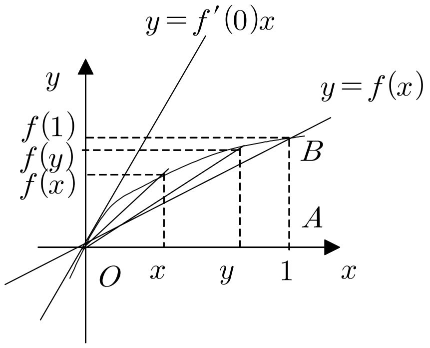
일반적인 해설)

조건(나)에서 $0 < x < y < 1$인 모든 x, y에 대하여

$0 < xf(y) < yf(x)$

이므로 $0 < \dfrac{f(y)}{y} < \dfrac{f(x)}{x}$이고

$f(0)=0$을 동시에 만족하는 다항함수 $f(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



주어진 그림에서 삼각형 OAB의 넓이는 $\dfrac{1}{2}f(1)$이므로

$y=k\dfrac{1}{2}f(1) < \displaystyle\int_0^1 f(x)dx$

$\therefore\ f(1) < 2\displaystyle\int_0^1 f(x)dx$ 즉, $B < C$

한편, 원점 O을 지나는 접선의 방정식은 $y=f'(0)x$

직선 $y=f'(0)x$와 직선 $x=1$ 및 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이는 $\dfrac{1}{2}f'(0)$이고 주어진

그림에서 $\dfrac{1}{2}f'(0) > \displaystyle\int_0^1 f(x)dx$

$\therefore\ f'(0) > 2\displaystyle\int_0^1 f(x)dx$ 즉, $A > C$

$\therefore\ B < C < A$

논술식 사고)
조건 (나)에서 f가 연속함수이므로 $x=0$, $y=1$이어도 무관. (단 등호가 붙음)
그렇다면 $0<x<1$에 대해 $xf(1)<f(x)$이고 적분하면
$\int_0^1 xf(1)dx<\int_0^1 f(x)dx \Leftrightarrow \frac{f(1)}{2}<\int_0^1 f(x)dx$.
또 $0<\frac{f(y)}{y}<\frac{f(x)}{x}$ 에서 $x\to 0+$를 취하면 $\frac{f(y)}{y}<f'(0) \Leftrightarrow f(y)<f'(0)y$ $(0<y<1)$
마찬가지로 적분하면 $\int_0^1 f(y)dy<\int_0^1 f'(0)ydy=\frac{1}{2}f'(0)$.
정확히는 $g(x)=\begin{cases}\frac{f(x)}{x} & (x\neq 0)\\ f'(0) & (x=0)\end{cases}$로 놓으면 g가 연속함수 이므로 $g(y)\leq g(0)$

생각이 안났을 때) $g(x)=\frac{f(x)}{x}$가 감소하므로 $g'(x)=\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}<0$.
$xf'(x)<f(x)$에서 부분적분하면 왼쪽 부등식을 얻는다. 오른쪽 부등식은 위와 유사.

중요한 점) 왼쪽 부등식은 f가 미분 불가능이어도 위와 같이 성립하는데, 기울기함수만 생각하면 방도가 없다.

비슷한 식으로 식 만지기 연습)
연속함수 $f(x)$는 임의의 x에 대하여 $f(x)\geq 0$ 이고, 임의의 $x\neq 0$인 x와 $\alpha>1$인 상수 α에 대하여 $f(\alpha x)>\alpha f(x)$ 이다.
i) $f(0)$의 값은? ii) $x>y>0$에 대하여 $f(x)>f(y)$ 임을 보여라.

연습2) ※상당히 까다로울 수 있음.
$0\leq x\leq 1$에서 정의된 연속함수 $f(x)$가 다음의 조건을 만족한다.
(가) 임의의 $0\leq x\leq 1$에 대하여, $f(x)\geq 0$
(나) 임의의 $0\leq\alpha<\beta\leq 1$에 대하여, $f(\alpha)>f(\beta)$
(1) 임의의 $0\leq p<q\leq 1$에 대하여 다음이 부등식이 성립함을 증명하시오.
$$\int_p^q f(x)dx>0$$
(2) n은 자연수이다. 임의의 $0<b<1$에 대하여, 다음의 두 부등식이 성립함을 증명하시오.
(i) $\int_0^1 f(x)^n dx>bf(b)^n$
(ii) $\int_b^1 f(x)^n dx<(1-b)f(b)^n$
(3) 임의의 $0<a<1$에 대하여, 다음의 등식이 성립함을 증명하시오.
$$\lim_{n\to\infty}\frac{\int_0^a f(x)^n dx}{\int_0^1 f(x)^n dx}=1$$