므로
$g(x) = ax^3 + ax - 2a + 1 = a(x^3 + x - 2) + 1$에서 곡선 $y = g(x)$는 a의 값에 관계없이 항상 점 $(1, 1)$을 지난다.
$h(x) = (f \circ g)(x)$라 하자.

만약 $0 < x < 2$인 모든 실수 x에 대하여 $\frac{1}{2} < g(x) < \frac{3}{2}$이면

$h(x) = f(g(x)) = e^{-\cos\{\pi g(x)\}}$
이고 합성함수의 미분법에 의하여 함수 $h(x)$는 열린구간 $(0, 2)$에서 미분가능하다.
함수 $g(x)$는 열린구간 $(0, 2)$에서 증가하므로 $0 < x < 2$인 모든 실수 x에 대하여 $\frac{1}{2} < g(x) < \frac{3}{2}$이려면

$g(0) \ge \frac{1}{2}, g(2) \le \frac{3}{2}$를 만족시키면 된다.

$g(0) = -2a + 1 \ge \frac{1}{2}$에서 $a \le \frac{1}{4}$ ···㉠

$g(2) = 8a + 1 \le \frac{3}{2}$에서 $a \le \frac{1}{16}$ ···㉡

㉠, ㉡에서 $a \le \frac{1}{16}$이다.

한편, $a > \frac{1}{16}$일 때, $g(1) = 1 < \frac{3}{2}$, $g(2) = 8a + 1 > \frac{3}{2}$이고 함수 $g(x)$는 닫힌구간 $[1, 2]$에서 연속이므로 사잇값의 정리에 의하여 $g(c) = \frac{3}{2}$인 실수 $c\,(1 < c < 2)$가 존재한다.

이때 $p(x) = e^{-\cos\{\pi g(x)\}}$, $q(x) = e^{\cos\{\pi g(x)\}}$이라 하면
$p'(x) = \sin\{\pi g(x)\} \times \pi g'(x) \times e^{-\cos\{\pi g(x)\}}$
$q'(x) = -\sin\{\pi g(x)\} \times \pi g'(x) \times e^{\cos\{\pi g(x)\}}$
에서 $p'(c) = -\pi g'(c)$, $q'(c) = \pi g'(c)$이고
$g'(c) > 0$이므로

$$\lim_{x\to c-} \frac{h(x) - h(c)}{x - c} = \lim_{x\to c-} \frac{e^{-\cos\{\pi g(x)\}} - 1}{x - c} = p'(c) = -\pi g'(c) < 0$$

$$\lim_{x\to c+} \frac{h(x) - h(c)}{x - c} = \lim_{x\to c+} \frac{e^{\cos\{\pi g(x)\}} - 1}{x - c} = q'(c) = \pi g'(c) > 0$$

즉, 함수 $h(x)$는 $x = c$에서 미분가능하지 않다.
따라서 구하는 양수 a의 최댓값은 $\frac{1}{16}$이다.

2. 답. ③
$f(x) = 2tx - t\cos x - 5\sin x$에서
$f'(x) = 2t + t\sin x - 5\cos x$ ···㉠
$f'(g(t)) = 0$이므로 ㉠의 양변에 $x = g(t)$를 대입하면
$2t + t\sin\{g(t)\} - 5\cos\{g(t)\} = 0$ ···㉡

$g(\alpha) = \frac{\pi}{6}$이므로 ㉡의 양변에 $t = \alpha$를 대입하면

$2\alpha + \alpha\sin\frac{\pi}{6} - 5\cos\frac{\pi}{6} = 0$

$\frac{5}{2}\alpha - \frac{5\sqrt{3}}{2} = 0$

즉, $\alpha = \sqrt{3}$이고 α는 열린구간 $\left(0, \frac{5}{2}\right)$에 속한다.

함수 $g(t)$가 열린구간 $\left(0, \frac{5}{2}\right)$에서 미분가능하므로 ㉡의 양변을 t에 대하여 미분하면
$2 + \sin\{g(t)\} + t \times \cos\{g(t)\} \times g'(t) + 5\sin\{g(t)\} \times g'(t) = 0$
위 식의 양변에 $t = \alpha$를 대입하면
$2 + \sin\{g(\alpha)\} + \alpha \times \cos\{g(\alpha)\} \times g'(\alpha) + 5\sin\{g(\alpha)\} \times g'(\alpha) = 0$

이때 $\alpha = \sqrt{3}$, $g(\alpha) = \frac{\pi}{6}$이므로

$2 + \sin\frac{\pi}{6} + \sqrt{3} \times \cos\frac{\pi}{6} \times g'(\alpha) + 5\sin\frac{\pi}{6} \times g'(\alpha) = 0$

$2 + \frac{1}{2} + \frac{3}{2}g'(\alpha) + \frac{5}{2}g'(\alpha) = 0$

$4g'(\alpha) = -\frac{5}{2}$

$g'(\alpha) = -\frac{5}{8}$

따라서

$\alpha \times g'(\alpha) = \sqrt{3} \times \left(-\frac{5}{8}\right) = -\frac{5\sqrt{3}}{8}$

3. ④

$\lim_{x\to b} \frac{f(x) + g(x)}{(x-b)g\left(x - \frac{3}{2}\right)} = -\frac{4a^3 + a}{2f''\left(\frac{3}{2}\right)}$에서 $x \to b$일 때,

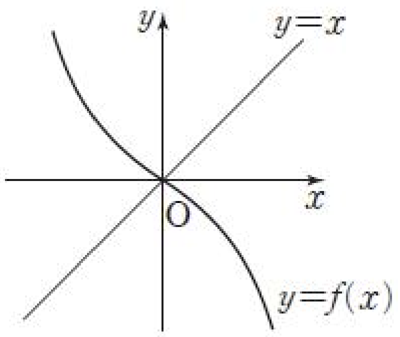
(분모) → 0이고 극한값이 존재하므로 (분자) → 0 이어야 한다.
즉, $\lim_{x\to b}\{f(x) + g(x)\} = 0$이고 두 함수 $f(x), g(x)$ 는 연속이므로

$f(b) + g(b) = 0$ ...... ㉠

$f(x) = e^{ax} + e^{-ex}$ 에서

$f'(x) = ae^{ax} + ae^{-ax} = a(e^{ax} + e^{-ax})$

이때, $a < 0$이고 모든 실수 x에 대하여 $e^{ax} + e^{-ax} > 0$ 이므로 모든 실수 x에 대하여 $f'(x) < 0$이다.
즉, 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 감소한다.
또한 $f(0) = 0$이므로 곡선 $y = f(x)$는 원점을 지나면서 제2사분면과 제4사분면만을 지나고, 곡선 $y = g(x)$는 곡선 $y = f(x)$와 직선 $y = x$에 대하여 대칭이므로 곡선 $y = g(x)$도 원점을 지나면서 제2사분면과 제4사분면만을 지난다.



$b>0$이면 $f(b)<0$, $g(b)<0$이므로 $f(b)+g(b)<0$이고,
$b<0$이면 $f(b)>0$, $g(b)>0$이므로 $f(b)+g(b)>0$이다.
즉 ㉠을 만족시키는 실수 b의 값은 0이다.
$f(0)=0$에서 $g(0)=0$이고,

$f'(0)=2a$, $g'(0)=\dfrac{1}{f'(g(0))}=\dfrac{1}{f'(0)}=\dfrac{1}{2a}$ 이므로,

$$\lim_{x\to b}\frac{f(x)+g(x)}{(x-b)g\left(x-\frac{3}{2}\right)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)+g(x)}{xg\left(x-\frac{3}{2}\right)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{f(x)-f(0)+g(x)-g(0)}{x}\times\frac{1}{g\left(x-\frac{3}{2}\right)}\right\}$$

$$=\{f'(0)+g'(0)\}\times\frac{1}{g\left(-\frac{3}{2}\right)}$$

$$=\left(2a+\frac{1}{2a}\right)\times\frac{1}{g\left(-\frac{3}{2}\right)} \qquad \cdots\cdots ㉡$$

한편, 모든 실수 x에 대하여
$f(-x)=e^{-ax}-e^{ax}=-f(x)$ 이고,
$f'(x)=a(e^{ax}+e^{-ax})$ 에서,
$f''(x)=a^2(e^{ax}-e^{-ax})=a^2f(x)$ 이므로

$f''\left(\frac{3}{2}\right)=a^2f\left(\frac{3}{2}\right)=-a^2f\left(-\frac{3}{2}\right)$

즉, $-\dfrac{4a^3+a}{2f''\left(\frac{3}{2}\right)}=-\dfrac{4a^3+a}{2\times\left\{-a^2f\left(-\frac{3}{2}\right)\right\}}$

$$=\frac{4a^3+a}{2a^2}\times\frac{1}{f\left(-\frac{3}{2}\right)}$$

$$=\left(2a+\frac{1}{2a}\right)\times\frac{1}{f\left(-\frac{3}{2}\right)} \qquad \cdots\cdots ㉢$$

㉡, ㉢에서 $f\left(-\frac{3}{2}\right)=g\left(-\frac{3}{2}\right)$이다.

$f\left(-\frac{3}{2}\right)=k$라 하면, $g\left(-\frac{3}{2}\right)=k$에서 $f(k)=-\frac{3}{2}$ 이므로

곡선 $y=f(x)$는 점 $\left(k,\ -\frac{3}{2}\right)$을 지난다.

$f\left(\frac{3}{2}\right)=-f\left(-\frac{3}{2}\right)=-k$ 이므로 곡선 $y=f(x)$는 점 $\left(\frac{3}{2},\ -k\right)$를 지난다.

이때, $k\neq\frac{3}{2}$이면 곡선 $y=f(x)$위의 두 점 $\left(k,\ -\frac{3}{2}\right)$, $\left(\frac{3}{2},\ -k\right)$를 지나는 직선의 기울기가

$$\frac{-k-\left(-\frac{3}{2}\right)}{\frac{3}{2}-k}=1$$

이므로 평균값 정리에 의하여 $f'(c)=1$인 c가 적어도 하나 존재한다. 그러나 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)<0$이므로 $f'(c)=1$인 c는 존재하지 않는다. 그러므로 $k=\frac{3}{2}$이다.

$f\left(-\frac{3}{2}\right)=\frac{3}{2}$ 에서 $e^{-\frac{3}{2}a}-e^{\frac{3}{2}a}=\frac{3}{2}$

$e^{-\frac{3}{2}a}=t\,(t>1)$ 이라 하면,

$t-\frac{1}{t}=\frac{3}{2}$에서

$2t^2-3t-2=0$

$(2t+1)(t-2)=0$

$t>1$이므로 $t=2$

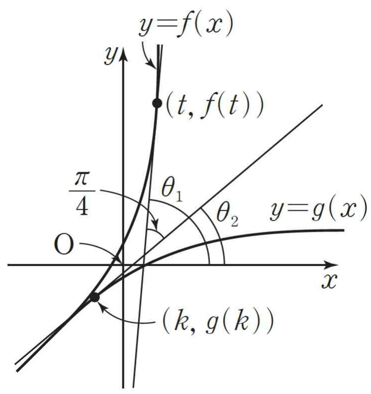
따라서 $e^{-\frac{2}{3}a}=2$ 에서 $-\frac{3}{2}a=\ln 2$

$a=-\frac{2}{3}\ln 2$

4. **정답** 25

$f(x)=e^x+x$에서 $f'(x)=e^x+1>1$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점 $(t,\ f(t))$에서의 접선과 x축의 양의 방향이 이루는 각의 크기를 θ_1이라 하면

$\tan\theta_1=f'(t)=e^t+1$, $\frac{\pi}{4}<\theta_1<\frac{\pi}{2}$



함수 $y=g(x)$의 그래프 위의 점 $(k,\ g(k))$에서의 접선과 x축의 양의 방향이 이루는 각의 크기를 θ_2라 하면

$\tan\theta_2=g'(k)$, $0<\theta_2<\frac{\pi}{4}$

이때 $0<\theta_2<\frac{\pi}{4}<\theta_1<\frac{\pi}{2}$이므로

$\theta_2=\theta_1-\frac{\pi}{4}$

$$g'(k)=\tan\theta_2=\tan\left(\theta_1-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$=\frac{\tan\theta_1-\tan\frac{\pi}{4}}{1+\tan\theta_1\tan\frac{\pi}{4}}$$

$$=\frac{\tan\theta_1-1}{1+\tan\theta_1}$$

$$=\frac{(e^t+1)-1}{1+(e^t+1)}=\frac{e^t}{e^t+2}$$

$f'(g(k))\times g'(k)=1$이므로

$$f'(g(k))=\frac{1}{g'(k)}=\frac{e^t+2}{e^t}=\frac{2}{e^t}+1$$

$e^{g(k)}+1=\frac{2}{e^t}+1$, $e^{g(k)}=\frac{2}{e^t}$

$g(k)=\ln\frac{2}{e^t}=\ln 2-\ln e^t=-t+\ln 2$

즉, $k=f(-t+\ln 2)$ 이므로 $h(t)=f(-t+\ln 2)$

$h'(t)=f'(-t+\ln 2)\times(-t+\ln 2)'$

$\quad=-f'(-t+\ln 2)$

따라서

$h'(\ln 8)=-f'(-\ln 8+\ln 2)=-f'\left(\ln\frac{1}{4}\right)$

$\quad=-\left(e^{\ln\frac{1}{4}}+1\right)=-\left(\frac{1}{4}+1\right)=-\frac{5}{4}$

이므로

$16\times\{h'(\ln 8)\}^2=16\times\left(-\frac{5}{4}\right)^2=25$

④ 초월함수의 그래프

TH①. 2024년 수능특강

2024년 수능특강 Lv1

1. 함수 $f(x)=\dfrac{x}{\ln x}$에 대하여 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$)

[보 기]

ㄱ. 함수 $f(x)$는 $x=e$에서 극솟값을 갖는다.

ㄴ. 점 $\left(e^2,\ \dfrac{e^2}{2}\right)$은 곡선 $y=f(x)$의 변곡점이다.

ㄷ. 방정식 $|f(x)|=\dfrac{3}{2}e$의 서로 다른 실근의 개수는 3이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

2024년 수능특강 Lv2

2. 두 함수 $f(x)=2\ln(x+a)$, $g(x)=b\left(x+6+\dfrac{8}{x}\right)$에 대하여 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$가 x축 위의 한 점 P에서 만난다. 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 P에서의 접선과 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 P에서의 접선이 일치할 때, $a+b$의 값을 구하시오.
(단, a, b는 상수이고, $b>0$이다.)

3. 열린구간 $(0,\ 2\pi)$에서 정의된 함수

$$f(x)=a^2\sin x+a\cos x+2x$$

가 $x=k$와 $x=\frac{3}{2}\pi$에서 극값을 갖는다. 함수 $f(x)$의 극댓값을 m이라 할 때, $m+ak$의 값은? $\left(\text{단, } a\text{는 상수이고, } k\neq\frac{3}{2}\pi\text{이다.}\right)$

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

2024년 수능특강 Lv2

4. 함수 $f(x)=(x^2+a)e^x$에 대하여 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, a는 실수이다.)

[보 기]

ㄱ. 함수 $f(x)$가 극값을 갖기 위한 a의 값의 범위는 $a<1$이다.

ㄴ. 곡선 $y=f(x)$의 변곡점이 존재하면 함수 $f(x)$는 극값을 갖는다.

ㄷ. $a>0$일 때, 함수 $\frac{1}{f(x)}$이 극댓값 M, 극솟값 m을 가지면 $M\times m>\frac{e^2}{4}$이다.

① ㄱ　② ㄱ, ㄴ　③ ㄱ, ㄷ　④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

New

5. $0 < t < 1$인 실수 t에 대하여 함수

$$f(x) = \ln(1+e^x) - tx$$

의 극값을 $g(t)$라 할 때, $g(t)$의 최댓값은?

① $\ln 2$ ② $\ln 3$ ③ $2\ln 2$

④ $\ln 5$ ⑤ $\ln 6$

6. 열린구간 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$에서 정의된 함수

$$f(x) = \cos^2 x + 7\cos x$$

가 있다. 곡선 $y = f(x)$에 접하는 직선 중 y절편이 최대인 직선이 곡선과 접하는 점을 P라 할 때, 점 P의 y좌표는?

① $\frac{21}{16}$ ② $\frac{23}{16}$ ③ $\frac{25}{16}$

④ $\frac{27}{16}$ ⑤ $\frac{29}{16}$

7. 함수 $f(x)=2\sqrt{x}-\ln x$가 있다. 곡선 $y=f(x)$위의 두 점 $\mathrm{A}(a,\ f(a))$, $\mathrm{B}(b,\ f(b))$에 대하여 점 A에서의 접선을 l, 점 B에서의 접선을 m이라 하자. 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, $a<b$)

[보 기]

ㄱ. 두 직선 l, m이 서로 평행하면 $ab>4$이다.

ㄴ. $a>1$이면 $0<$(직선 AB의 기울기)$\leq \dfrac{1}{4}$이다.

ㄷ. 두 직선 l, m이 서로 수직이면 $|f'(a)-f'(b)|$의 최솟값은 2이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

2024년 수능특강 Lv3
연계 가능

8. 자연수 n과 실수 k에 대하여 곡선

$$y=\ln(n+x)-\ln(n-x)$$

가 직선 $y=kx$와 만나는 서로 다른 점의 개수를 a_n이라 하자. $\sum_{n=1}^{10} a_n=16$이 되도록 하는 모든 k의 값의 범위가 $p<k\leq q$일 때, $70pq$의 값을 구하시오.

연계 가능

9. $f(0)=0$인 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$g(x)=f'(x)e^{-f(x)}$$

이 다음 조건을 만족시킬 때, $f(4)$의 값을 구하시오. (단, $\lim_{x\to-\infty} g(x)=\lim_{x\to\infty}g(x)=0$)

(가) 함수 $g(x)$는 $x=0$에서 극값을 갖는다. (나) 실수 t에 대하여 방정식 $\lvert g(x)\rvert=t$의 서로 다른 양의 실근의 개수를 $h(t)$라 할 때, $\lim_{t\to g(k)+} h(t)\neq \lim_{t\to g(k)-} h(t)$인 모든 양수 k의 값의 합은 3이다.

TH②. 2024년 수능완성

10. 함수 $f(x)=(x+1)^2e^{-x}$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x\geq 0) \\ f(-x) & (x<0) \end{cases}$$

이라 하자. 함수 $y=g(x)$의 그래프가 직선 $y=k$와 만나는 서로 다른 점의 개수를 $h(k)$라 할 때, 정수 a에 대하여 $\lim_{k\to a-}h(k)+\lim_{k\to a+}h(k)$의 최댓값은 M이다. $h(1)+M$의 값을 구하시오. $\left(\text{단, } 2<e<3\text{이고, } \lim_{x\to\infty}x^2e^{-x}=0\text{이다.}\right)$

11. 최고차항의 계수가 1이고 상수항이 0인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\frac{f(x)}{e^x}$$

라 하자. 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(3)$의 값을 구하시오. [4점]

> (가) 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(2,\ g(2))$에서의 접선이 원점을 지난다.
> (나) 점 $(2,\ g(2))$는 곡선 $y=g(x)$의 변곡점이다.

2024년 수능완성

12. 최고차항의 계수가 1이고 실수 전체의 집합에서 $f(x)>0$인 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$g(x)=(1+\ln 3)f(x)-f(x)\ln f(x)$$

가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 함수 $g(x)$는 $x=3$에서 극솟값을 갖는다.
> (나) 방정식 $g'(\alpha)=0$을 만족시키는 모든 실수 α의 값의 곱은 24이다.

$f(10)$의 값을 구하시오. [4점]

13. 함수

$$f(x)=\frac{x^2-x+1}{e^x}$$

이 있다. 실수 t에 대하여 함수 $f(|x|+t)$가 $x=a$에서 극값을 갖는 모든 실수 a의 개수를 $g(t)$라 하자. 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $h(x)$에 대하여 함수 $g(x)h(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, $h(0)+h(4)$의 값을 구하시오. $\left(\text{단, } \lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{e^x}=0\right)$

[4점]

2024년 수능완성

14. $0\le x<2\pi$에서 정의된 함수

$$f(x)=\sqrt{2}\cos x\times e^{\sqrt{2}\sin x}$$

이 있다. 함수 $f(x)$와 실수 k에 대하여 방정식 $|f(x)|=k$의 서로 다른 실근의 개수를 $g(k)$라 할 때, 두 집합 A, B는 다음과 같다.

$A=\{g(k)\mid k\text{는 실수}\}$

$B=\{a\mid \text{함수 } g(k)\text{는 } k=a\text{에서 불연속이다.}\}$

$10\times n(A)+n(B)$의 값을 구하시오. [4점]

15. 최고차항의 계수가 양수인 이차함수 $f(x)$에 대하여 닫힌 구간 $[-\pi,\ 5\pi]$에서 정의된 함수

$$g(x)=f(x)+\sin x$$

가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 방정식 $g'(x)=0$은 음의 실근 α와 양의 실근 β를 갖는다.
> (나) 함수 $g'(x)$가 $x=\beta$에서 극소이고 $x=\beta+k$에서 극대가 되도록 하는 양수 k의 최솟값은 $\frac{4}{3}\pi$이다.

$g(0)=-2\sqrt{3}\,\pi$일 때, $\frac{12}{\pi^2}g(4\pi)$의 값을 구하시오.

$\left(\text{단, } 3<\pi<4,\ \frac{3}{2}<\sqrt{3}<2\right)$ [4점]

1. 답. ⑤

ㄱ. $f(x)=\dfrac{x}{\ln x}$ 에서

$$f'(x)=\dfrac{1\times\ln x-x\times\dfrac{1}{x}}{(\ln x)^2}$$

$$=\dfrac{\ln x-1}{(\ln x)^2}$$

$f'(x)=0$ 에서 $\ln x-1=0$, $x=e$

$x=e$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로 함수 $f(x)$는 $x=e$에서 극솟값을 갖는다. (참)

ㄴ. $f'(x)=\dfrac{\ln x-1}{(\ln x)^2}$ 에서

$$f''(x)=\dfrac{\dfrac{1}{x}\times(\ln x)^2-(\ln x-1)\times 2\ln x\times\dfrac{1}{x}}{(\ln x)^4}$$

$$=\dfrac{\ln x-2(\ln x-1)}{x(\ln x)^3}$$

$$=\dfrac{2-\ln x}{x(\ln x)^3}$$

$f''(x)=0$ 에서 $2-\ln x=0$, $x=e^2$

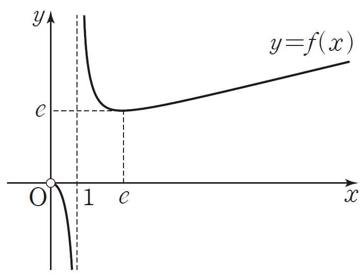
$f(e^2)=\dfrac{e^2}{2}$ 이고, $x=e^2$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌므로 점 $\left(e^2,\ \dfrac{e^2}{2}\right)$은 곡선 $y=f(x)$의 변곡점이다. (참)

ㄷ. $\ln x=0$ 에서 $x=1$이므로 함수 $f(x)$의 정의역은 $(0,\ 1)\cup(1,\ \infty)$이다.

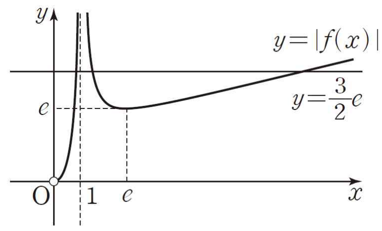
ㄱ에서 $f'(x)=\dfrac{\ln x-1}{(\ln x)^2}$ 이고 $f'(x)=0$에서 $x=e$ 이므로 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	(1)	$\cdots$	e	$\cdots$
$f'(x)$		$-$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘		↘	극소	↗

함수 $f(x)$의 극솟값은 $f(e)=e$ 이고 $\lim\limits_{x\to 0+}f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to 1-}f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to 1+}f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$ 이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



방정식 $|f(x)|=\dfrac{3}{2}e$ 의 서로 다른 실근의 개수는 곡선 $y=|f(x)|$와 직선 $y=\dfrac{3}{2}e$ 의 교점의 개수와 같다.



이때 $\dfrac{3}{2}e>e=f(e)$ 이므로 위의 그림과 같이 곡선 $y=|f(x)|$와 직선 $y=\dfrac{3}{2}e$는 서로 다른 세 점에서 만난다. 따라서 방정식 $|f(x)|=\dfrac{3}{2}e$ 의 서로 다른 실근의 개수는 3이다. (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

2. 답. 9

점 P의 x좌표를 p라 하면 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$가 점 $\mathrm{P}(p,\ 0)$에서 만나므로

$f(p)=g(p)=0$

$f(p)=0$ 에서 $p+a=1$ $\cdots\cdots$ ㉠

$g(p)=0$ 에서 $b\left(p+6+\dfrac{8}{p}\right)=0$

$b\neq 0$이므로

$p+6+\dfrac{8}{p}=0$

$p^2+6p+8=0$

$(p+2)(p+4)=0$

$p=-2$ 또는 $p=-4$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 P에서의 접선과 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 P에서의 접선이 일치하므로

$f'(p)=g'(p)$ $\cdots\cdots$ ㉡

$f(x)=2\ln(x+a)$ 에서 $f'(x)=\dfrac{2}{x+a}$

$f(x)=b\left(x+6+\dfrac{8}{x}\right)$ 에서 $g'(x)=b\left(1-\dfrac{8}{x^2}\right)$

이때 ㉠에 의하여 $f'(p)=\dfrac{2}{p+a}=2$이므로

㉡에서 $g'(p)=2$이어야 한다.

$p=-2$ 이면 $g'(p)=b\times\left\{1-\dfrac{8}{(-2)^2}\right\}=-b$

$p=-4$ 이면 $g'(p)=b\times\left\{1-\dfrac{8}{(-4)^2}\right\}=\dfrac{1}{2}b$

$b>0$ 이므로 $-b<0$, $\dfrac{1}{2}b>0$

즉, $g'(p)=2$ 이려면 $p=-4$ 이고 $\dfrac{1}{2}b=2$에서 $b=4$이다.

$p=-4$ 이므로 ㉠에서 $a=5$

따라서 $a+b=5+4=9$

3. 답. ④

$f(x)=a^2\sin x+a\cos x+2x$ 에서

$f'(x)=a^2\cos x-a\sin x+2$

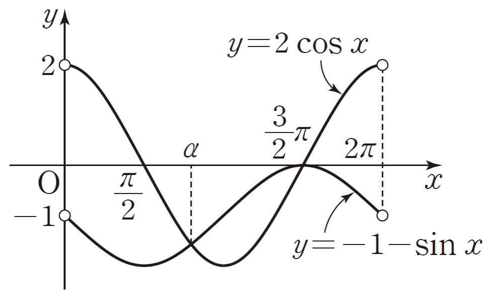
함수 $f(x)$가 $x=\dfrac{3}{2}\pi$ 에서 극값을 가지므로 $f'\left(\dfrac{3}{2}\pi\right)=0$이다.

$f'\left(\frac{3}{2}\pi\right)=0+a+2=0$ 에서 $a=-2$

즉, $f(x)=4\sin x-2\cos x+2x$ 이고

$f'(x)=4\cos x+2\sin x+2$

$f'(x)=0$ 에서 $2\cos x=-1-\sin x$ 이므로 방정식 $f'(x)=0$ 의 실근은 두 곡선 $y=2\cos x$, $y=-1-\sin x$의 교점의 x좌표와 같다.



그림과 같이 열린구간 $(0,\ 2\pi)$에서 두 곡선 $y=2\cos x$, $y=-1-\sin x$는 $x=\alpha\left(\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi\right)$, $x=\frac{3}{2}\pi$에서 만나고 이때 $k=\alpha$이다.

또한 $x=\alpha$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌므로 함수 $f(x)$는 $x=\alpha$에서 극댓값을 갖고, $x=\frac{3}{2}\pi$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로 함수 $f(x)$는 $x=\frac{3}{2}\pi$에서 극솟값을 갖는다.

한편, $2\cos\alpha=-1-\sin\alpha$ 에서 양변을 제곱하면

$4\cos^2\alpha=1+2\sin\alpha+\sin^2\alpha$

$4(1-\sin^2\alpha)=1+2\sin\alpha+\sin^2\alpha$

$5\sin^2\alpha+2\sin\alpha-3=0$

$(5\sin\alpha-3)(\sin\alpha+1)=0$

$\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$에서 $\sin\alpha>0$이므로

$\sin\alpha=\frac{3}{5}$

또한 $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$에서 $\cos\alpha<0$

$\cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}=-\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2}=-\frac{4}{5}$

즉,

$m=f(\alpha)$

$=4\sin\alpha-2\cos\alpha+2\alpha$

$=4\times\frac{3}{5}-2\times\left(-\frac{4}{5}\right)+2\alpha$

$=4+2\alpha$

따라서 $m+\alpha k=(4+2\alpha)+(-2)\times\alpha=4$

4. 답. ③

ㄱ. $f(x)=(x^2+a)e^x$ 에서

$f'(x)=2xe^x+(x^2+a)e^x$

$=(x^2+2x+a)e^x$

$f'(x)=0$ 에서 $x^2+2x+a=0$

이 이차방정식이 서로 다른 두 실근 $x=\alpha$, $x=\beta$ $(\alpha<\beta)$를 가져야 $x=\alpha$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호는 양에서 음으로 바뀌므로 함수 $f(x)$의 $x=\alpha$에서 극댓값을 갖고, $x=\beta$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호는 음에서 양으로 바뀌므로 함수 $f(x)$는 $x=\beta$에서 극솟값을 갖는다.

이차방정식 $x^2+2x+a=0$의 판별식을 D_1이라 하면

$\frac{D_1}{4}=1-a>0$

이므로 함수 $f(x)$가 극값을 갖기 위한 a의 값의 범위는 $a<1$이다.(참)

ㄴ. $f'(x)=(x^2+2x+a)e^x$ 에서

$f''(x)=(2x+2)e^x+(x^2+2x+a)e^x$

$=(x^2+4x+2+a)e^x$

$f''(x)=0$ 에서 $x^2+4x+2+a=0$

곡선 $y=f(x)$의 변곡점이 존재하므로 이차방정식 $x^2+4x+2+a=0$은 실근을 갖는다.

만약 이 이차방정식이 중근 $x=\alpha$를 갖게 될 경우 $x=\alpha$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌지 않으므로 곡선 $y=f(x)$는 변곡점을 갖지 않는다.

즉 이차방정식 $x^2+4x+2+a=0$은 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

이차방정식 $x^2+4x+2+a=0$의 판별식을 D_2라 하면

$\frac{D_2}{4}=2^2-(2+a)=2-a>0$

이므로 곡선 $y=f(x)$가 변곡점을 갖기 위한 a의 값의 범위는 $a<2$이다.

ㄱ에서 함수 $f(x)$가 극값을 갖기 위한 a의 값의 범위는 $a<1$이다.

따라서 $1\le a<2$이면 곡선 $y=f(x)$의 변곡점이 존재하지만 함수 $f(x)$는 극값을 갖지 않는다. (거짓)

ㄷ. $g(x)=\frac{1}{f(x)}$이라 하자.

$a>0$에서 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\neq 0$이므로 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.

$g'(x)=-\frac{f'(x)}{\{f(x)\}^2}$ 이므로

$g'(x)=0$에서 $f'(x)=0$, 즉 $(x^2+2x+a)e^x=0$이다.

함수 $g(x)$가 극댓값과 극솟값을 가지려면 이차방정식 $x^2+2x+a=0$이 서로 다른 두 실근 $x=\alpha$, $x=\beta$ $(\alpha<\beta)$를 가져야 하므로 ㄱ에서 $a<1$이다.

따라서 $0<a<1$이다.

이때 $x=\alpha$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호는 양에서 음으로 바뀌므로 $g'(x)$의 부호는 음에서 양으로 바뀐다. 그러므로 함수 $g(x)$는 $x=\alpha$에서 극솟값을 갖는다.

또 $x=\beta$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호는 음에서 양으로 바뀌므로 $g'(x)$의 부호는 양에서 음으로 바뀐다. 그러므로 함수 $g(x)$는 $x=\beta$에서 극댓값을 갖는다.

α, β는 이차방정식 $x^2+2x+a=0$의 서로 다른 두 실근이므로

$\alpha^2+a=-2\alpha$, $\beta^2+a=-2\beta$이고

$M=\frac{1}{f(\beta)}=\frac{1}{(\beta^2+a)e^\beta}=-\frac{1}{2\beta e^\beta}$

$m=\frac{1}{f(\alpha)}=\frac{1}{(\alpha^2+a)e^\alpha}=-\frac{1}{2\alpha e^\alpha}$

또한 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-2$, $\alpha\beta=a$이므로

$$M\times m=\left(-\frac{1}{2\beta e^{\beta}}\right)\times\left(-\frac{1}{2\alpha e^{\alpha}}\right)$$
$$=\frac{1}{4\alpha\beta e^{\alpha+\beta}}=\frac{e^2}{4a}$$

$0<a<1$ 이므로 $M\times m=\frac{e^2}{4a}>\frac{e^2}{4}$ (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

5. 답. ①

$f(x)=\ln(1+e^x)-tx$ 에서 $f'(x)=\frac{e^x}{1+e^x}-t$

$f'(x)=0$ 에서 $\frac{e^x}{1+e^x}=t$

$e^x=\frac{t}{1-t}$ 이고 $0<t<1$ 이므로 $x=\ln\frac{t}{1-t}$

이때 $f''(x)=\frac{e^x(1+e^x)-e^x\times e^x}{(1+e^x)^2}=\frac{e^x}{(1+e^x)^2}$ 에서

$$f''\left(\ln\frac{t}{1-t}\right)=\frac{\frac{t}{1-t}}{\left(1+\frac{t}{1-t}\right)^2}=t(1-t)>0$$

이므로 함수 $f(x)$는 $x=\ln\frac{t}{1-t}$ 에서 극솟값 $f\left(\ln\frac{t}{1-t}\right)$를 갖는다.

$$\begin{aligned}g(t)&=f\left(\ln\frac{t}{1-t}\right)\\&=\ln\left(1+\frac{t}{1-t}\right)-t\ln\frac{t}{1-t}\\&=\ln\frac{1}{1-t}-t\ln\frac{t}{1-t}\\&=-\ln(1-t)-t\{\ln t-\ln(1-t)\}\\&=(t-1)\ln(1-t)-t\ln t\end{aligned}$$

에서

$$\begin{aligned}g'(t)&=\ln(1-t)+(t-1)\times\frac{-1}{1-t}-\left(\ln t+t\times\frac{1}{t}\right)\\&=\ln(1-t)+1-(\ln t+1)\\&=\ln(1-t)-\ln t\end{aligned}$$

$g'(t)=0$ 에서 $\ln(1-t)=\ln t$, $t=\frac{1}{2}$

$0<t<1$ 에서 함수 $g(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	(1)
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗	극대	↘	

이때 함수 $g(t)$는 $t=\frac{1}{2}$ 에서 극대인 동시에 최대이므로 함수 $g(t)$의 최댓값은

$$g\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}\ln\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\ln\frac{1}{2}=\ln 2$$

6. 답. ⑤

$0<t<\frac{\pi}{2}$ 인 실수 t에 대하여 접점의 좌표를 $(t,\ f(t))$라 하면 접선의 방정식은 $y-f(t)=f'(t)(x-t)$ 이므로 접선의 y절편은 $-tf'(t)+f(t)$ 이다.

이때 $g(t)=-tf'(t)+f(t)$ $\left(0<t<\frac{\pi}{2}\right)$라 하면

$g'(t)=-f'(t)-tf''(t)+f'(t)=-tf''(t)$

이므로 $g'(t)=0$ 에서 $f''(t)=0$ 이다.

$f(x)=\cos^2 x+7\cos x$ 에서

$f'(x)=-2\cos x\sin x-7\sin x$ 이므로

$$\begin{aligned}f''(t)&=2\sin^2 x-2\cos^2 x-7\cos x\\&=2(1-\cos^2 x)-2\cos^2 x-7\cos x\\&=-4\cos^2 x-7\cos x+2\\&=-(4\cos x-1)(\cos x+2)\end{aligned}$$

$f''(t)=0$ 에서 $\cos t=\frac{1}{4}$

$\cos\alpha=\frac{1}{4}$ 인 실수 $\alpha\left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$에 대하여 $t=\alpha$의 좌우에서 $g'(t)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌므로 함수 $g(t)$는 $t=\alpha$ 에서 극댓값 $g(\alpha)$를 갖고 이는 함수 $g(t)$의 최댓값이다.

따라서 구하는 점 P의 y좌표는

$$f(\alpha)=\cos^2\alpha+7\cos\alpha=\left(\frac{1}{4}\right)^2+7\times\frac{1}{4}=\frac{29}{16}$$

7. 답. ②

ㄱ. 두 직선 l, m이 서로 평행하면 $f'(a)=f'(b)$ 이다.

로그의 진수 조건에 의하여 $x>0$이므로 함수 $f(x)$의 정의역은 구간 $(0,\ \infty)$이다.

$f(x)=2\sqrt{x}-\ln x$에서

$$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{x}=\frac{\sqrt{x}-1}{x}$$

이므로

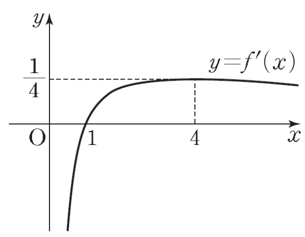
$$f''(x)=\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}\times x-(\sqrt{x}-1)\times 1}{x^2}=-\frac{\sqrt{x}-2}{2x^2}$$

$f''(x)=0$에서 $x=4$

$x>0$에서 함수 $f'(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	4	$\cdots$
$f''(x)$		$+$	0	$-$
$f'(x)$		↗	극대	↘

$\lim_{x\to 0+}f'(x)=-\infty$, $\lim_{x\to\infty}f'(x)=0$ 이고 $f'(4)=\frac{1}{4}$ 이므로 함수 $y=f'(x)$의 그래프는 그림과 같다.



$a<b$인 서로 다른 두 실수 a, b에 대하여 $f'(a)=f'(b)$라 하면 $1<a<4$, $b>4$이므로 $ab>4$이다. (참)

ㄴ. 함수 $f(x)$는 구간 $(1,\ \infty)$에서 연속이고 미분가능하므로

$1<a<b$인 임의의 두 실수 a, b에 대하여 평균값의 정리에 의하여 $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$인 실수 c가 열린 구간 $(a,\ b)$에 적어도 하나 존재한다.

이때 $x>1$에서 $0<f'(x)\le\dfrac{1}{4}$이므로

$0<\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}\le\dfrac{1}{4}$이다.

따라서 $0<$(직선 AB의 기울기)$\le\dfrac{1}{4}$이다. (참)

ㄷ. 두 직선 l, m의 기울기는 각각 $f'(a)$, $f'(b)$이므로 두 직선 l, m이 서로 수직이면 $f'(a)f'(b)=-1$이다.

$a<b$이므로 ㄱ의 함수 $y=f'(x)$의 그래프에서

$f'(a)<0<f'(b)$이어야 하고, $0<f'(b)\le\dfrac{1}{4}$이다.

$$\begin{aligned}|f'(a)-f'(b)|&=f'(b)-f'(a)\\&=f'(b)-\left(-\frac{1}{f'(b)}\right)\\&=f'(b)+\frac{1}{f'(b)}\end{aligned}$$

에서 $f'(b)=t$라 하고, $g(t)=t+\dfrac{1}{t}$이라 하자.

$g'(t)=1-\dfrac{1}{t^2}$이므로 $0<t\le\dfrac{1}{4}$인 모든 실수 t에 대하여

$g'(t)<0$이다.

즉 구간 $\left(0,\ \dfrac{1}{4}\right]$에서 함수 $g(t)$는 감소하므로 이 구간에서 함수 $g(t)$의 최솟값은 $g\left(\dfrac{1}{4}\right)=\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{\frac{1}{4}}=\dfrac{17}{4}$이다.

따라서 $|f'(a)-f'(b)|$의 최솟값은 $\dfrac{17}{4}$이다. (거짓)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

8. 답. 5

$f(x)=\ln(n+x)-\ln(n-x)$라 하자.

로그의 진수 조건에 의하여 $n+x>0$, $n-x>0$이므로

$-n<x<n$

즉, 함수 $f(x)$의 정의역은 열린구간 $(-n,\ n)$이다.

$f'(x)=\dfrac{1}{n+x}-\dfrac{-1}{n-x}=\dfrac{2n}{n^2-x^2}$

이므로 $-n<x<n$에서 $f'(x)>0$

$f''(x)=\dfrac{2n\times(-2x)}{(n^2-x^2)^2}=\dfrac{4nx}{(n^2-x^2)^{\ 2}}$

이므로 $f''(x)=-\dfrac{2n\times(-2x)}{(n^2-x^2)^2}=\dfrac{4nx}{(n^2-x^2)^2}$

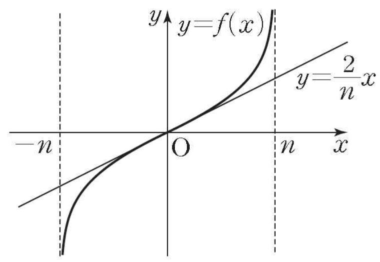
이므로 $f''(x)=0$에서 $x=0$

$-n<x<n$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$(-n)$	$\cdots$	0	$\cdots$	(n)
$f'(x)$		$+$	$+$	$+$	
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↗	0	↗	

$-n<x<n$인 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=-f(x)$이므로 곡선 $y=f(x)$는 원점에 대하여 대칭이다.

또한 $\displaystyle\lim_{x\to -n+}f(x)=-\infty$, $\displaystyle\lim_{x\to n-}f(x)=\infty$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



이때 $f'(0)=\dfrac{2}{n}$이므로 곡선 $y=f(x)$위의 점 $(0,\ 0)$에서의 접선의 방정식은 $y=\dfrac{2}{n}x$이다.

곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=kx$가 만나는 서로 다른 점의 개수가 a_n이므로

$k\le\dfrac{2}{n}$이면 $a_n=1$, $k>\dfrac{2}{n}$이면 $a_n=3$ $\cdots\cdots$ ㉠

$a_n=1$인 자연수 n의 최댓값을 m이라 하면

$$a_n=\begin{cases}1 & (1\le n\le m)\\ 3 & (n>m)\end{cases}$$

$m\ge 10$이면 $\displaystyle\sum_{n=1}^{10}a_n=\sum_{n=1}^{10}1=10$이므로 문제의 조건을 만족시키지 않는다.

그러므로 $m<10$이다.

이때

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{10}a_n&=\sum_{n=1}^{m}a_n+\sum_{n=m+1}^{10}a_n\\&=\sum_{n=1}^{m}1+\sum_{n=m+1}^{10}3\\&=m+3(10-m)\\&=30-2m\end{aligned}$$

이므로 $30-2m=16$에서 $m=7$

즉, $a_7=1$, $a_8=3$이므로 ㉠에 의하여

$k\le\dfrac{2}{7}$, $k>\dfrac{2}{8}=\dfrac{1}{4}$

그러므로 구하는 모든 실수 k의 값의 범위는

$\dfrac{1}{4}<k\le\dfrac{2}{7}$

따라서 $p=\dfrac{1}{4}$, $q=\dfrac{2}{7}$이므로

$70pq=70\times\dfrac{1}{4}\times\dfrac{2}{7}=5$

9. 답. 4

함수 $f(x)$는 $f(0)=0$인 이차함수이므로

$f(x)=ax^2+bx$ (a, b는 상수, $a\neq 0$)이라 하면

$f'(x)=2ax+b$

$g(x)=f'(x)e^{-f(x)}=(2ax+b)e^{-f(x)}$에서

$$g'(x)=2ae^{-f(x)}-(2ax+b)^2e^{-f(x)}$$
$$=\{2a-(2ax+b)^2\}e^{-f(x)} \quad \cdots\cdots ㉠$$

조건 (가)에서 $g'(0)=0$이므로

$2a-b^2=0$, $b^2=2a$ $\quad\cdots\cdots ㉡$

$a\neq 0$이므로 $b\neq 0$, $a=\dfrac{b^2}{2}>0$이고, ㉡을 ㉠에 대입하면

$$g'(x)=\{b^2-(b^2x+b)^2\}e^{-f(x)}$$
$$=b^2\{1-(bx+1)^2\}e^{-f(x)}$$
$$=b^2(-b^2x^2-2bx)e^{-f(x)}$$
$$=-b^4x\left(x+\frac{2}{b}\right)e^{-f(x)}$$

$g'(x)=0$에서 $x=0$또는 $x=-\dfrac{2}{b}$

(i) $b>0$인 경우

$b>0$에서 $-\dfrac{2}{b}<0$이고, 함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$-\frac{2}{b}$	$\cdots$	0	$\cdots$
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$g(x)$	↘	극소	↗	극대	↘

$f(x)=\dfrac{b^2}{2}x^2+bx$, $f'(x)=b^2x+b$에서

$f\left(-\dfrac{2}{b}\right)=\dfrac{b^2}{2}\times\left(-\dfrac{2}{b}\right)^2+b\times\left(-\dfrac{2}{b}\right)=0$,

$f'\left(-\dfrac{2}{b}\right)=b^2\times\left(-\dfrac{2}{b}\right)+b=-b$

이므로 함수 $g(x)$는 $x=-\dfrac{2}{b}$에서 극솟값

$g\left(-\dfrac{2}{b}\right)=f'\left(-\dfrac{2}{b}\right)e^{-f\left(-\frac{2}{b}\right)}=-b$를 갖고,

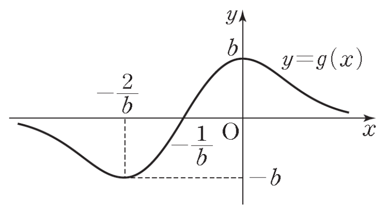
$f(0)=0$, $f'(0)=b$이므로 함수 $g(x)$는 $x=0$에서 극댓값 $g(0)=f'(0)e^{-f(0)}=b$를 갖는다.

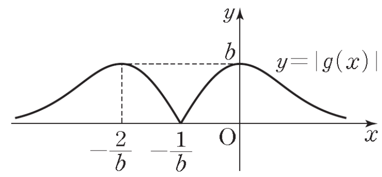
함수 $y=g(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표는

$g(x)=f'(x)e^{-f(x)}=0$에서

$f'(x)=b^2x+b=0$, $x=-\dfrac{1}{b}$

즉, $g\left(-\dfrac{1}{b}\right)=0$이고, $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}g(x)=\lim_{x\to\infty}g(x)=0$이므로 함수 $y=g(x)$의 그래프와 함수 $y=|g(x)|$의 그래프는 다음과 같다.





이때 함수 $h(t)$는 함수 $y=|g(x)|$의 그래프와 직선 $y=t$가 만나는 점 중 x좌표가 양수인 것의 개수이므로

$$h(t)=\begin{cases}0 & (t\le 0)\\ 1 & (0<t<b)\\ 0 & (t\ge b)\end{cases}$$

임의의 양수 k에 대하여 $0<g(k)<b$이므로

$\displaystyle\lim_{t\to g(k)+}h(t)=\lim_{t\to g(k)-}h(t)=1$이다.

그러므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

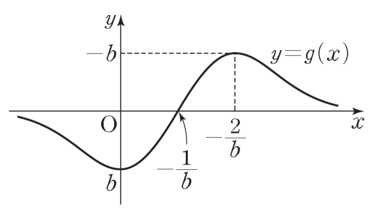
(ii) $b<0$인 경우

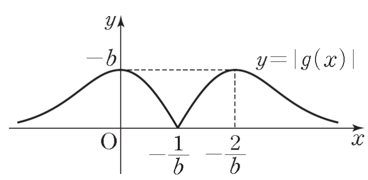
$b<0$에서 $-\dfrac{2}{b}>0$이고, 함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	$-\frac{2}{b}$	$\cdots$
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$g(x)$	↘	극소	↗	극대	↘

함수 $g(x)$는 $x=0$에서 극솟값 $g(0)=b$를 갖고, $x=-\dfrac{2}{b}$에서 극댓값 $g\left(-\dfrac{2}{b}\right)=-b$를 갖는다.

또한 $g\left(-\dfrac{1}{b}\right)=0$, $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}g(x)=\lim_{x\to\infty}g(x)=0$이므로 함수 $y=g(x)$의 그래프와 함수 $y=|g(x)|$의 그래프는 그림과 같다.

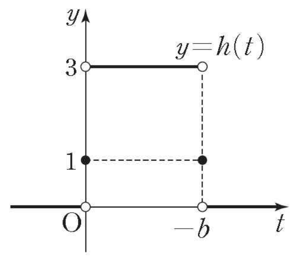




이때 함수 $h(t)$는 함수 $y=|g(x)|$의 그래프와 직선 $y=t$가 만나는 점 중 x좌표가 양수인 것의 개수이므로

$$h(t)=\begin{cases}0 & (t<0)\\ 1 & (t=0)\\ 3 & (0<t<-b)\\ 1 & (t=-b)\\ 0 & (t>-b)\end{cases}$$

이고 함수 $y=h(t)$의 그래프는 그림과 같다.



임의의 양수 k에 대하여 $b<g(k)\leq -b$이므로

$\lim_{t\to g(k)+} h(t) \neq \lim_{t\to g(k)-} h(t)$를 만족시키는 $g(k)$의 값은

$0,\ -b$이다.

$g(k)=0$에서 양수 k의 값은 $-\dfrac{1}{b}$이고,

$g(k)=-b$에서 양수 k의 값은 $-\dfrac{2}{b}$이다.

$k\neq -\dfrac{1}{b},\ k\neq -\dfrac{2}{b}$인 모든 양수 k에 대하여

$0<|g(k)|<-b$이므로 $\lim_{t\to g(k)+} h(t)=\lim_{t\to g(k)-} h(t)$이다.

그러므로 $-\dfrac{1}{b}+\left(-\dfrac{2}{b}\right)=3$, 즉 $b=-1$일 때 조건 (나)를 만족시킨다.

(ⅰ), (ⅱ)에서 $b=-1$이고 이를 ㉡에 대입하면 $a=\dfrac{1}{2}$이므로

$f(x)=\dfrac{1}{2}x^2-x$

따라서 $f(4)=\dfrac{1}{2}\times 4^2-4=4$

10. **정답** 9

$f(x)=(x+1)^2e^{-x}$에서

$f'(x)=2(x+1)e^{-x}-(x+1)^2e^{-x}$

$=(-x^2+1)e^{-x}$

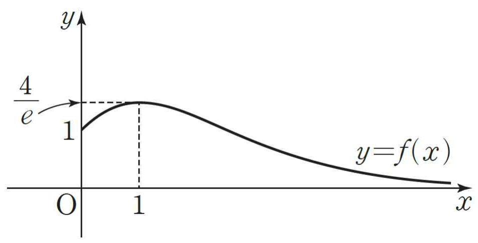
$=-(x+1)(x-1)e^{-x}$

$x\geq 0$일 때 $f'(x)=0$에서 $x=1$

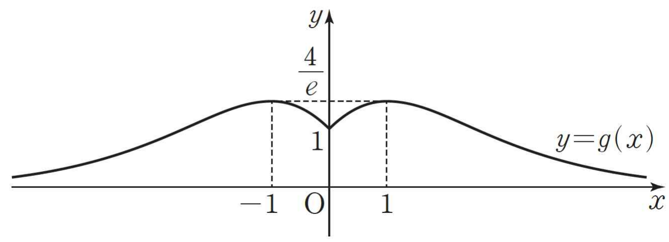
$x\geq 0$일 때 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$	1	↗	$\dfrac{4}{e}$	↘

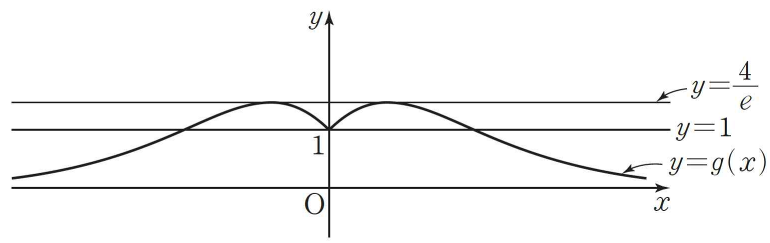
$\lim_{x\to 0+} f(x)=1$, $\lim_{x\to\infty} f(x)=0$이므로 $x\geq 0$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



함수 $y=g(x)$의 그래프는 $x\geq 0$일 때 함수 $y=f(x)$의 그래프와 일치하고, $x<0$일 때 함수 $y=f(x)\,(x>0)$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동시킨 것이므로 함수 $y=g(x)$의 그래프는 다음과 같다.



또 함수 $y=g(x)$의 그래프와 직선 $y=k$를 교점의 개수에 따라 나타내면 다음과 같다.



그러므로 함수 $h(k)$는

$$h(k)=\begin{cases}0 & (k\leq 0)\\ 2 & (0<k<1)\\ 3 & (k=1)\\ 4 & \left(1<k<\dfrac{4}{e}\right)\\ 2 & \left(k=\dfrac{4}{e}\right)\\ 0 & \left(k>\dfrac{4}{e}\right)\end{cases}$$

이때 $h(1)=3$이고 a가 정수이므로 $\lim_{k\to a-}h(k)+\lim_{k\to a+}h(k)$의 값은

(ⅰ) $a<0$일 때

$k\leq 0$일 때 $h(k)=0$이므로 $\lim_{k\to a-}h(k)+\lim_{k\to a+}h(k)=0$

(ⅱ) $a=0$일 때

$\lim_{k\to a-}h(k)+\lim_{k\to a+}h(k)=\lim_{k\to 0-}h(k)+\lim_{k\to 0+}h(k)=0+2=2$

(ⅲ) $a=1$일 때

$\lim_{k\to a-}h(k)+\lim_{k\to a+}h(k)=\lim_{k\to 1-}h(k)+\lim_{k\to 1+}h(k)=2+4=6$

(ⅳ) $a\geq 2$일 때

$2<e<3$에서 $\dfrac{4}{3}<\dfrac{4}{e}<2$이고 $k>\dfrac{4}{e}$일 때 $h(k)=0$이므로

$\lim_{k\to a-}h(k)+\lim_{k\to a+}h(k)=0$

(ⅰ)~(ⅳ)에 의하여

$\lim_{k\to a-}h(k)+\lim_{k\to a+}h(k)$는 $a=1$일 때 최댓값 6을 갖는다.

즉, $M=6$

따라서 $h(1)+M=3+6=9$

11. **정답** 15

최고차항의 계수가 1이고 상수항이 0인 삼차함수 $f(x)$는

$f(x)=x^3+ax^2+bx$ (a, b는 상수)

로 놓을 수 있다.

$g(x)=\dfrac{x^3+ax^2+bx}{e^x}$에서 $g(0)=0$이고,

$g'(x)=\dfrac{(3x^2+2ax+b)e^x-(x^3+ax^2+bx)e^x}{e^{2x}}$

$$= \frac{-x^3+(3-a)x^2+(2a-b)x+b}{e^x}$$

$g(2)=\dfrac{8+4a+2b}{e^2}$,

$$g'(2)=\frac{-8+(12-4a)+(4a-2b)+b}{e^2}=\frac{-b+4}{e^2}$$

이고 조건 (가)에서 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(2,\ g(2))$에서의 접선이 원점을 지나므로

$$g'(2)=\frac{g(2)-g(0)}{2-0}=\frac{g(2)}{2}$$

즉, $\dfrac{-b+4}{e^2}=\dfrac{4+2a+b}{e^2}$에서

$a+b=0,\ b=-a$ …… ㉠

또한 점 $(2,\ g(2))$가 곡선 $y=g(x)$의 변곡점이므로 $g''(2)=0$이어야 한다.

$g'(x)=\dfrac{-x^3+(3-a)x^2+3ax-a}{e^x}$에서

$g''(x)$

$$=\frac{\{-3x^2+(6-2a)x+3a\}e^x-\{-x^3+(3-a)x^2+3ax-a\}e^x}{e^{2x}}$$

$$=\frac{x^3+(a-6)x^2+(-5a+6)x+4a}{e^x}$$

이므로

$$g''(2)=\frac{8+(4a-24)+(-10a+12)+4a}{e^2}=\frac{-2a-4}{e^2}=0$$

에서 $a=-2$이고, ㉠에서 $b=2$

따라서 $f(x)=x^3-2x^2+2x$이므로

$f(3)=27-18+6=15$

12. **정답** 51

$g(x)=(1+\ln 3)f(x)-f(x)\ln f(x)$ 에서

$$g'(x)=(1+\ln 3)f'(x)-f'(x)\times \ln f(x)-f(x)\times\frac{f'(x)}{f(x)}$$

$$=f'(x)\times\{\ln 3-\ln f(x)\}$$

$g'(x)=0$에서 $f'(x)=0$ 또는 $f(x)=3$

조건 (가)에서 함수 $g(x)$는 $x=3$에서 극솟값을 가지므로 $g'(3)=0$이다.

$g'(3)=0$이므로 $f'(3)=0$ 또는 $f(3)=3$

이때 $f'(3)\neq 0$이라 가정하면 $f(3)=3$이다.

(ⅰ) $\alpha>3$에서 $f'(\alpha)=0$인 경우

직선 $x=\alpha$가 이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 대칭축이므로 $f'(3)<0$이고 $x=3$의 좌우에서 $\ln 3-\ln f(x)$의 값이 음에서 양으로 바뀌므로 $g'(x)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌고, 함수 $g(x)$가 $x=3$에서 극댓값을 갖게 되어 조건 (가)에 모순이다.

(ⅱ) $\alpha<3$에서 $f'(\alpha)=3$인 경우

직선 $x=\alpha$가 이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 대칭축이므로 $f'(3)>0$이고 $x=3$의 좌우에서 $\ln 3-\ln f(x)$의 값이 양에서 음으로 바뀌므로 $g'(x)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌고, 함수 $g(x)$가 $x=3$에서 극댓값을 갖게 되어 조건 (가)에 모순이다.

(ⅰ), (ⅱ)에서 모두 조건 (가)에 모순이므로 $f'(3)=0$이다.

$x=3$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로

$g'(x)=f'(x)\times\{\ln 3-\ln f(x)\}$ 에서 함수 $g(x)$가 $x=3$에서 극솟값을 가지려면 $\ln 3-\ln f(3)>0$이어야 한다.

즉, $f(3)<3$이므로 이차방정식 $f(x)=3$을 만족시키는 서로 다른 두 실근이 존재한다. 이차방정식 $f(x)=3$을 만족시키는 서로 다른 두 실근을 $\alpha_1,\ \alpha_2$라 하자.

이때 이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=3$의 두 교점은 직선 $x=3$에 대하여 대칭이므로

$\alpha_1+\alpha_2=6$

조건 (나)에 의하여

$3\alpha_1\alpha_2=24$이므로 $\alpha_1\alpha_2=8$

따라서 $f(x)-3=x^2-6x+8$에서

$f(x)=x^2-6x+11$이므로

$f(10)=10^2-6\times 10+11=51$

[참고]

함수 $g(x)$의 이계도함수를 이용하여 다음과 같이 $f'(3)=0$임을 구할 수도 있다.

$g'(x)=f'(x)\times\{\ln 3-\ln f(x)\}$ 에서

$$g''(x)=f''(x)\times\{\ln 3-\ln f(x)\}+f'(x)\times\left\{-\frac{f'(x)}{f(x)}\right\}$$

조건 (가)에서 $g'(3)=0$이므로 $f'(3)=0$ 또는 $f(3)=3$

$f'(3)\neq 0$이라 가정하면 $f(3)=3$이므로

$$g''(3)=-\frac{\{f'(3)\}^2}{f(3)}<0$$

즉, 함수 $g(x)$는 $x=3$에서 극댓값을 갖게 되어 조건 (가)에 모순이다.

그러므로 $f'(3)=0$

13. **정답** 8

$f(x)=\dfrac{x^2-x+1}{e^x}$ 에서

$$f'(x)=\frac{(x^2-x+1)'\times e^x-(x^2-x+1)\times(e^x)'}{(e^x)^2}$$

$$=\frac{(2x-1)e^x-(x^2-x+1)e^x}{e^{2x}}$$

$$=-\frac{x^2-3x+2}{e^x}$$

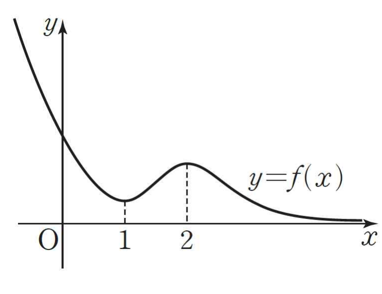
$$=-\frac{(x-1)(x-2)}{e^x}$$

$f'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘

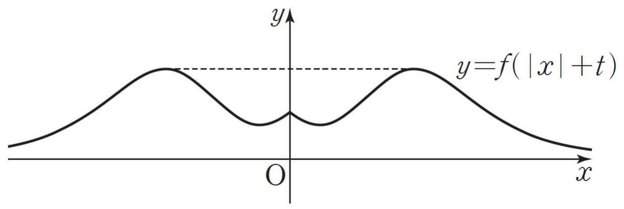
함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 그림과 같다.



$f(|x|+t)=\begin{cases} f(-x+t) & (x<0) \\ f(x+t) & (x \geq 0) \end{cases}$에서 함수 $y=f(x+t)$ $(x \geq 0)$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 $-t$만큼 평행이동한 그래프의 $x \geq 0$인 부분이고, 함수 $y=f(-x+t)$ $(x<0)$의 그래프는 함수 $y=f(x+t)$ $(x>0)$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 그래프이다.

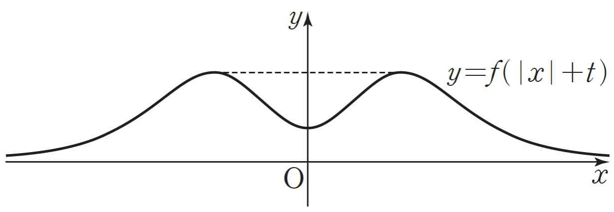
실수 t의 값에 따라 함수 $y=f(|x|+t)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.

(i) $t<1$일 때



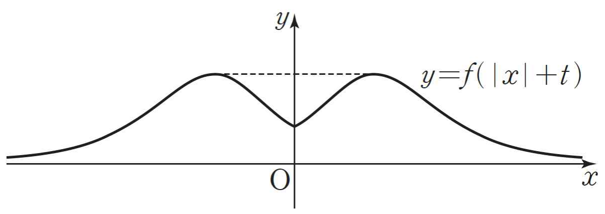
함수 $f(|x|+t)$가 극대인 x의 값은 3개이고 극소인 x의 값은 2개이므로 $g(t)=5$

(ii) $t=1$일 때



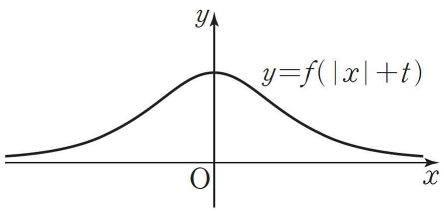
함수 $f(|x|+t)$가 극대인 x의 값은 2개이고 극소인 x의 값은 1개이므로 $g(t)=3$

(iii) $1<t<2$일 때



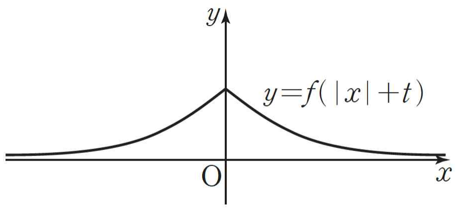
함수 $f(|x|+t)$가 극대인 x의 값은 2개이고 극소인 x의 값은 1개이므로 $g(t)=3$

(iv) $t=2$일 때



함수 $f(|x|+t)$가 극대인 x의 값은 1개이고 극소인 x의 값은 0개이므로 $g(t)=1$

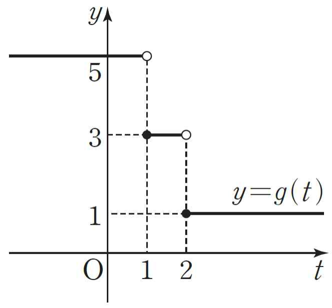
(v) $t>2$일 때



함수 $f(|x|+t)$가 극대인 x의 값은 1개이고 극소인 x의 값은 0개이므로 $g(t)=1$

(i)~(v)에 의하여 함수 $g(t)$와 그 그래프는 다음과 같다.

$$g(t)=\begin{cases} 5 & (t<1) \\ 3 & (1 \leq t<2) \\ 1 & (t \geq 2) \end{cases}$$



함수 $g(t)$는 $t=1$과 $t=2$에서 불연속이고, 함수 $g(x)h(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이기 위해서는 $h(1)=0$이고 $h(2)=0$이어야 하므로

$h(x)=(x-1)(x-2)$이다.

따라서 $h(0)+h(4)=2+6=8$

14. **정답** 32

$f(x)=\sqrt{2}\cos x \times e^{\sqrt{2}\sin x}$에서

$$f'(x)=-\sqrt{2}\sin x \times e^{\sqrt{2}\sin x}+(\sqrt{2}\cos x)^2 \times e^{\sqrt{2}\sin x}$$
$$=\sqrt{2}e^{\sqrt{2}\sin x}(\sqrt{2}\cos^2 x-\sin x)$$
$$=\sqrt{2}e^{\sqrt{2}\sin x}\{\sqrt{2}(1-\sin^2 x)-\sin x\}$$
$$=-\sqrt{2}e^{\sqrt{2}\sin x}(\sin x+\sqrt{2})(\sqrt{2}\sin x-1)$$

$f'(x)=0$에서 $\sin x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$이므로

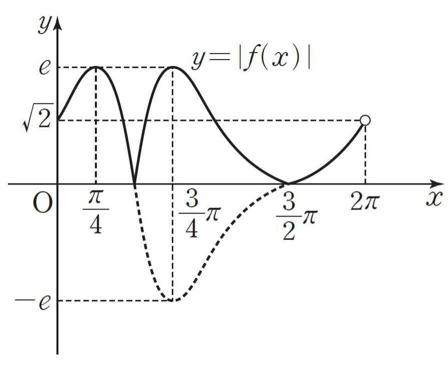
$0 \leq x<2\pi$에서 $x=\dfrac{\pi}{4}$ 또는 $x=\dfrac{3}{4}\pi$

$0 \leq x<2\pi$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{4}$	$\cdots$	$\frac{3}{4}\pi$	$\cdots$	(2π)
$f'(x)$		+	0	−	0	+	
$f(x)$		↗	극대	↘	극소	↗	

$$f(0)=\sqrt{2}\cos 0 \times e^{\sqrt{2}\sin 0}=\sqrt{2}\times 1=\sqrt{2}$$
$$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{4}\times e^{\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{4}}=1\times e=e$$
$$f\left(\frac{3}{4}\pi\right)=\sqrt{2}\cos\frac{3}{4}\pi\times e^{\sqrt{2}\sin\frac{3}{4}\pi}=-1\times e=-e$$
$$\lim_{x\to 2\pi-}f(x)=\sqrt{2}\cos 2\pi \times e^{\sqrt{2}\sin 2\pi}=\sqrt{2}\times 1=\sqrt{2}$$

이므로 함수 $y=|f(x)|$의 그래프는 [그림 1]과 같다.

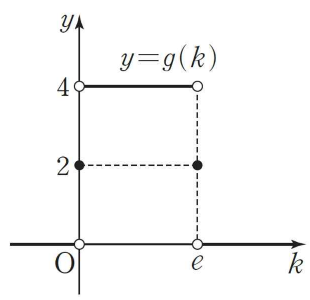


[그림 1]

실수 k에 대하여 방정식 $|f(x)|=k$의 서로 다른 실근의 개수는

$$g(k)=\begin{cases} 0 & (k<0,\ k>e) \\ 2 & (k=0,\ k=e) \\ 4 & (0<k<e) \end{cases}$$

이므로 함수 $y=g(k)$의 그래프는 [그림 2]와 같다.



[그림 2]

따라서 $A=\{0,\ 2,\ 4\}$, $B=\{0,\ e\}$이므로

$n(A)=3$, $n(B)=2$이고

$10\times n(A)+n(B)=10\times 3+2=32$

15. **정답** 28

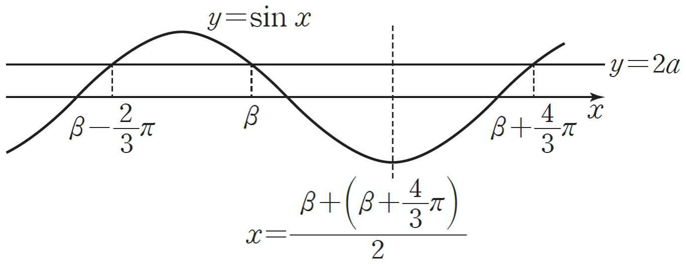
$f(x)=ax^2+bx+c\ \ (a>0)$이라 하자.
$g(x)=ax^2+bx+c+\sin x$에서
$g'(x)=2ax+b+\cos x$
$g''(x)=2a-\sin x$
$g'(x)=0$에서 $\cos x=-2ax-b$
조건 (가)에서 방정식 $g'(x)=0$이 서로 다른 두 실근 α, β $(\alpha<0<\beta)$를 가지므로 $g'(\alpha)=g'(\beta)=0$이고, α, β는 곡선 $y=\cos x$와 직선 $y=-2ax-b$의 교점의 x좌표이다.
$g''(x)=0$에서 $\sin x=2a$
조건 (나)에서 함수 $g'(x)$는 $x=\beta$에서 극소, $x=\beta+k$에서 극대이므로 $g''(\beta)=g''(\beta+k)=0$이고, $x=\beta$의 좌우에서 $g''(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌고, $x=\beta+k$의 좌우에서 $g''(x)$의 부호가 양에서 음으로 바뀐다. …… ㉠

$\sin\beta=\sin(\beta+k)=2a$를 만족시키는 양수 k의 최솟값이 $\frac{4}{3}\pi$이므로

$\sin\beta=\sin\left(\beta+\frac{4}{3}\pi\right)=2a$이고

$\beta<x<\beta+\frac{4}{3}\pi$인 x에 대하여 $\sin x\neq 2a$이다.

$2a>0$이고 ㉠에 의하여 $x=\beta$의 좌우에서 $g''(x)=2a-\sin x$의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로 곡선 $y=\sin x$와 직선 $y=2a$를 나타내면 그림과 같다.



함수 $g(x)$는 닫힌구간 $[-\pi,\ 5\pi]$에서 정의되므로

$\frac{\beta+\left(\beta+\frac{4}{3}\pi\right)}{2}=\beta+\frac{2}{3}\pi$의 값은 $\frac{3}{2}\pi$ 또는 $\frac{7}{2}\pi$ 또는 $\frac{11}{2}\pi$이다.

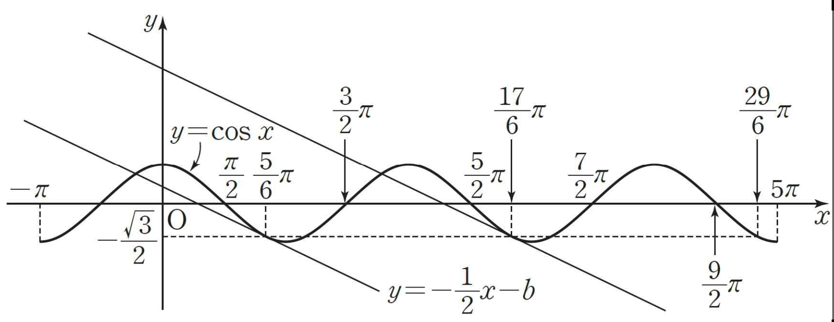
즉, $\beta=\frac{5}{6}\pi$ 또는 $\beta=\frac{17}{6}\pi$ 또는 $\beta=\frac{29}{6}\pi$

한편, $g'(\beta)=g''(\beta)=0$이므로
곡선 $y=\cos x$와 직선 $y=-2ax-b$는 $x=\beta$에서 접한다.

$y'=-\sin x$이고 $\sin\frac{5}{6}\pi=\sin\frac{17}{6}\pi=\sin\frac{29}{6}\pi=\frac{1}{2}$에서

$-\sin\beta=-\frac{1}{2}$이므로

$-\frac{1}{2}=-2a$, 즉 $a=\frac{1}{4}$



방정식 $g'(x)=0$이 음의 실근 α를 갖기 위해서는 직선 $y=-\frac{1}{2}x-b$의 y절편, 즉 $-b$가 1보다 작아야 한다.

(i) $\beta=\frac{5}{6}\pi$인 경우

직선 $y=-\frac{1}{2}x-b$는 점 $\left(\frac{5}{6}\pi,\ -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$을 지나므로

$-b=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{5}{12}\pi<-\frac{3}{4}+\frac{5}{3}<1$

(ii) $\beta=\frac{17}{6}\pi$인 경우

직선 $y=-\frac{1}{2}x-b$는 점 $\left(\frac{17}{6}\pi,\ -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$을 지나므로

$-b=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{17}{12}\pi>-1+\frac{17}{4}>1$

(iii) $\beta=\frac{29}{6}\pi$인 경우

$\beta+\frac{4}{3}\pi=\frac{37}{6}\pi>5\pi$이므로 함수 $g'(x)$는 $x=\beta+\frac{4}{3}\pi$에서 정의되지 않는다.

(i), (ii), (iii)에서 $\beta=\frac{5}{6}\pi$이고 $b=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{5}{12}\pi$이다.

그러므로 $g(x)=\frac{1}{4}x^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{5}{12}\pi\right)x+c+\sin x$

이때 $g(0)=c$이므로 $c=-2\sqrt{3}\pi$

즉, $g(x)=\frac{1}{4}x^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{5}{12}\pi\right)x-2\sqrt{3}\pi+\sin x$이므로

$$g(4\pi)=\frac{1}{4}\times(4\pi)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{5}{12}\pi\right)\times 4\pi-2\sqrt{3}\pi+\sin 4\pi$$

$$=4\pi^2+2\sqrt{3}\pi-\frac{5}{3}\pi^2-2\sqrt{3}\pi=\frac{7}{3}\pi^2$$

따라서 $\frac{12}{\pi^2}g(4\pi)=\frac{12}{\pi^2}\times\frac{7}{3}\pi^2=28$

⑤ 적분

TH①. 2024년 수능특강

2024년 수능특강 Lv2

New

1. 1 보다 큰 실수 x 에 대하여 함수 $f(x)$ 가

$$f(x)=\int_0^1 \frac{1}{4+(x-1)e^t}dt$$

일 때, $f'(2)$ 의 값은?

① $\dfrac{1-e}{5(e+4)}$ ② $\dfrac{1-e}{4(e+4)}$ ③ $\dfrac{1-e}{3(e+4)}$
④ $\dfrac{1-e}{2(e+4)}$ ⑤ $\dfrac{1-e}{e+4}$

2024년 수능특강 Lv3

2. 최고차항의 계수가 1 인 삼차함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 최고차항의 계수가 -1 인 이차함수 $y=g(x)$ 의 그래프가 두 점 $(a,\ f(a))$, $(b,\ f(b))$ $(a<b)$ 에서만 만나고 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $g(a)=g(a+2)=0$
(나) $f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)>g\left(\dfrac{a+b}{2}\right)$

$g(-1)=1$ 이고 $f''(1)=0$ 일 때, $\displaystyle\int_5^6 \frac{\left(\frac{5}{x}-2\right)g(x)}{f(x)}dx$ 의 값은?

① $\ln\dfrac{3}{2}$ ② $\ln\dfrac{5}{2}$ ③ $\ln\dfrac{7}{2}$
④ $\ln\dfrac{9}{2}$ ⑤ $\ln\dfrac{11}{2}$

3. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킬 때, $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{xf'(x)}{1+\pi^{f'(x)}}dx$의 값은?

(가) 모든 실수 x 에 대하여 $f(-x)=f(x)$ 이다.

(나) $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=12$

(다) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx=12$

① $2\pi-12$ ② $3\pi-12$ ③ $4\pi-12$
④ $5\pi-12$ ⑤ $6\pi-12$

4. $0 \le x \le 1$ 일 때, x 에 대한 방정식

$$2\pi\int_{0}^{2x} |t-x| \cos 2\pi t\, dt = x\sin 4\pi x$$

의 서로 다른 실근의 개수는?

① 2 ② 3 ③ 4
④ 5 ⑤ 6

연계 가능

5. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$ 와 다양함수

$$g(x) = x^2 + \int_0^1 (x+t)g(t)dt$$

에 대하여 함수 $h(x)$ 를

$$h(x) = \int_0^{g(x)} e^{f(t)}dt$$

라 하자. 함수 $h(x)$ 가 $x=k$ 에서 극솟값을 가질 때, $g(2k)$ 의 값은? (단, k 는 상수이다.)

① $-\dfrac{8}{3}$ ② $-\dfrac{17}{6}$ ③ -3

④ $-\dfrac{19}{6}$ ⑤ $-\dfrac{10}{3}$

2024년 수능특강 Lv3

New

6. 자연수 n에 대하여 닫힌구간 $[0,\ 1]$에서 정의된 함수 $f(x)$를

$$f(x) = nx(1-x^2)^n$$

이라 하자. 함수 $f(x)$가 $x=a_n$에서 최댓값을 갖는다고 할 때, 닫힌구간 $[0,\ a_n]$에서 곡선 $y=f(x)$와 직선 $x=a_n$및 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_n이라 하자. $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$의 값은?

① $\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1}{\sqrt{e}}\right)$ ② $\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1}{e}\right)$

③ $\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1}{e\sqrt{e}}\right)$ ④ $\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1}{e^2}\right)$

⑤ $\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1}{e^2\sqrt{e}}\right)$

7. 점 $\mathrm{A}\left(0,\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}e\right)$를 지나고 함수 $f(x)=k(\ln x)^2$의 그래프에 접하는 두 접선 l_1, l_2가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 곡선 $y=f(x)$와 두 접선 l_1, l_2가 접하는 점의 x좌표는 각각 p, q $(p<q)$이다.
(나) 두 접선 l_1, l_2는 서로 수직이다.

곡선 $y=f(x)$와 두 직선 $x=p$, $x=q$ 및 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는? (단, k는 양의 상수이다.)

① $\dfrac{\sqrt{3}}{6}(e^4-1)$ ② $\dfrac{\sqrt{3}}{3}(e^4-1)$
③ $\dfrac{\sqrt{3}}{2}(e^4-1)$ ④ $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}(e^4-1)$
⑤ $\dfrac{5\sqrt{3}}{6}(e^4-1)$

2024년 수능특강 Lv3
연계 가능

8. 양의 상수 a에 대하여 $-\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2}$에서 정의된 두 함수

$f(x)=a\sec x$,
$g(x)=2\sin x\cos x$

의 그래프가 단 한 점에서만 만나고 그 점에서의 접선이 서로 일치한다. 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 및 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이는?

① $\dfrac{2\sqrt{3}}{9}ln(2+\sqrt{3})-\dfrac{1}{2}$
② $\dfrac{2\sqrt{3}}{9}ln(2+\sqrt{3})-\dfrac{1}{3}$
③ $\dfrac{2\sqrt{3}}{9}ln(2+\sqrt{3})-\dfrac{1}{4}$
④ $\dfrac{2\sqrt{3}}{9}ln(2+\sqrt{3})-\dfrac{1}{5}$
⑤ $\dfrac{2\sqrt{3}}{9}ln(2+\sqrt{3})-\dfrac{1}{6}$

TH②. 2024년 수능완성

2024년 수능완성

9. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} dx$의 값은?

① $\frac{\sqrt{3}}{3}$　② $\frac{2\sqrt{3}}{3}$　③ $\sqrt{3}$
④ $\frac{4\sqrt{3}}{3}$　⑤ $\frac{5\sqrt{3}}{3}$

2024년 수능완성

3점 연계 가능

10. $\int_{e}^{e^2} \frac{(\ln x)^2 + \ln x^2}{x} dx$의 값은? [3점]

① 4　② $\frac{14}{3}$　③ $\frac{16}{3}$
④ 6　⑤ $\frac{20}{3}$

2024년 수능완성

연계 가능

11. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$f(x)=x^2e^{-x}+\int_0^x e^{t-x}f(t)dt$$

를 만족시킬 때, 닫힌구간 $[-2,\ 2]$에서 함수 $f(x)$의 최댓값과 최솟값의 합은?

① $2e^2-\dfrac{6}{e^2}$ ② $2e^2+2$ ③ $2e^2+\dfrac{6}{e^2}+2$

④ $2e^2-\dfrac{6}{e^2}+4$ ⑤ $2e^2+\dfrac{6}{e^2}+4$

2024년 수능완성

2025학년도 경찰대학교 연계

12. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 다음을 만족시킨다.

$$\int_0^x (x-t)f(t)dt=e^x+8e^{-x}-3x^2+ax+b$$

곡선 $y=f(x)$와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 S라 할 때, $a+b+S$의 값은? (단, a, b는 상수이다.)

① $6\ln 2-6$ ② $8\ln 2-6$ ③ $6\ln 2-4$

④ $8\ln 2-4$ ⑤ $6\ln 2-2$

13. 두 양의 실수 a, b에 대하여 함수 $f(x)=ax\sin bx$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $f(\pi)=0$
> (나) 모든 실수 x에 대하여 $|f(x)| \le |x|$이다.
> (다) $0<p<\pi$인 실수 p에 대하여 함수 $f(x)$가 $x=p$에서 극대인 p의 개수는 2이다.

좌표평면에서 네 점 $\mathrm{O}(0,\ 0)$, $\mathrm{A}(\pi,\ 0)$, $\mathrm{B}(\pi,\ \pi)$, $\mathrm{C}(0,\ \pi)$를 꼭짓점으로 하는 정사각형 OABC에 대하여 곡선 $y=f(x)$와 x축으로 둘러싸인 부분과 정사각형 OABC의 내부의 공통부분의 넓이가 $\frac{\pi}{12}$이하일 때, $72a+b$의 최댓값을 구하시오. [4점]

연계 가능

14. 실수 전체의 집합에서 미분가능하고 도함수가 연속인 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$f(x)\cos x = x\cos^2 x - \sin x\int_0^{\frac{\pi}{2}} f'(t)dt - \int_0^x f(t)\sin t\,dt$$

를 만족시킬 때, $(\pi+2)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\{f(x)\sin x + f'(x)\cos x\}dx$ 의 값을 구하시오. [4점]

연계 가능

15. 정의역이 $\{x \mid x>0\}$인 함수 $f(x)$의 역함수 $g(x)$가 연속일 때, 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$가 모든 양의 실수 x에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\displaystyle\int_{f(1)}^{f(x)} g(t)\,dt = ax+\ln x-\frac{b}{3}$ (단, a, b는 상수)

(나) $f(4)-f(2)=\dfrac{1}{4}+3\ln 2$

$f(1)=2$일 때, $f(3)=\dfrac{p+q\ln 3}{3}$이다. 자연수 p, q에 대하여 $p+q$의 값을 구하시오. (단, $\ln 3$은 무리수이다.) [4점]

2024년 수능완성

16. 함수 $f(x)=e^{2x}+2e^{x}-3$과 양수 t에 대하여 함수

$$g(x)=\int_0^x \{t-f(s)\}\,ds$$

가 최대가 되도록 하는 x의 값을 $h(t)$라 하자. $h'(k)=\dfrac{1}{12}$인 실수 k에 대하여 $0<t\leq k$에서 $g(h(k))$의 최댓값은 $p+q\ln 2$이다. $10(p+q)$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 유리수이고, $\ln 2$는 무리수이다.) [4점]

1. 답. ①

$e^t = y$ 로 놓으면

$t=0$ 일 때 $y=1$, $t=1$ 일 때 $y=e$ 이고,

$e^t = \dfrac{dy}{dt}$ 이므로

$$f(x) = \int_0^1 \frac{1}{4+(x-1)e^t}dt$$
$$= \int_1^e \left\{\frac{1}{4+(x-1)y} \times \frac{1}{y}\right\}dy$$
$$= \int_1^e \frac{1}{4}\left\{\frac{1}{y} - \frac{x-1}{4+(x-1)y}\right\}dy$$
$$= \frac{1}{4}\int_1^e \left\{\frac{1}{y} - \frac{x-1}{4+(x-1)y}\right\}dy$$
$$= \frac{1}{4}\Big[\ln|y| - \ln|4+(x-1)y|\Big]_1^e$$
$$= \frac{1}{4}\{1 - \ln|4+(x-1)e| + \ln|x+3|\}$$

따라서

$$f'(x) = \frac{1}{4}\left\{-\frac{e}{4+(x-1)e} + \frac{1}{x+3}\right\}$$

이므로

$$f'(2) = \frac{1}{4}\left\{-\frac{e}{4+e} + \frac{1}{5}\right\}$$
$$= \frac{1}{4} \times \frac{-4e+4}{5(e+4)}$$
$$= \frac{1-e}{5(e+4)}$$

2. 답. ②

조건 (가)에 의하여 $g(x) = -(x-a)(x-a-2)$

이때 $g(-1) = 1$ 이므로 $-(-1-a)(-1-a-2) = 1$

$(a+1)(a+3) = -1$

$a^2 + 4a + 4 = 0$

$(a+2)^2 = 0$

따라서 $a = -2$ 이므로 $g(x) = -(x+2)x = -x^2 - 2x$

또한 삼차함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 이차함수 $y=g(x)$ 의 그래프가 두 점 $(a,\ f(a))$, $(b,\ f(b))$ $(a<b)$ 에서만 만나므로 방정식 $f(x)=g(x)$, 즉 $f(x)-g(x)=0$ 의 두 실근이 $a,\ b$ 이다.

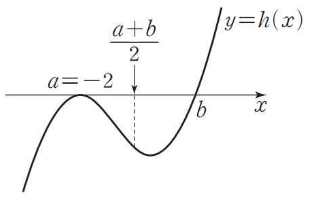
이때 $h(x) = f(x) - g(x)$ 라 하면

$h(x) = (x-a)^2(x-b) = (x+2)^2(x-b)$ …… ㉠

또는

$h(x) = (x-a)(x-b)^2 = (x+2)(x-b)^2$ …… ㉡

㉠에서 함수 $y=h(x)$ 의 그래프는 [그림 1]과 같다.



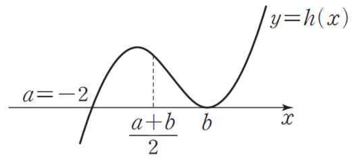
[그림 1]

이때

$$h\left(\frac{a+b}{2}\right) = f\left(\frac{a+b}{2}\right) - g\left(\frac{a+b}{2}\right) < 0$$

이므로 조건 (나)를 만족시키지 못한다.

㉡에서 함수 $y=h(x)$ 의 그래프는 [그림 2]와 같다.



[그림 2]

이때

$$h\left(\frac{a+b}{2}\right) = f\left(\frac{a+b}{2}\right) - g\left(\frac{a+b}{2}\right) > 0$$

이므로 조건 (나)를 만족시킨다.

즉, $h(x) = f(x) - g(x) = (x+2)(x-b)^2$ 이므로

$f(x) = (x+2)(x-b)^2 + g(x)$

$= (x+2)(x-b)^2 - x^2 - 2x$

$f'(x) = (x-b)^2 + 2(x+2)(x-b) - 2x - 2$

$f''(x) = 2(x-b) + 2(x-b) + 2(x+2) - 2$

$= 6x - 4b + 2$

이므로

$f''(1) = 6 - 4b + 2 = 0$ 에서 $b = 2$

따라서

$f(x) = (x+2)(x-2)^2 - x(x+2)$

$= (x+2)(x^2 - 5x + 4)$

$= (x+2)(x-1)(x-4)$

이므로

$$\int_5^6 \frac{\left(\frac{5}{x}-2\right)g(x)}{f(x)}dx = \int_5^6 \frac{\left(\frac{5}{x}-2\right)\{-x(x+2)\}}{(x+2)(x-1)(x-4)}dx$$
$$= \int_5^6 \frac{(2x-5)(x+2)}{(x+2)(x-1)(x-4)}dx$$
$$= \int_5^6 \frac{2x-5}{(x-1)(x-4)}dx$$
$$= \int_5^6 \left(\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-4}\right)dx$$
$$= \Big[\ln|x-1| + \ln|x-4|\Big]_5^6$$
$$= \ln 5 + \ln 2 - \ln 4 = \ln\frac{5\times 2}{4}$$
$$= \ln\frac{5}{2}$$

3. 답. ⑤

조건 (가)에 의하여 모든 실수 x 에 대하여

$f'(-x) \times (-x)' = f'(x)$

즉, $-f'(-x) = f'(x)$ 에서

$f'(-x) = -f'(x)$

이때 $g(x) = \dfrac{xf'(x)}{1+\pi^{f'(x)}}$ 라 하면

$$g(-x) = \frac{-xf'(-x)}{1+\pi^{f'(-x)}}dx = \frac{xf'(x)}{1+\pi^{-f'(x)}}$$

$= \dfrac{xf'(x) \times \pi^{f'(x)}}{1+\pi^{f'(x)}}$

이므로

$g(x)+g(-x) = \dfrac{xf'(x)}{1+\pi^{f'(x)}} \times \dfrac{xf'(x) \times \pi^{f'(x)}}{1+\pi^{f'(x)}}$

$= \dfrac{xf'(x)\{1+\pi^{f'(x)}\}}{1+\pi^{f'(x)}} = xf'(x)$ …… ㉠

또한 $h(x) = g(x) - g(-x)$ 라 하면

$h(-x) = g(-x) - g(x) = -h(x)$ 이므로

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} h(x)dx = 0$$

즉, $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \{g(x)-g(-x)\}dx = 0$이므로

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} g(x)dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} g(-x)dx$$

㉠에 의하여

$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \{g(x)+g(-x)\}dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} xf'(x)dx$이므로

$$2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} g(x)dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} xf'(x)dx$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} g(x)dx = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} xf'(x)dx$$

따라서

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{xf'(x)}{1+\pi^{f'(x)}}dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} g(x)dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} xf'(x)dx = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} xf'(x)dx$$

이때 $u(x) = x,\ v'(x) = f'(x)$ 로 놓으면

$u'(x) = 1,\ v(x) = f(x)$ 이므로

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} xf'(x)dx = \Big[xf(x)\Big]_{0}^{\frac{\pi}{2}} - \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$$

$$= \frac{\pi}{2}f\left(\frac{\pi}{2}\right) - \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$$

$$= \frac{\pi}{2} \times 12 - 12$$

$= 6\pi - 12$

다른풀이

조건 (가)에 의하여 모든 실수 x 에 대하여

$f'(-x) \times (-x)' = f'(x)$

즉, $-f'(-x) = f'(x)$ 에서

$f'(-x) = -f'(x)$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{xf'(x)}{1+\pi^{f'(x)}}dx$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{xf'(x)}{1+\pi^{f'(x)}}dx + \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{xf'(x)}{1+\pi^{f'(x)}}dx \quad \cdots\cdots ㉠$$

$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{xf'(x)}{1+\pi^{f'(x)}}dx$ 에서 $-x = t$ 로 놓으면

$x = -\dfrac{\pi}{2}$ 일 때 $t = \dfrac{\pi}{2}$, $x = 0$ 일 때 $t = 0$ 이고,

$-1 = \dfrac{dt}{dx}$ 이므로

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{xf'(x)}{1+\pi^{f'(x)}}dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{-tf'(-t)}{1+\pi^{f'(-t)}}dt$$

$$= \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{tf'(t)}{1+\pi^{f'(t)}}dt = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{tf'(t)\times\pi^{f'(t)}}{1+\pi^{f'(t)}}dt$$

$$= \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{xf'(x)\times\pi^{f'(x)}}{1+\pi^{f'(x)}}dx$$

이 식을 ㉠에 대입하면

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{xf'(x)}{1+\pi^{f'(x)}}dx$$

$$= \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{xf'(x)\times\pi^{f'(x)}}{1+\pi^{f'(x)}}dx + \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{xf'(x)}{1+\pi^{f'(x)}}dx$$

$$= \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{xf'(x)\{1+\pi^{f'(x)}\}}{1+\pi^{f'(x)}}dx$$

$$= \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} xf'(x)dx$$

$$= \Big[xf(x)\Big]_{0}^{\frac{\pi}{2}} - \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$$

$$= \frac{\pi}{2}f\left(\frac{\pi}{2}\right) - \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$$

$$= \frac{\pi}{2} \times 12 - 12$$

$= 6\pi - 12$

4. 답. ③

$$2\pi\int_{0}^{2x} |t-x|\cos 2\pi t\,dt$$

$$= 2\pi\int_{0}^{x} (x-t)\cos 2\pi t\,dt + 2\pi\int_{x}^{2x} (t-x)\cos 2\pi t\,dt$$

이때 $u(t) = x-t,\ v'(t) = \cos 2\pi t$ 로 놓으면

$u'(t) = -1,\ v(t) = \dfrac{1}{2\pi}\sin 2\pi t$ 이므로

$$\int_{0}^{x} (x-t)\cos 2\pi t\,dt$$

$$= \left[(x-t)\times\frac{1}{2\pi}\sin 2\pi t\right]_{0}^{x} + \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{x} \sin 2\pi t\,dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[-\frac{1}{2\pi}\cos 2\pi t\right]_{0}^{x}$$

$$= -\frac{1}{4\pi^2}\cos 2\pi x + \frac{1}{4\pi^2}$$

즉, $2\pi\int_{x}^{2x} (t-x)\cos 2\pi t\,dt = -\dfrac{1}{2\pi}\cos 2\pi x + \dfrac{1}{2\pi}$

또한

$$\int_{x}^{2x}(t-x)\cos 2\pi t\,dt = -\int_{x}^{2x}(x-t)\cos 2\pi t\,dt$$

이므로

$$\int_{x}^{2x}(x-t)\cos 2\pi t\,dt$$

$$= \left[(x-t)\times\frac{1}{2\pi}\sin 2\pi t\right]_{x}^{2x} + \frac{1}{2\pi}\int_{x}^{2x}\sin 2\pi t dt$$

$$= -\frac{x}{2\pi}\sin 4\pi x + \frac{1}{2\pi}\left[-\frac{1}{2\pi}\cos 2\pi t\right]_{x}^{2x}$$

$$= -\frac{x}{2\pi}\sin 4\pi x - \frac{1}{4\pi^2}\cos 4\pi x + \frac{1}{4\pi^2}\cos 2\pi x$$

즉,

$$2\pi\int_{x}^{2x}(t-x)\cos 2\pi t\,dt = -2\pi\int_{x}^{2x}(x-t)\cos 2\pi t\,dt$$

$$= x\sin 4\pi x + \frac{1}{2\pi}\cos 4\pi x - \frac{1}{2\pi}\cos 2\pi x$$

이므로

$$2\pi\int_{0}^{2x}|t-x|\cos 2\pi t\,dt$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\cos 2\pi x + \frac{1}{2\pi} + x\sin 4\pi x$$
$$+\frac{1}{2\pi}\cos 4\pi x - \frac{1}{2\pi}\cos 2\pi x$$

$$= -\frac{1}{\pi}\cos 2\pi x + \frac{1}{2\pi} + x\sin 4\pi x + \frac{1}{2\pi}\cos 4\pi x$$

따라서 주어진 방정식은

$$-\frac{1}{\pi}\cos 2\pi x + \frac{1}{2\pi} + x\sin 4\pi x + \frac{1}{2\pi}\cos 4\pi x = x\sin 4\pi x$$

$$-\frac{1}{\pi}\cos 2\pi x + \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{2\pi}\cos 4\pi x = 0$$

$$-\cos 2\pi x + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 4\pi x = 0 \quad \cdots\cdots ㉠$$

이때

$\cos 4\pi x = \cos^2 2\pi x - \sin^2 2\pi x$

$= \cos^2 2\pi x - (1-\cos^2 2\pi x)$

$= 2\cos^2 2\pi x - 1$

이므로 ㉠에 대입하면

$$-\cos 2\pi x + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(2\cos^2 2\pi x - 1) = 0$$

$\cos 2\pi x(\cos 2\pi x - 1) = 0$

$\cos 2\pi x = 0$ 또는 $\cos 2\pi x = 1$

$0 \le x \le 1$ 이므로 방정식의 서로 다른 실근은

$x = 0$ 또는 $x = \frac{1}{4}$ 또는 $x = \frac{3}{4}$ 또는 $x = 1$

이고, 서로 다른 실근의 개수는 4 이다.

5. 답. ②

$$g(x) = x^2 + \int_{0}^{1}(x+t)g(t)dt$$

$$= x^2 + x\int_{0}^{1}g(t)dt + \int_{0}^{1}t\,g(t)dt$$

에서 $\int_{0}^{1}g(t)dt = a,\ \int_{0}^{1}t\,g(t)dt = b$ 라 하면

$g(x) = x^2 + ax + b$ 이므로

$$\int_{0}^{1}g(t)dt = \int_{0}^{1}(t^2+at+b)dt$$

$$= \left[\frac{1}{3}t^3 + \frac{a}{2}t^2 + bt\right]_{0}^{1} = \frac{1}{3} + \frac{a}{2} + b = a$$

에서 $3a - 6b = 2$ ⋯⋯ ㉠

$$\int_{0}^{1}t\,g(t)dt = \int_{0}^{1}t(t^2+at+b)dt$$

$$= \int_{0}^{1}(t^3+at^2+bt)dt$$

$$= \left[\frac{1}{4}t^4 + \frac{a}{3}t^3 + \frac{b}{2}t^2\right]_{0}^{1}$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{a}{3} + \frac{b}{2} = b$$

에서 $4a - 6b = -3$ '⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a = -5,\ b = -\frac{17}{6}$

이므로 $g(x) = x^2 - 5x - \frac{17}{6}$

또한 $h(x) = \int_{0}^{g(x)}e^{f(t)}dt$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$h'(x) = e^{f(g(x))}\times g'(x)$

이고 $e^{f(g(x))} > 0$ 이므로 $h'(x) = 0$ 을 만족시키는 x 의 값은

$g'(x) = 0$ 을 만족시키는 x 의 값과 일치한다.

이때 $g'(x) = 2x - 5$ 이므로

$g'(x) = 0$ 에서 $x = \frac{5}{2}$

즉, 함수 $h(x)$ 는 $x = \frac{5}{2}$ 에서 극솟값을 가지므로 $k = \frac{5}{2}$ 이다.

따라서 $g(2k) = g(5) = 5^2 - 5^2 - \frac{17}{6} = -\frac{17}{6}$

참고

$h(x) = \int_{0}^{g(x)}e^{f(t)}dt$ 에서

$\int e^{f(t)}dt = F(t) + C$ (C는 적분상수)라 하면

$$h(x) = \int_{0}^{g(x)}e^{f(t)}dt = \Big[F(t)\Big]_{0}^{g(x)} = F(g(x)) - F(0)$$

따라서 $h'(x) = F'(g(x))\times g'(x) = e^{f(g(x))}\times g'(x)$

6. 답. ①

$f(x) = nx(1-x^2)^n$ 에서

$$f'(x) = n(1-x^2)^n + nx\times n(1-x^2)^{n-1}\times(-2x)$$
$$= n(1-x^2)^{n-1}\{(1-x^2) - 2nx^2\}$$
$$= n(1-x^2)^{n-1}\{1-(2n+1)x^2\}$$

$0 < x < 1$에서 $f'(x) = 0$을 만족시키는 x의 값에서 극대이면서 최대이므로

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$$

또한 닫힌구간 $[0,\ 1]$에서 $f(x) \geq 0$이므로

닫힌구간 $[0,\ a_n]$에서 곡선 $y=f(x)$와 직선 $x=a_n$ 및 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$S_n = \int_0^{a_n} nx(1-x^2)^n\,dx$$

이때 $1-x^2=y$로 놓으면

$x=0$일 때 $y=1$, $x=a_n$일 때 $y=1-{a_n}^2$이고,

$-2x=\dfrac{dy}{dx}$이므로

$$\begin{aligned} S_n &= \int_0^{a_n} nx(1-x^2)^n\,dx \\ &= -\frac{1}{2}\int_1^{1-{a_n}^2} ny^n\,dy \\ &= -\frac{1}{2}\left[\frac{n}{n+1}y^{n+1}\right]_1^{1-{a_n}^2} \\ &= -\frac{1}{2}\left\{\frac{n}{n+1}(1-{a_n}^2)^{n+1}-\frac{n}{n+1}\right\} \\ &= \frac{n}{2n+2}\left\{1-\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)^{n+1}\right\} \\ &= \frac{n}{2n+2}\left\{1-\left(\frac{2n}{2n+1}\right)^{n+1}\right\} \end{aligned}$$

이때

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2+\dfrac{2}{n}}=\frac{1}{2+0}=\frac{1}{2},$$

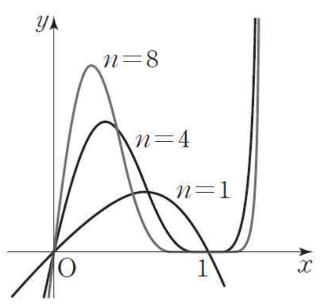
$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n}{2n+1}\right)^{n+1} &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1+\dfrac{1}{2n}}\right)^{n+1} \\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\dfrac{1}{2n}\right)^{n+1}} \\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\dfrac{1}{2n}\right)^{2n\times\frac{1}{2}}\times\left(1+\dfrac{1}{2n}\right)} \\ &= \frac{1}{e^{\frac{1}{2}}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{e}} \end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty}S_n &= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{n}{2n+2}\left\{1-\left(\frac{2n}{2n+1}\right)^{n+1}\right\}\right] \\ &= \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\sqrt{e}}\right) \end{aligned}$$

참고

n의 값에 따른 곡선 $y=nx(1-x^2)^n$은 그림과 같다.



7. 답. ⑤

$f(x)=k(\ln x)^2$에서

$f'(x)=2k\ln x\times\dfrac{1}{x}=\dfrac{2k\ln x}{x}$이므로

곡선 $y=k(\ln x)^2$ 위의 점 $(a,\ k(\ln a)^2)$에서의 접선의 방정식은

$$y-k(\ln a)^2=\frac{2k\ln a}{a}(x-a)$$

$$y=\frac{2k\ln a}{a}x-2k\ln a+k(\ln a)^2$$

이때 이 접선이 점 $\mathrm{A}\left(0,\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}e\right)$를 지나므로

$$\frac{\sqrt{3}}{2}e=-2k\ln a+k(\ln a)^2$$

$$k(\ln a)^2-2k\ln a-\frac{\sqrt{3}}{2}e=0 \quad \cdots\cdots ㉠$$

또한 조건 (가)에 의하여 ㉠의 $\ln a$에 대한 이차방정식의 두 근은 $\ln p$, $\ln q$이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\ln p+\ln q=\frac{2k}{k}=2,\ \ln pq=2.\ pq=e^2 \quad \cdots\cdots ㉡$$

$$\ln p\times\ln q=-\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{e}{k} \quad \cdots\cdots ㉢$$

또한 조건 (나)에 의하여

$$\frac{2k\ln p}{p}\times\frac{2k\ln q}{q}=\frac{4k^2\ln p\times\ln q}{pq}=-1$$

$$k=\frac{\sqrt{3}}{6}e$$

따라서 $f(x)=\dfrac{\sqrt{3}}{6}e(\ln x)^2$이고 ㉠에서

$$\frac{\sqrt{3}}{6}e(\ln a)^2-\frac{\sqrt{3}}{3}e\ln a-\frac{\sqrt{3}}{2}e=0$$

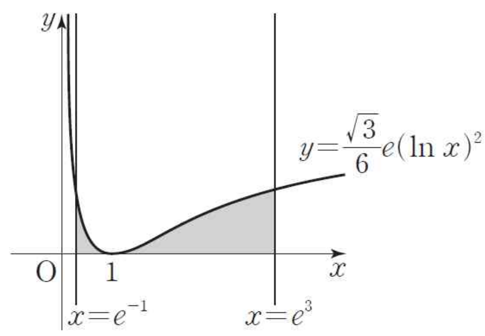
$(\ln a)^2-2\ln a-3=0$

$(\ln a+1)(\ln a-3)=0$

$\ln a=-1$ 또는 $\ln a=3$

즉, $a=e^{-1}$ 또는 $a=e^3$이고 $p<q$이므로

$p=e^{-1}$, $q=e^3$



이때 $f(x)\geq 0$이므로 곡선 $y=f(x)$와 두 직선 $x=e^{-1}$, $x=e^3$ 및 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 S라 하면

$$\begin{aligned} S &= \int_{e^{-1}}^{e^3}\frac{\sqrt{3}}{6}e(\ln x)^2\,dx \\ &= \frac{\sqrt{3}}{6}e\int_{e^1}^{e^3}(\ln x)^2\,dx \end{aligned}$$

$\displaystyle\int_{e^{-1}}^{e^3}(\ln x)^2\,dx$에서

$u(x)=(\ln x)^2$, $v'(x)=1$로 놓으면

$u'(x)=\dfrac{2\ln x}{x}$, $v(x)=x$이므로

$$\begin{aligned} &\int_{e^{-1}}^{e^3}(\ln x)^2\,dx \\ &= \Big[x(\ln x)^2\Big]_{e^{-1}}^{e^3}-\int_{e^{-1}}^{e^3}2\ln x\,dx \end{aligned}$$

$$= 9e^3 - e^{-1} - 2\Big[x\ln x - x\Big]_{e^{-1}}^{e^3}$$
$$= 9e^3 - \frac{1}{e} - 2\{(3e^3 - e^3) - (-e^{-1} - e^{-1})\}$$
$$= 9e^3 - \frac{1}{e} - 2\left(2e^3 + \frac{2}{e}\right)$$
$$= 5e^3 - \frac{5}{e}$$

따라서

$$S = \frac{\sqrt{3}}{6}e\int_{e^{-1}}^{e^3}(\ln x)^2\,dx$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{6}e\left(5e^3 - \frac{5}{e}\right)$$
$$= \frac{5\sqrt{3}}{6}(e^4 - 1)$$

8. 답. ②

$-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$에서 $\sec x > 0$이므로 $f(x) > 0$이고,

$0 < x < \frac{\pi}{2}$에서만 $g(x) > 0$이므로 두 함수

$f(x) = a\sec x$, $g(x) = 2\sin x\cos x$의 그래프가 만나는

점의 x좌표를 θ라 하면 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$이다.

이때 $f(\theta) = g(\theta)$이므로

$a\sec\theta = 2\sin\theta\cos\theta$

$a = 2\sin\theta\cos^2\theta$ …… ㉠

또한

$f'(x) = a\sec x\tan x$, $g'(x) = 2\cos^2 x - 2\sin^2 x$

이고 $f'(\theta) = g'(\theta)$이므로

$a\sec\theta\tan\theta = 2\cos^2\theta - 2\sin^2\theta$

$2\sin\theta\cos^2\theta \times \sec\theta\tan\theta = 2\cos^2\theta - 2\sin^2\theta$

$2\sin^2\theta = 2(1 - \sin^2\theta) - 2\sin^2\theta$

$\sin^2\theta = \frac{1}{3}$

$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$이므로 $\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$이고

$\cos\theta = \sqrt{1 - \sin^2\theta} = \sqrt{1 - \frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$이므로 ㉠에 대입하면

$a = 2 \times \frac{1}{\sqrt{3}} \times \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{4\sqrt{3}}{9}$

한편, $f'(x) = 0$에서 $\tan x = 0$이므로 $x = 0$이다.

$x = 0$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로

함수 $f(x)$는 $x = 0$에서 극솟값 $f(0) = \frac{4\sqrt{3}}{9}$을 갖는다.

또한 $g'(x) = 0$에서 $\cos^2 x = \sin^2 x$, 즉 $\tan x = \pm 1$이므로

$x = -\frac{\pi}{4}$ 또는 $x = \frac{\pi}{4}$이다.

$x = -\frac{\pi}{4}$의 좌우에서 $g'(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로

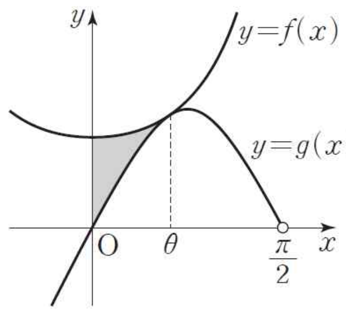
함수 $g(x)$는 $x = -\frac{\pi}{4}$에서 극솟값

$g\left(-\frac{\pi}{4}\right) = 2 \times \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \times \frac{\sqrt{2}}{2} = -1$을 갖고,

$x = \frac{\pi}{4}$의 좌우에서 $g'(x)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌므로

함수 $g(x)$는 $x = \frac{\pi}{4}$에서 극댓값

$g\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 1$을 갖는다.



따라서 두 곡선 $y = f(x)$, $y = g(x)$ 및 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 S라 하면

$$S = \int_0^{\theta}\left(\frac{4\sqrt{3}}{9}\sec x - 2\sin x\cos x\right)dx$$
$$= \frac{4\sqrt{3}}{9}\int_0^{\theta}\sec x\,dx - \int_0^{\theta}2\sin x\cos x\,dx \quad \cdots\cdots \text{㉡}$$

이때

$$\int_0^{\theta}\sec x\,dx$$
$$= \int_0^{\theta}\frac{1}{\cos x}\,dx$$
$$= \int_0^{\theta}\frac{\cos x}{\cos^2 x}\,dx$$
$$= \int_0^{\theta}\frac{\cos x}{1 - \sin^2 x}\,dx$$
$$= \int_0^{\theta}\frac{\cos x}{(1 - \sin x)(1 + \sin x)}\,dx$$
$$= \int_0^{\theta}\frac{1}{2}\left(\frac{\cos x}{1 - \sin x} + \frac{\cos x}{1 + \sin x}\right)dx$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^{\theta}\left\{-\frac{(1 - \sin x)'}{1 - \sin x} + \frac{(1 + \sin x)'}{1 + \sin x}\right\}dx$$
$$= \frac{1}{2}\Big[-\ln|1 - \sin x| + \ln|1 + \sin x|\Big]_0^{\theta}$$
$$= \frac{1}{2}\left[\ln\left|\frac{1 + \sin x}{1 - \sin x}\right|\right]_0^{\theta}$$
$$= \frac{1}{2}\left(\ln\frac{1 + \sin\theta}{1 - \sin\theta} - \ln\frac{1 + 0}{1 - 0}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\ln\frac{1 + \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 - \frac{1}{\sqrt{3}}} - 0$$
$$= \frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} - 1}$$
$$= \frac{1}{2}\ln(2 + \sqrt{3})$$

$$\int_0^{\theta}2\sin x\cos x\,dx = \Big[\sin^2 x\Big]_0^{\theta} = \sin^2\theta$$
$$= \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{1}{3}$$

이므로 ㉡에서

$$S = \frac{4\sqrt{3}}{9}\int_0^{\theta}\sec x\,dx - \int_0^{\theta}2\sin x\cos x\,dx$$
$$= \frac{4\sqrt{3}}{9} \times \frac{1}{2}\ln(2 + \sqrt{3}) - \frac{1}{3}$$
$$= \frac{2\sqrt{3}}{9}\ln(2 + \sqrt{3}) - \frac{1}{3}$$

9. **정답** ④

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x}dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x}dx$$

$$= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x}\right)dx$$

$$= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} (\sec^2 x + \csc^2 x)dx$$

$$= \Big[\tan x - \cot x \Big]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}$$

$$= \left(\tan\frac{\pi}{3} - \cot\frac{\pi}{3}\right) - \left(\tan\frac{\pi}{6} - \cot\frac{\pi}{6}\right)$$

$$= \left(\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{3}\right) - \left(\frac{\sqrt{3}}{3} - \sqrt{3}\right)$$

$$= \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

[참고]

$$\frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} = \csc^2 x \sec^2 x$$

$$= (\cot^2 x + 1)(\tan^2 x + 1)$$

$$= 1 + \cot^2 x + \tan^2 x + 1$$

$$= \csc^2 x + \sec^2 x$$

10. **정답** ③

$\ln x = t$로 놓으면 $x = e$일 때 $t = 1$, $x = e^2$일 때 $t = 2$이고,

$\frac{1}{x} = \frac{dt}{dx}$ 이므로

$$\int_{e}^{e^2} \frac{(\ln x)^2 + \ln x^2}{x}dx = \int_{e}^{e^2} \frac{(\ln x)^2 + 2\ln x}{x}dx$$

$$= \int_1^2 (t^2 + 2t)\,dt$$

$$= \left[\frac{1}{3}t^3 + t^2\right]_1^2$$

$$= \left(\frac{8}{3} + 4\right) - \left(\frac{1}{3} + 1\right)$$

$$= \frac{16}{3}$$

11. **정답** ②

$f(x) = x^2 e^{-x} + \int_0^x e^{t-x} f(t)dt$ 의 양변에 $x = 0$을 대입하면

$f(0) = 0$

$f(x) = x^2 e^{-x} + e^{-x}\int_0^x e^t f(t)dt$ 의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$f'(x) = 2xe^{-x} - x^2 e^{-x} - e^{-x}\int_0^x e^t f(t)dt + e^{-x}e^x f(x)$$

$$= 2xe^{-x} - \left(x^2 e^{-x} + \int_0^x e^{t-x} f(t)dt\right) + f(x)$$

$$= 2xe^{-x} - f(x) + f(x)$$

$$= 2xe^{-x}$$

$$f(x) = \int f'(x)dx$$

$$= \int 2xe^{-x}dx$$

$$= -2xe^{-x} + \int 2e^{-x}dx$$

$= -2xe^{-x} - 2e^{-x} + C$ (단, C는 적분상수)

$f(0) = -2 + C = 0$에

$C = 2$

$f(x) = -2xe^{-x} - 2e^{-x} + 2$

한편, $f'(x) = 0$에서 $x = 0$

$x = 0$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로 함수 $f(x)$는 $x = 0$에서 극소인 동시에 최소이다.

$f(-2) = 4e^2 - 2e^2 + 2 = 2e^2 + 2$

$f(2) = -4e^{-2} - 2e^{-2} + 2 = -6e^{-2} + 2$

즉, $f(-2) > f(2) > 0$ 이므로 닫힌구간 $[-2, 2]$에서 함수 $f(x)$의 최댓값은 $f(-2) = 2e^2 + 2$, 최솟값은 $f(0) = 0$이다.

따라서 최댓값과 최솟값의 합은 $2e^2 + 2$이다.

[참고]

$f(x) = x^2 e^{-x} + \int_0^x e^t f(t)dt$ 의 양변에 e^x을 곱하면

$$e^x f(x) = x^2 + \int_0^x e^t f(t)dt$$

양변을 x에 대하여 미분하면

$e^x f(x) + e^x f'(x) = 2x + e^x f(x)$

즉, $e^x f'(x) = 2x$에서

$f'(x) = 2xe^{-x}$

12. **정답** ①

$$\int_0^x (x-t)f(t)dt = e^x + 8e^{-x} - 3x^2 + ax + b \quad \cdots\cdots ㉠$$

㉠의 양변에 $x = 0$을 대입하면

$0 = 1 + 8 + b$

$b = -9$

㉠에서

$$x\int_0^x f(t)dt - \int_0^x tf(t)dt = e^x + 8e^{-x} - 3x^2 + ax - 9$$

양변을 x에 대하여 미분하면

$$\int_0^x f(t)dt + xf(x) - xf(x) = e^x - 8e^{-x} - 6x + a$$

$$\int_0^x f(t)dt = e^x - 8e^{-x} - 6x + a \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉡의 양변에 $x = 0$을 대입하면

$0 = 1 - 8 + a$

$a = 7$

㉡의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$f(x) = e^x + 8e^{-x} - 6 = e^{-x}(e^{2x} + 8 - 6e^x)$$

$$= e^{-x}(e^x - 2)(e^x - 4)$$

곡선 $y = f(x)$와 x축이 만나는 점의 x좌표는

$f(x) = 0$에서 $x = \ln 2$ 또는 $x = \ln 4$

$\ln 2 < x < \ln 4$에서 $f(x) < 0$이므로

곡선 $y = f(x)$와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이 S는

$$S = \int_{\ln 2}^{\ln 4} |e^x + 8e^{-x} - 6|\,dx = \int_{\ln 2}^{\ln 4} (-e^x - 8e^{-x} + 6)\,dx$$

$=\left[-e^{x}+8e^{-x}+6x\right]_{\ln 2}^{\ln 4}$

$=(-e^{\ln 4}+8e^{-\ln 4}+6\ln 4)-(-e^{\ln 2}+8e^{-\ln 2}+6\ln 2)$

$=(-4+2+12\ln 2)-(-2+4+6\ln 2)$

$=6\ln 2-4$

따라서

$a+b+S=7+(-9)+(6\ln 2-4)=6\ln 2-6$

13. 정답 20

조건 (가)에서 $f(\pi)=a\pi\sin b\pi=0$이므로 b는 자연수이다. 모든 실수 x에 대하여 $|f(x)|=|ax\sin bx|\le |ax|$이므로 조건 (나)에 의하여 $|ax|\le |x|$이고, $a>0$이므로

$0<a\le 1$ …… ㉠

$f(x)=ax\sin bx$에서

$f'(x)=a\sin bx+abx\cos bx$ 이므로

$f'(x)=0$에서

$a\sin bx+abx\cos bx=0$ …… ㉡

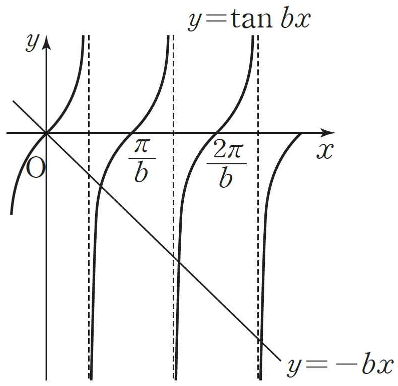
$\cos bx=0$이면 $|\sin bx|=1$이므로 ㉡에서 $a=0$이 되어 ㉠을 만족시키지 않는다.

따라서 $\cos bx\ne 0$이고 ㉡에서

$\dfrac{a\sin bx+abx\cos bx}{a\cos bx}=0$

$\dfrac{\sin bx}{\cos bx}+bx=0$

$\tan bx=-bx$

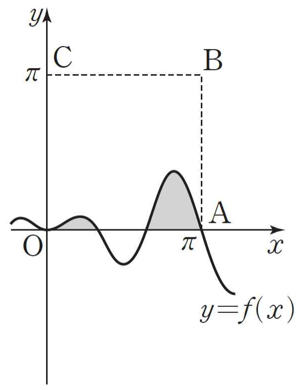


곡선 $y=\tan bx$와 직선 $y=-bx$의 교점의 x좌표 중 양수인 것을 작은 수부터 크기순으로 나열한 것을 x_1, x_2, x_3, …이라 하자. $x\ge 0$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

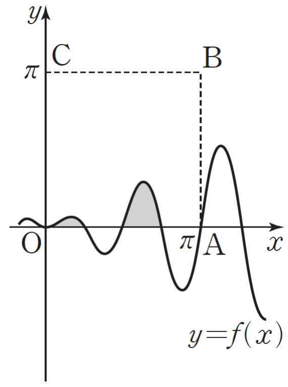
x	0	…	x_1	…	x_2	…	x_3	…
$f'(x)$	0	+	0	−	0	+	0	−
$f(x)$	0	↗	극대	↘	극소	↗	극대	↘

$0\le xlepi$ 일 때, 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축이 만나는 점의 x좌표는 $ax\sin bx=0$에서 $x=0,\ \dfrac{\pi}{b},\ \dfrac{2\pi}{b},\ \cdots,\ \dfrac{b\pi}{b}$이고,

$0<x_1<\dfrac{\pi}{b}<x_2<\dfrac{2\pi}{b}<x_3<\dfrac{3\pi}{b}<\cdots<\dfrac{b\pi}{b}=\pi$이므로 조건 (다)를 만족시키려면 $b=3$ 또는 $b=4$이어야 한다.



[$b=3$일 때]



[$b=4$일 때]

한편, $\displaystyle\int f(x)dx=\int ax\sin bx\,dx$에서

$u(x)=ax,\ v'(x)=\sin bx$로 놓으면

$u'(x)=a,\ v(x)=-\dfrac{1}{b}\cos bx$ 이므로

$\displaystyle\int ax\sin bx\,dx=-\frac{a}{b}x\cos bx+\int\frac{a}{b}\cos bx\,dx$

$\displaystyle=-\frac{a}{b}x\cos bx+\frac{a}{b^2}\sin bx+C$ (단, C는 적분상수)

따라서 곡선 $y=f(x)$와 x축으로 둘러싸인 부분과 정사각형 OABC의 내부의 공통부분의 넓이는

$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{b}}f(x)dx+\int_{\frac{2\pi}{b}}^{\frac{3\pi}{b}}f(x)dx$

$\displaystyle=\left[-\frac{a}{b}x\cos bx+\frac{a}{b^2}\sin bx\right]_0^{\frac{\pi}{b}}+\left[-\frac{a}{b}x\cos bx+\frac{a}{b^2}\sin bx\right]_{\frac{2\pi}{b}}^{\frac{3\pi}{b}}$

$\displaystyle=\frac{a\pi}{b^2}+\left(\frac{2a\pi}{b^2}+\frac{2a\pi}{b^2}\right)$

$\displaystyle=\frac{6a\pi}{b^2}$

(ⅰ) $b=3$일 때

$\dfrac{6a\pi}{3^2}\le\dfrac{\pi}{12}$에서 $0<a\le\dfrac{1}{8}$이므로

$72a+b\le 72\times\dfrac{1}{8}+3=12$

(ⅱ) $b=4$일 때

$\dfrac{6a\pi}{4^2}\le\dfrac{\pi}{12}$에서 $0<a\le\dfrac{2}{9}$이므로

$72a+b\le 72\times\dfrac{2}{9}+4=20$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $72a+b$의 최댓값은 20이다.

14. 정답 4

$\displaystyle f(x)\cos x=x\cos^2x-\sin x\int_0^{\frac{\pi}{2}}f'(t)\,dt-\int_0^x f(t)\sin t\,dt$ …… ㉠

㉠에 $x=0$을 대입하면 $f(0)=0$

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)\cos x-f(x)\sin x$

$\displaystyle=\cos^2x-2x\sin x\cos x-\cos x\int_0^{\frac{\pi}{2}}f'(t)\,dt-f(x)\sin x$

$\displaystyle f'(x)\cos x=\cos^2x-2x\sin x\cos x-\cos x\int_0^{\frac{\pi}{2}}f'(t)\,dt$ …… ㉡

모든 실수 x에 대하여 ㉡이 성립하므로

$f'(x)=\cos x-2x\sin x-\int_0^{\frac{\pi}{2}} f'(t)\,dt$

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f'(t)\,dt=k$ (k는 상수)라 하면

$f'(x)=\cos x-2x\sin x-k$ 이므로

$k=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos t-2t\sin t-k)\,dt$

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos t-k)\,dt-2\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\sin t\,dt$ …… ㉢

이때

$\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos t-k)\,dt=\left[\sin t-kt\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=1-\frac{\pi}{2}k$

이고, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\sin t\,dt$에서

$u(t)=t$, $v'(t)=\sin t$로 놓으면

$u'(t)=1$, $v(t)=-\cos t$ 이므로

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\sin t\,dt=\left[-t\cos t\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos t\,dt$

$=0+\left[\sin t\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$=1$

그러므로 ㉢에서

$k=\left(1-\frac{\pi}{2}k\right)-2\times 1$

$\left(1+\frac{\pi}{2}\right)k=-1$

$k=-\frac{2}{\pi+2}$

㉠의 양변에 $x=\frac{\pi}{2}$를 대입하면

$0=-\int_0^{\frac{\pi}{2}} f'(t)\,dt-\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)\sin t\,dt$

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)\sin t\,dt=-\int_0^{\frac{\pi}{2}} f'(t)\,dt=-k=\frac{2}{\pi+2}$

즉, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\sin x\,dx=\frac{2}{\pi+2}$

이때 $u(x)=f(x)$, $v'(x)=\sin x$로 놓으면

$u'(x)=f'(x)$, $v(x)=-\cos x$ 이므로

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\sin x\,dx=\left[-f(x)\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}} f'(x)\cos x\,dx$

$=f(0)+\int_0^{\frac{\pi}{2}} f'(x)\cos x\,dx$

$=\frac{2}{\pi+2}$

$f(0)=0$ 이므로 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f'(x)\cos x\,dx=\frac{2}{\pi+2}$

따라서

$(\pi+2)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\{f(x)\sin x+f'(x)\cos x\}\,dx$

$=(\pi+2)\left\{\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\sin x\,dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}} f'(x)\cos x\,dx\right\}$

$=(\pi+2)\left(\frac{2}{\pi+2}+\frac{2}{\pi+2}\right)$

$=4$

15. **정답** 17

$G'(x)=g(x)$라 할 때,

$\int_{f(1)}^{f(x)} g(t)dt=G(f(x))-G(f(1))$ 이므로

조건 (가)에서 주어진 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$G'(f(x))f'(x)=g(f(x))f'(x)=a+\frac{1}{x}$

함수 $g(x)$는 함수 $f(x)$의 역함수이므로 $g(f(x))=x$

그러므로 $xf'(x)=a+\frac{1}{x}$ …… ㉠

또 $x>0$이므로 ㉠의 양변을 x로 나누면

$f'(x)=\frac{a}{x}+\frac{1}{x^2}$

$f(4)-f(2)=\int_2^4 f'(x)dx$ 이고,

$\int_2^4 f'(x)dx=\int_2^4\left(\frac{a}{x}+\frac{1}{x^2}\right)dx=\left[a\ln x-\frac{1}{x}\right]_2^4$

$=\left(a\ln 4-\frac{1}{4}\right)-\left(a\ln 2-\frac{1}{2}\right)$

$=a\ln 2+\frac{1}{4}$

조건 (나)에 의하여

$a\ln 2+\frac{1}{4}=\frac{1}{4}+3\ln 2$이므로 $a=3$

한편, $f(x)=\int\left(\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}\right)dx=3\ln x-\frac{1}{x}+C$ (단, C는 적분상수)

이므로 $f(1)=-1+C=2$에서 $C=3$

즉, $f(x)=3\ln x-\frac{1}{x}+3$에서

$f(3)=3\ln 3-\frac{1}{3}+3=\frac{8+9\ln 3}{3}$

따라서 $p=8$, $q=9$이므로

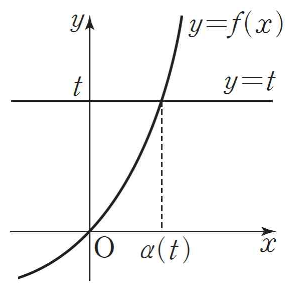
$p+q=8+9=17$

16. **정답** 45

$f(x)=e^{2x}+2e^x-3$에서

$f'(x)=2e^{2x}+2e^x=2e^x(e^x+1)>0$

이므로 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 증가하고, $f(0)=0$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 그림과 같다.



함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=t$가 만나는 점의 x좌표를 $\alpha(t)$라 하면 함수 $g(x)=\int_0^x\{t-f(x)\}\,ds$는 $x=\alpha(t)$에서

극대인 동시에 최대이므로 $h(t)=\alpha(t)$이다.

즉, $f(h(t))=t$이므로 양변을 t에 대하여 미분하면

$f'(h(t))h'(t)=1$ …… ㉠

$h'(k)=\frac{1}{12}$이므로 ㉠에 $t=k$를 대입하면

$f'(h(k))h'(k)=1$에서

$f'(h(k))=\frac{1}{h'(k)}=12$

즉, $2e^{2h(k)}+2e^{h(k)}=12$에서

$e^{2h(k)}+e^{h(k)}-6=0$

$\{e^{h(k)}+3\}\{e^{h(k)}-2\}=0$

$e^{h(k)}+3>0$이므로

$e^{h(k)}-2=0$, $h(k)=\ln 2$

$f(h(k))=k$에서

$k=f(\ln 2)=4+2\times 2-3=5$

그러므로 $g(h(k))=g(\ln 2)=\int_0^{\ln 2}\{t-f(s)\}\,dx$

$0<t\leq 5$에서 $g(\ln 2)$의 최댓값은 $t=5$일 때이므로 최댓값은

$$\begin{aligned}\int_0^{\ln 2}\{5-(e^{2s}+2e^s-3)\}\,ds&=\int_0^{\ln 2}(-e^{2s}-2e^s+8)\,ds\\&=\left[-\frac{1}{2}e^{2s}-2e^s+8s\right]_0^{\ln 2}\\&=-\frac{7}{2}+8\ln 2\end{aligned}$$

따라서 $p=-\frac{7}{2}$, $q=8$이므로

$10(p+q)=10\left(-\frac{7}{2}+8\right)=10\times\frac{9}{2}=45$

김지형